Espace de Sobolev et edp elliptique en dim 1

Réf: , Brézis, Analyse fonctionnelle, chapitre 8, p 119
, Cours de Karine Beauchard sur les Hilbert.
, Cours de Debussche sur Ascoli.
, autres données au fur et à mesure.

Plan: I- Espace de Sobolev
II- Résolution d'edp elliptique linéaire en dim 1
III- Principe du maximum et décomposition spectrale
III- Résolution d'une edp elliptique non linéaire en dim 1

I- Espace de Sobolev

On se concentre sur l'intervalle bornée $]0,1[$.

Définition: On définit l'espace de sobolev

$$H^1(0,1) = \left\{ f \in L^2(0,1) \;\middle|\; \exists g \in L^2, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty, \int_0^1 f\varphi = -\int_0^1 g\varphi \right\}$$

et on note $u' = g$.

On le muni du produit scalaire suivant:

$$\langle f, h \rangle_{H^1} = \langle f, h \rangle_{L^2} + \langle f', h' \rangle_{L^2}$$

On définit aussi:

$$H^2(0,1) = \{ u \in H^1(0,1) \mid u' \in H^1(0,1) \}$$

Proposition H^1 est alors un espace de Hilbert séparable.

Preuve:

1) Montrons la complétude.

Soit f_n une suite de Cauchy dans H^1 alors pour $\varepsilon > 0$ et m, n assez grand:

$$\|f_n - f_m\|_{L^2} + \|f_n' - f_m'\|_{L^2} = \|f_n - f_m\|_{H^1} \leq \varepsilon.$$

Donc (f_n) est une suite de Cauchy dans L^2 i.e $\exists f \in L^2$ tq $f_n \to f$ dans L^2

(f_n') est une suite de Cauchy dans L^2 i.e $\exists g \in L^2$ tq $f_n' \to g$ dans L^2

Il suffit de mq $f' = g$ dans L^2.

Or pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ on a: $\int_0^1 f_n \varphi = -\int_0^1 f_n' \varphi$.

or $\left|\int_0^1 f_m \varphi - \int_0^1 f\varphi\right| \leq \left|\int_0^1 (f_n - f)\varphi\right| \leq \|f_m - f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\left|\int_0^1 f_n' \varphi - \int_0^1 g\varphi\right| \leq \|f_n' - g\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc par passage à la limite :

$$\int_0^1 f\varphi = -\int_0^1 g\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$$

Ainsi $f \in H^1$, $f' = g$ et $\|f_n - f\|_{H^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) On montre la séparabilité

Preuve 1 : On considère $T : H^1 \longrightarrow L^2 \times L^2$, $f \longmapsto (f, f')$ où sur l'espace produit on le munit de la norme 2.

Alors T est une isométrie de H^1 dans $L^2 \times L^2$.
Ainsi $T(H^1)$ est un sev fermé de $L^2 \times L^2$ (car H^1 fermé). Or L^2 est séparable (l'ev sur $\mathbb{Q}$ engendré par les indicatrices d'intervalles à extrémité dans $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dense) donc $L^2 \times L^2$ est séparable.
$\Rightarrow T(H^1)$ est séparable car s.ev fermé de $L^2 \times L^2$.

Or $T : H^1 \to T(H^1)$ est surjective, une isométrie donc injective ainsi c'est un homéo (isomorphisme de Banach) or $T(H^1)$ séparable donc H^1 séparable.

Preuve 2 : Densité de $\mathbb{Q}[X]$ dans $H^1(0,1)$ On utilise que $H^1(0,1) \subset \mathcal{C}([0,1])$.

Soit $f \in H^1(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans $L^2((0,1),\mathbb{R})$, il existe $h \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ tq :

$$\|f' - h\|_{L^2} < \varepsilon/3.$$

Par le théorème de Weierstrass il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\|h - P\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
On note $N = \deg P + 1$, par densité de $\mathbb{Q}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ et équivalences des normes sur $\mathbb{R}^N$ il existe $\tilde{P} \in \mathbb{Q}[X]$ tel que :

$$\|P - \tilde{P}\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon/3$$

Ainsi $\|f' - \tilde{P}\|_{L^2(0,1)} \leq \|f' - h\|_{L^2} + \|h - P\|_{L^2} + \|P - \tilde{P}\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|h - P\|_{L^\infty} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Or soit $q \in \mathbb{Q}$ tel que $|f(0)-q| < \varepsilon/3$ et on pose $Q(x) = q + \int_0^x \widetilde{P}(t)\,dt$ alors $Q \in \mathbb{Q}[X]$, alors :

$$|(f-Q)(x)| = \left| f(0) - q + \int_0^x f'(t) - \widetilde{P}(t)\,dt \right| \overset{\text{CVS}}{\leq} |f(0)-q| + \|f' - \widetilde{P}\|_{L^2} \leq \frac{2\varepsilon}{3} \quad (\forall x \in]0,1[).$$

Donc $\|f-Q\|_{H^1} \leq \|f-Q\|_{L^2} + \|f'-Q'\|_{L^2} \leq \|f-Q\|_{L^2} + \|f'-\widetilde{P}\|_{L^2} < \varepsilon$.

Rmq : Pour $1 \leq p \leq +\infty$, la même preuve (preuve 1) montre que $W^{1,p}(I)$ est un Banach, séparable ($p \neq +\infty$) et réflexif (si $p \neq 1$).

On va avoir besoin des lemmes suivants qui sont la généralisation pour la dérivée au sens des distributions de résultat connue.

Lemme : Soit $f \in L^1(0,1)$ tel que $f' = 0$ alors $f = c$ p.p.

Preuve : On fixe $\psi \in \mathcal{C}_c(0,1)$ telle que $\int_0^1 \psi(x)\,dx = 1$. On fixe $w \in \mathcal{C}_c(I)$ alors on pose :

$$h = w - \left(\int w\right)\psi \in \mathcal{C}_c(0,1).$$

On pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x \left(w(s) - \left(\int_0^1 w\right)\psi(s)\right) ds \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1) \left(\text{car } \int_0^1 h = 0\right) \text{ et } \varphi' = h.$$

Or $f' = 0$ donc $\int_0^1 f h = \int_0^1 f\left(w - \left(\int_0^1 w\right)\psi\right)$

$$= \int_0^1 f(s) w(s)\,ds - \int_0^1 w(t) \left(\int_0^1 f(s)\psi(s)\,ds\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(f(t) - \int_0^1 f(s)\psi(s)\,ds\right) w(t)\,dt = 0 \quad \forall w \in \mathcal{C}_c(I).$$

Ainsi $f(t) = \int_0^1 f(s)\psi(s)\,ds$ p.p

Lemme : Soit $g \in L^1_{loc}(0,1)$, $y_0 \in]0,1[$ et $v(x) = \int_{y_0}^x g(s)\,ds$ alors $v \in \mathcal{C}(0,1)$ et $v' = g$ (au sens des distrib).

Preuve : v est clairement continue en majorant par $\|g\|_{\infty,K}$ sur K un compact de $]0,1[$ contenant y_0.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ on a :

$$\int_0^1 v\varphi' = \int_0^1 \left[\int_{y_0}^x g(t)dt\right]\varphi'(x)dx = \int_0^1\int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx$$

$$= -\int_0^{y_0}\int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx + \int_{y_0}^1\int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)\,dt\,dx$$

Fubini ↓

$$= -\int_0^{y_0}\int_0^t \varphi'(x)\,dx\,g(t)\,dt + \int_{y_0}^1\int_t^1 \varphi'(x)\,dx\,g(t)\,dt$$

$\varphi(0)=\varphi(1)=0$ car φ à supp compact dans $]0,1[$. ↓

$$= -\int_0^{y_0} g(t)\varphi(t)dt - \int_{y_0}^1 g(t)\varphi(t)\,dt = -\int_0^1 g(t)\varphi(t)dt$$

Donc $v' = g$.

On peut maintenant démontrer le théorème fondamental $H^1(0,1) \subset \mathcal{C}^0(0,1)$.

Théorème : Soit $u \in H^1(0,1)$ alors il existe $\tilde{u} \in \mathcal{C}([0,1])$ tel que :

$$u = \tilde{u} \text{ p.p et } \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt \quad (\forall x,y \in]0,1[).$$

Preuve : On fixe $y_0 \in]0,1[$ et on pose $v(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$ car $u' \in L^2(0,1) \subset L^\infty_{loc}(0,1)$.
D'après le lemme, $v \in \mathcal{C}(I)$ et $v' = u'$ ainsi $(v-u)' = 0$.
D'après l'autre lemme il existe C tel que $u = v + C =: \hat{u}$ p.p sur $]0,1[$ et :

$$\hat{u}(x) - \hat{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt.$$

Par la suite on identifira u à son représentant continue (qui est unique) donc on a une injection $H^1(0,1) \subset \mathcal{C}(0,1)$ ce résultat est plus fort.

Théorème : Il existe $C > 0$ (existe) tel que :

$$\forall u \in H^1(0,1),\ \|u\|_\infty \le C\,\|u\|_{H^1} \quad (\text{ici } C = 1)$$

i.e l'injection $H^1(0,1) \subset \mathcal{C}([0,1])$ est continue, elle est même compact.

Preuve : On a pour $x \in [0,1]$:

$$|u(x)| = \left|u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt\right| = |u(0)| + \left|\int_0^x u'(t)\,dt\right|$$

$$\text{CVS} \begin{cases} \leq \int_0^1 |u(x)|dx + \|u'\|_{L^2} & \text{car } L^2(0,1) \subset L^1(0,1) \\ \leq \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} = \|u\|_{H^1} \end{cases}$$

Ainsi $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{H^1}$.

Soit $u \in B_{H^1}(0,1)$ alors on a :

$$|u(x)-u(y)| = \left|\int_y^x u'(t)\,dt\right| \leq \|u'\|_{L^2} |x-y|^{1/2} \leq \underbrace{\|u\|_{H^1}}_{\leq 1} |x-y|^{1/2}.$$

On peut donc utiliser le théorème d'Ascoli (car $|u(x)| \leq \|u\|_\infty \leq \|u\|_{H^1} = 1$) ce qui conclu.

∎

Rmq : • On a même montrer que $H^1(0,1) \subset \mathcal{C}^{0,1/2}(0,1)$.

• Dans le cas général il existe C une constante ne dépendant que de I $|I| < +\infty$ tel que :

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \forall\, 1 \leq p \leq \infty.$$

De plus si I bornée $W^{1,p}(I) \subset \mathcal{C}(\bar{I})$ est compacte pour $1 < p \leq \infty$

$W^{1,1}(I) \subset L^q(\bar{I})$ est compacte pour $1 \leq q < +\infty$.

Corollaire : Intégration par partie.

Soit $u, v \in H^1(0,1)$ alors $uv \in H^1(0,1)$ et :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Et on a pour $x, y \in [0,1]$:

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv'.$$

Preuve :

Par le théorème $u \in \mathcal{C}^0([0,1])$ donc bornée sur $[0,1]$ ainsi :

$$\int_0^1 |u(x)v(x)|^2 dx \leq \|u\|_\infty^2 \int_0^1 |v(x)|^2 dx \leq \|u\|_\infty^2 \|v\|_{L^2} < +\infty.$$

Ainsi $uv \in L^2$.

On a $u' \in L^2$ donc soit $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ tq $\varphi_n \xrightarrow{L^2} u'$ alors $\psi_n(x) = u(0) + \int_0^x \varphi_n \in \mathcal{C}^1(0,1)$, $\psi_n' = \varphi_n$, de plus :

$$\psi_n \xrightarrow{L^2} u$$

En effet, $\int_0^1 |u-\psi|^2 = \int_0^1 \left|u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds - u(0) - \int_0^t \varphi_n(s)\,ds\right|^2 dt$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^t |u'(s) - \varphi_n(s)| \, ds \right)^2 dt.$$

$$\leq \int_0^1 \|u' - \varphi_n\|_{L^2}^2 \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{d'où le résultat.}$$

Ainsi $\varphi_n \in \mathcal{C}^1(I)$ et $\varphi_n \longrightarrow u$ dans $H^1(0,1)$.

De même soit $\chi_n \in \mathcal{C}^1(I)$ tel que $\chi_n \longrightarrow v$ dans $H^1(0,1)$.

En particulier $\|\varphi_n - u\|_\infty \to 0$, $\|\chi_n - v\|_\infty \to 0$ ainsi $\|\chi_n \varphi_n - uv\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc dans $L^2(0,1)$.

De plus, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ on a :

$$\int_0^1 (\chi_n \varphi_n) \varphi' = - \int_0^1 \chi_n' \varphi_n \varphi - \int_0^1 \chi_n \varphi_n' \varphi.$$

or $\left| \int_0^1 (\chi_n \varphi_n - uv) \varphi' \right| \leq \|\chi_n \varphi_n - uv\|_\infty \int_0^1 |\varphi'| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\left| \int_0^1 (\chi_n' \varphi_n - v' u) \varphi' \right| \leq \int_0^1 |\chi_n' \varphi_n - v' \varphi_n| |\varphi'| + \int_0^1 |v' \varphi_n - v' u| |\varphi'|$$

$$\leq \|\varphi_n\|_\infty \, \|\chi_n' - v'\|_{L^2} \left(\int_0^1 |\varphi'|^2 \right)^{1/2} + \|v'\|_{L^2} \|\varphi'\|_\infty \|\varphi_n - u\|_{L^2}$$

(φ_n bornée car $\to \|u\|_\infty < +\infty$)

$$\leq M \|\varphi'\|_{L^2} \|\chi_n' - v'\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2} \|\varphi'\|_\infty \|\varphi_n - u\|_{L^2}$$

($\|\chi_n' - v'\|_{L^2} \to 0$, $\|\varphi_n - u\|_{L^2} \to 0$)

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

De même par symétrie ainsi pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ on a :

$$\int_0^1 (uv) \varphi' = - \int_0^1 (u'v + v'u) \varphi$$

et $\|u'v + v'u\|_{L^2} \leq \|v\|_\infty \|u'\|_{L^2} + \|u\|_\infty \|v'\|_{L^2} < +\infty$ donc $u'v + v'u \in L^2$

Ainsi $uv \in H^1(0,1)$ et $(uv)' = u'v + v'u$.

Et on sait que pour $x, y \in [0,1]$

$$u(x)v(x) - u(y)v(y) = \int_y^x (uv)' = \int_y^x u'v + \int_y^x v'u$$

Définition : On définit $H_0^1(0,1)$ la fermeture $\mathcal{C}_c^1(0,1)$ pour la norme $\|.\|_{H^1}$.
Ainsi $H_0^1(0,1)$ est un Hilbert et $H_0^1(0,1) \subset H^1(0,1)$.

Rmq : Plus généralement pour $1 \leq p < +\infty$ alors $W_0^{1,p}(I)$ fermeture de $\mathcal{C}_c^1(I)$ pour la norme $\|.\|_{W^{1,p}}$.

Théorème : On a $H_0^1(0,1) = H^1(0,1) \cap \mathcal{C}_0(0,1)$ i.e pour $u \in H^1(0,1)$, $u \in H_0^1$ ssi $u(0) = u(1) = 0$.

Preuve : $\subset$: Soit $u \in H_0^1(0,1)$, ainsi $\exists (u_n) \in \mathcal{C}_c^1(I)$ tq $u_n \xrightarrow{H^1} u$ alors $\|u_n - u\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Or on a : $|u(0)| = |u(0) - u_n(0)| \leq \|u_n - u\|_\infty \to 0$
$|u(1)| = |u(1) - u_n(1)| \leq \|u_n - u\|_\infty \to 0$.

$\supset$: Soit $u \in H^1(0,1)$ tel que $u(0) = u(1) = 0$.
Alors $\int_0^1 u'(t)\,dt = u(1) - u(0) = 0$ or $u' \in L^2(0,1)$ donc il existe $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ tel que : $\varphi_n \xrightarrow{L^2} u'$

Ainsi $\lambda_n := \int_0^1 \varphi_n(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CVS}} \int_0^1 u'(t)\,dt = 0$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ tel que $\int_0^1 \varphi = 1$ on pose $u_n := \int_0^x (\varphi_n - \lambda_n \varphi) \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ car $u_n(0) = 0$
$u_n(1) = \lambda_n - \lambda_n = 0$

Et on $u_n \xrightarrow{H^1} u$ en effet :
$u_n' = \varphi_n - \lambda_n \varphi \xrightarrow{L^2} u'$ $\begin{cases} \varphi_n \xrightarrow{L^2} u' \\ \lambda_n \to 0 \end{cases}$

$$|(u_n - u)(x)| = \left| \int_0^x (\varphi_n - \lambda_n \varphi)(t) - u'(t)\,dt \right| \quad \text{car } u(0) = 0$$
$$= \int_0^x |\varphi_n(t) - u'(t)|\,dt + |\lambda_n| \|\varphi\|_{L^1}$$
$$\leq \|\varphi_n - u'\|_{L^2} + |\lambda_n| \|\varphi\|_{L^1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\|u_n - u\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ i.e $\|u_n - u\|_{L^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi on a clairement $u_n \xrightarrow{H^1} u$.

∎

Il nous reste à montrer l'inégalité de poincaré.

Proposition : Inégalité de Poincaré.

Il existe une constante C tel que :

$$\forall u \in H_0^1(0,1), \quad \|u\|_{H^1} \leq C \|u'\|_{L^2}.$$

Preuve : Soit $u \in H_0^1(0,1)$ on a :

$$|u(x)| = |u(x) - u(0)| \leq \left| \int_0^x u'(t)\,dt \right| \leq \|u'\|_{L^2}$$

Ainsi $\|u\|_{H^1} = \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx + \int_0^1 |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \|u'\|_{L^2}^2 dx + \int_0^1 |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

$$= \sqrt{2}\, \|u'\|_{L^2}$$

d'où $\|u\|_{H^1} \leq \sqrt{2}\, \|u'\|_{L^2}$.

Remarque : Si $I =]a,b[$ bornée alors $|u(x)| \leq \sqrt{|I|}\, \|u\|_{L^2}$ donc $\|u\|_{H^1} \leq \left(|I|^2 + 1 \right)^{1/2} \|u'\|_{L^2}$

« On peut calculer la constante optimale :

Pour $f \in H_0^1(0,1)$ on l'étend en une fonction impaire sur $]-1,1[$ puis en une fonction 2-périodique sur $\mathbb{R}$ de coeff de fourier :

$$c_n(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) e^{-in\pi x}\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Alors

$$\int_0^1 |f'|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |f'|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} |i\pi c_n(f)|^2 \geq \pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |f|^2 = \int_0^1 |f|^2$$

L'égalité est atteint pour $f(x) = \sin(\pi x)$ donc π^2 est optimale, le prolongement par impparité est nécessaire pour garantir $c_0(f) = 0$.

La dernière proposition nous permet de retrouver dans la dérivée faible des propconnue.

Proposition : Soit $u \in L^2$, les points suivants sont équivalents :

i) $u \in H^1(0,1)$ $\iff$ ii) $\exists C>0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$, $\left|\int_0^1 u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^2}$

$\iff$ iii) Il existe $C>0$ tq pour tout ouvert $\omega \subsetneq]0,1[$ et tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < d(\omega, \partial(]0,1[))$ i.e $|h| < \min(d(\omega,0), d(\omega,1))$ on a:

$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\omega)} \leq C|h|.$$

Et on peut choisir $C = \|u'\|_{L^2(0,1)}$

Preuve: i) $\Rightarrow$ iii) est clair.

ii) $\Rightarrow$ i) La forme linéaire, $\varphi : \mathcal{C}_c^\infty(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue pour $\|.\|_{L^2}$ sur

$\varphi \longmapsto \int u\varphi'$ $\mathcal{C}_c^\infty$ qui est dense dans L^2.

On peut donc la prolonger en une forme linéaire continue $f : L^2(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$. Or L^2 est un Hilbert donc par le théorème de Riesz il existe $g \in L^2$ tel que:

$$\forall f \in L^2, \quad f(f) = \langle g, f \rangle$$

En particulier pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$ on a:

$$\int u\varphi' = \int g\varphi$$

Or $g \in L^2$ donc $u \in H^1(0,1)$.

i) $\Rightarrow$ iii) Pour $x \in \omega$, et $|h| \leq d(\omega, \partial(]0,1[))$ on a:

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)\,dt = h\int_0^1 u'(x+sh)\,ds$$

En utilisant Hölder, $|u(x+h)-u(x)|^2 = |h|^2 \int_0^1 |u'(x+sh)|^2\,ds$.

Ce qui donne:

$$\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^2\,dx \leq |h|^2 \int_\omega \int_0^1 |u'(x+sh)|^2\,ds\,dx$$

$$\leq |h|^2 \int_0^1 \int_\omega |u'(x+sh)|^2\,dx\,ds$$

Or pour $s \in]0,1[$, $\int_\omega |u'(x+sh)|^2\,dx = \int_{\omega+sh} |u'(y)|^2\,dy \leq \int_0^1 |u'(y)|^2\,dy$ ce qui donne:

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^2\,dx \leq |h|^2 \int_0^1 |u'(y)|^2\,dy.$$

iii) $\Rightarrow$ ii): Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$, et $\omega \subsetneq [0,1]$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \omega$. Pour $|h| \leq d(\omega, \partial([0,1]))$ on a:

$$\int_w [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)\,dx = \int_I [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)\,dx = \int_0^1 u(x)[\varphi(x-h)-\varphi(x)]\,dx$$

D'après C/S et iii) on a :

$$\left|\int_I (u(x+h)-u(x))\varphi(x)\,dx\right| \le \|\tau_h u - u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \le C|h|\|\varphi\|_{L^2}.$$

Ce qui donne $\left|\int_I u(x)\left(\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h}\right)dx\right| \le C\|\varphi\|_{L^2}$.

Or $\mathrm{supp}(\varphi)$ est compact, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(0,1)$ donc $\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \varphi'(x)$ uniformément sur $\mathrm{supp}(\varphi)$ donc sur sur I.

Ainsi par passage à la limite : $\left|\int_I u\varphi'\right| \le C\|\varphi\|_{L^2}$ d'où le résultat ■

II- Résolution d'edp elliptique linéaire en dim 1

1- Outils pour la résolution

Théorème : Riesz - Fréchet

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert et $\ell : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue alors :

$$\exists! u \in H,\ \forall v \in H,\ \langle u, v\rangle = \ell(v).$$

De plus $\|u\| = \|\ell\|$.

Preuve : Soit ℓ une forme linéaire continue sur H, on suppose $\ell \neq 0$ car sinon $u = 0$ est l'unique solution.
Alors $\mathrm{Ker}(\ell)$ est un sev strict fermé de H, ainsi :

$$H = \mathrm{Ker}(\ell) \oplus F, \text{ où } F = \mathrm{Ker}(\ell)^\perp$$

En particulier $\ell : F \to \mathbb{R}$ est un isomorphisme ainsi F est sev de dim 1 soit $u \in F\setminus\{0\}$, $\ell(u) \neq 0$ donc on peut supposer que $\ell(u) = 1$. $\underbrace{v}_{\in \mathrm{Ker}(u)} = \underbrace{w}_{\in F} + \langle v, u\rangle u$ et par linéarité de ℓ :

$$\ell(v) = \ell(w) + \langle v, u\rangle \ell(u).$$

$$\text{i.e } \ell(v) = \langle v, u\rangle.$$

d'où le résultat. De plus $|\langle v, u\rangle| \le \|v\|\|u\|\ \forall v \in H$ donc $\|\ell\| \le \|u\|$.

Or $\ell(u) = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$ donc $\|u\| \leq \|\ell\|$ d'où l'égalité.

Le théorème de Riesz nous permet de résoudre "$a(u,v) = \ell(v)$" lorsque a est symétrique définie positive et continue par rapport à $\langle .,. \rangle_H$ i.e un produit scalaire sur H. Si on a moins de contrôle sur a on peut utiliser le théorème de Lax-Milgram.

Théorème : Lax-Milgram.

Soit H un hilbert réel et $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive i.e

- $\exists M > 0, \forall u, v \in H, \ |a(u,v)| \leq \|u\| \|v\|$
- $\exists m > 0, \forall u \in H, \ a(u,u) \geqslant m \|u\|^2$

Alors pour tout $\ell \in H'$ (forme linéaire continue sur H), il existe un unique $u \in H$ tel que :

$$a(u,v) = \ell(v).$$

De plus si a est symétrique alors

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2} a(u,u) - \ell(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v) \right).$$

Preuve. Réf : Hirsch-Lacombe, p. 101

Étape 1 : Montrons il existe $T \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que $a(u,v) = \langle Tu, v \rangle \ (\forall u, v)$.

Soit $u \in H$, alors $a(u,.)$ est une forme linéaire continue sur H car :

$$\forall v \in H, \ |a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|$$

Ainsi par le théorème de Riesz il existe un unique $Tu \in H$ tel que :

$$\forall v, \ \langle Tu, v \rangle = a(u,v).$$

On note : $T : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & Tu \end{array}$ par unicité de Tu, T est une application linéaire injective.

De plus,

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu \rangle = a(u, Tu) \leq M \|u\| \|Tu\|.$$

Si $u \neq 0$, $Tu \neq 0$ (T injectif) donc $\|Tu\| \leq M \|u\|$ i.e $T \in \mathcal{L}_c(H)$.

Étape 2 : Montrons que T est un homéomorphisme.

Il reste à montrer que T est surjective, pour cela montrons que $\mathrm{Im}(T)$ est fermé et dense dans H.

Dense : i.e $\mathrm{Im}(T)^\perp = \{0\}$ donc soit $v \in \mathrm{Im}(T)^\perp$, on a :

$$0 = \langle v, Tv \rangle = a(v,v) \geqslant m \|v\|^2 \geqslant 0 \text{ donc } v = 0 \ (\Leftrightarrow \|Tv\| \geqslant m \|v\|)$$

Permé: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Im}\, T$ tel que $v_n \to v$.

On a $v_n = Tu_n$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle est de Cauchy et bornée.

$$\|u_n - u_m\|\,\|v_n - v_m\|\,M \geq \langle u_n - u_m, Tu_n - Tu_m\rangle = a(u_n - u_m, u_n - u_m) \geq m\|u_n - u_m\|^2$$

Or par injectivité de T, $u_n = u_m \Leftrightarrow v_n = v_m$ donc on a:

$$\frac{M}{m}\|v_n - v_m\| \geq \|u_n - u_m\|$$

Ainsi (u_n) est de Cauchy donc converge vers $u\in H$, et par continuité de T, unicité de la lim $Tu = v$.

On a donc $T: H \to H$ bijective, par le théorème d'isomorphisme de Banach, T^{-1} est continue.

Etape 5: Soit $\ell \in H'$, par Riesz il existe un unique $w\in H$ tq

$$\forall v\in H,\ \langle w, v\rangle = \ell(v)$$

i.e $\forall v\in H,\ \langle T(T^{-1}w), v\rangle = \ell(v)$

i.e $\forall v\in H,\ a(T^{-1}w, v) = \ell(v)$.

i.e $\forall v\in H,\ a(u, v) = \ell(v)$ où $u = T^{-1}w$ (unique car $Tu = w$ unique).

Etape 6: On suppose de plus a symétrique.

On considère la fonctionnelle:

$$\mathcal{J}: H \to \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u)$$

$\mathcal{J}$ est $\mathcal{C}^1$ strictement convexe, ainsi:

u minimise $\mathcal{J} \Leftrightarrow d_u\mathcal{J} = 0 \Leftrightarrow \forall v\in H,\ d_u\mathcal{J}.v = 0 \Leftrightarrow \forall v\in H,\ a(u,v) - \ell(v) = 0$ (↔ sym.)

Donc $\mathcal{J}$ admet un unique minimisateur qui est la solution.

Rmq: En dimension 1, à chaque fois qu'on utilisera Lax-Milgram on pourra se ramener à Riesz ce qui n'est pas le cas en dim supérieure.

Proposition: Soit a une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive sur $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ alors a est un ps sur H et $\sqrt{a(\cdot,\cdot)}$ est une norme équivalente à $\|.\|_H$ donc $(H, a(\cdot,\cdot))$ est un Hilbert.

Preuve: a bilinéaire, sym, définie positive car $a(u,u) \geq m\|u\|^2$ et $\sqrt{M}\|u\| \geq \sqrt{a(u,u)} \geq \sqrt{m}\|u\|$ d'où le résultat

2. Résolution edp linéaire

Problème 1: (Problème de Sturm-Liouville avec condition de Dirichlet homogène).

On regarde le pb : ① $\begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u = f \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$

Rmq : Si $\alpha = 1$, $\beta = 1$ on peut résoudre explicitement ① (voir toute fin du document)

Définition : Solution faible.

On dit que $u \in H_0^1(0,1)$ est une solution faible si :

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \quad \int_0^1 \alpha\, u' v' + \beta\, u v = \int_0^1 v$$

Rmq : Toute solution classique de ① est une solution faible.

Théorème : Soit $f \in L^2(0,1)$, $\alpha \in L^\infty(0,1)$ et $\beta \in L^\infty(0,1)$ tel que :

$$0 < \alpha_{min} \leq \alpha(x) \quad \text{pour presque tous } x \in]0,1[$$
$$0 \leq \beta(x)$$

Alors ① possède une unique solution faible $u \in H_0^1(I)$.

Si $\alpha \in \mathcal{C}^1(0,1)$, $\beta \in \mathcal{C}(0,1)$ et $f \in \mathcal{C}(0,1)$ alors u est l'unique solution forte.

Preuve :

On pose $a : H_0^1 \times H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell : H_0^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(u,v) \longmapsto \int_0^1 \alpha\, u'v' + \beta\, uv \qquad v \longmapsto \int_0^1 fv$$

ℓ est une forme linéaire continue par EVS car $v, f \in L^2(0,1)$.

- a est bien définie car $\alpha, \beta \in L^\infty(0,1)$ et par EVS car $u, u', v, v' \in L^2(0,1)$.
- a est continue car :

$$|a(u,v)| \leq \|\alpha\|_{L^\infty} \int_0^1 |u'v'| + \|\beta\|_{L^\infty} \int_0^1 |uv|$$

$$\leq \|\alpha\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|\beta\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$\leq \left(\|\alpha\|_{L^\infty} + \|\beta\|_{L^\infty}\right) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$

- a est coercive :

$$a(u,u) = \int_0^1 \alpha (u')^2 + \beta (u)^2$$
$$\geq \alpha_{min} \int_0^1 (u')^2 \geq \frac{\alpha_{min}}{C^2} \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{par poincaré.}$$

De plus a est clairement une forme bilinéaire symétrique i.e par Riesz.

$$\exists! u \in H^1_0,\ a(u,v) = \ell(v)\ \forall v \in H^1_0.$$

i.e il existe une unique solution faible de plus u minimise $v \mapsto \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$.

De plus $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(0,1)$, $\int_0^1 (\alpha u')\varphi' + \beta u \varphi - f\varphi = 0$

donc $(\alpha u')' = f - \beta u \in L^2 \Rightarrow \alpha u' \in H^1(0,1)$

Rmq: $\beta \in L^\infty(0,1) \subset L^2(0,1)$.

Si $\alpha \in \mathcal{C}^1(0,1)$ alors $u' = \frac{1}{\alpha}\alpha u' \in H^1(0,1)$ donc $u \in H^2$

Étape 2: Si $\alpha \in \mathcal{C}^1(0,1)$, $\beta \in \mathcal{C}(0,1)$ et $f \in \mathcal{C}(0,1)$ alors $\alpha \in H^1$.

On a $u \in H^1(0,1)$ donc u continue

$u' \in H^1(0,1)$ donc u' continue

Rt $-\alpha u'' + \alpha' u' + \beta u = f$ donc $u'' = \frac{-1}{\alpha}\left(f - \alpha' u' + \beta u\right) \in \mathcal{C}(0,1)$.

$\widetilde{\in \mathcal{C}(0,1)}$ $\quad \underbrace{\in \mathcal{C}(0,1)}$

$u'' = -f(x) - g(x)u(x)$

$\mathcal{C}^\infty \quad \mathcal{C}^\infty \quad \mathcal{C}^1$

Ainsi $u \in \mathcal{C}^2(0,1)$ et est une solution forte.

De plus comme toute solution forte est faible u est l'unique solution forte

Problème 2: (Sturm - Liouville plus générale)

On regarde $\begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

On suppose $\alpha \in L^\infty(0,1)$, $\beta \in H^1(0,1)$, $\gamma \in L^\infty(0,1)$ et $f \in L^2(0,1)$ avec:

$\alpha(x) \geq \alpha_{min} > 0$ p.p

et $\gamma_{min} - \frac{\beta_{max}}{2} \geq 0$ $\quad \beta' \in L^\infty$ et $\|\beta\|_{L^\infty} = \beta_{max}$ p.p

$\gamma(x) \geq \gamma_{min} \geq 0$ p.p

Rmq: $\beta \in H^1(0,1) \Rightarrow \beta \in \mathcal{C}([0,1])$

$\Rightarrow \beta \in L^\infty(0,1)$

Définition: Solution faible

Soit $u \in H^1_0(I)$ est une solution faible si

$$\forall v \in H^1_0(I),\ \int_0^1 \alpha u'v' + \beta u'v + \gamma uv = \int_0^1 fv.$$

On propose de montrer l'existence et l'unicité par 2 méthode, Riesz et Lax-Milgram. Dans les deux cas on considère la forme linéaire continue sur H^1_0:

$$\ell : H^1_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto \int_0^1 fv$$

Lax-Milgram :

On définit la forme bilinéaire sur H^1_0 par :

$$a : H^1_0 \times H^1_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto \int_0^1 \alpha u'v' + \beta u'v + \gamma uv$$

a est bien def car $\alpha, \beta, \gamma \in L^\infty(0,1)$ et $u', v', u, v \in L^2(0,1)$.

Il nous faut montrer que a est continue et coercive.

Continue : Pour $u, v \in H^1_0(0,1)$.

$$|a(u,v)| \leq \|\alpha\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|\beta\|_{L^\infty} \|u'\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

IPP dans $H^1(0,1)$

Coercive : Pour $u \in H^1_0(0,1)$

$$a(u,u) = \int_0^1 \alpha (u')^2 + \int_0^1 \beta u'u + \int_0^1 \gamma u^2$$

$$\geq \alpha_{min} \int_0^1 (u')^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \beta' u^2 + \gamma_{min} \int_0^1 u^2$$

$$\geq \alpha_{min} \|u'\|^2_{L^2} - \frac{\beta'_{max}}{2} \|u\|^2_{L^2} + \gamma_{min} \|u\|^2_{L^2}$$

$$\geq \alpha_{min} \|u'\|^2_{L^2} \geq \frac{\alpha_{min}}{C^2} \|u\|^2_{H^1}$$

Rmq : $\beta \in H^1(0,1)$ et $u^2 \in H^1(0,1)$ avec $(u^2)' = 2u'u$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \beta' u^2 = \frac{1}{2}(\beta(1)u^2(1) - \beta(0)u^2(0)) - \int_0^1 \beta u'u.$$

$$= - \int_0^1 \beta u'u.$$

↓ $\gamma_{min} - \frac{\beta'_{max}}{2} \geq 0$

On applique le théorème de Lax-Milgram avec a et ℓ, ce qui nous donne l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Rmk : On a $\alpha(x) \geq \alpha_{min} > 0$ p.p et $\beta \in H^1(0,1) \subset L^1(0,1)$ donc

$$R = \int_0^x \frac{\beta}{\alpha} \in \mathcal{C}(0,1)$$ par un lemme déjà vue.

Et on pose $\varphi = \exp(-R) \in \mathcal{C}(0,1)$, on a alors formellement $\varphi'\alpha + \varphi\beta = 0$ i.e on regarde donc le problème : $\begin{cases} -(\varphi\alpha u')' + \varphi\beta u = \varphi f \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$

On pose donc : $a : H^1_0 \times H^1_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v) \longmapsto \int_0^1 \varphi\alpha u'v' + \varphi\beta uv$

$\ell : H^1_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \int_0^1 \varphi f u$

Il est clair que $\varphi f \in L^2(0,1)$ donc ℓ linéaire continue et a bien définie car $\varphi\alpha \in L^\infty$, $\varphi\gamma \in L^\infty$.

De plus $\varphi\alpha(x) \geq \alpha_{min} > 0$ ainsi d'après le cas précédent on a le résultat voulu par $\varphi\gamma \geq 0$ le théorème de Riesz.

Soit $u \in H^1_0(0,1)$ l'unique solution en particulier $u \in H^2(0,1)$

Si de plus $\beta \in \mathcal{C}([0,1])$ alors $R \in \mathcal{C}^1(0,1)$, i.e $\varphi \in \mathcal{C}^1(0,1)$ ainsi $\varphi\alpha u' \in H^1(0,1)$.
$\alpha \in \mathcal{C}^1([0,1])$ $\varphi' = -\frac{\beta}{\alpha}\exp(-\frac{\beta}{\alpha}) \Rightarrow \varphi'\alpha + \varphi\beta = 0$

Donc $u' = \frac{1}{\varphi\alpha}\varphi\alpha u' \in H^1(0,1)$ donc $u \in H^2(0,1)$.

En particulier dans L^2, $\varphi f = -(\alpha u')'\varphi - \varphi'\alpha u' + \varphi\gamma u$
$= \left[-(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u\right]\varphi$.

Or $\varphi \neq 0$ donc dans L^2, $f = -(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u$.

Et si $f \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$.

L'objectif maintenant va être de voir ce qu'il se passe lorsque l'on change les conditions aux limites, on ne donnera pas tout les détails mais seulement les idées importantes.

Problème 3: (Condition de Dirichlet non homogène)

On considère le problème pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u' + \gamma u = f \\ u(0) = a, \; u(1) = b. \end{cases}$$

On prend u_0 une fonction régulière telle que $u_0(0) = a$, $u_0(1) = b$ (par exemple une application affine) on fait le changement de variable $\tilde{u} = u - u_0$ dans ① ainsi $\tilde{u}$ doit vérifier

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} -(\alpha \tilde{u}')' + \beta \tilde{u}' + \gamma \tilde{u} = f + (\alpha u_0')' - \beta u_0' - \gamma u_0 \\ \tilde{u}(0) = 0, \; \tilde{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Or on sait résoudre ② avec les bonnes hypothèses sur ρ, q, r et f. Et on considère simplement

$$u = \tilde{u} + u_0.$$

Problème 4: (Condition de Neumann homogène)

On considère le problème suivant $\begin{cases} -(\alpha u')' + \gamma u = f \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$

Si u est une solution classique alors

$$\forall v \in H^1(0,1), \quad \int_0^1 \alpha u' v' + \gamma u v = \int_0^1 v f.$$

On travaille alors dans le Hilbert $H^1(0,1)$, et non $H_0^1(0,1)$ car $u(0)$ et $u(1)$ ne sont pas connus. On applique le théorème de Riesz à la forme bilinéaire et au forme linéaire:

$$a : H^1 \times H^1 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \varphi : H^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u, v \longmapsto \int_0^1 \alpha u' v' + \gamma u v \qquad v \longmapsto \int_0^1 f v$$

(Il nous faut minorer strictement au dessus de 0 α et γ pour que a soit un p.s équivalent à $H^1(0,1)$).

On obtient ainsi une unique solution de $u \in H^1$ tel que:

$$\forall v \in H^1(0,1), \quad \int_0^1 \alpha u' v' + \gamma u v = \int_0^1 f v \qquad (*)$$

Si on suppose assez de régularité sur α et γ (par exemple $\mathcal{C}^1(0,1)$) et $f \in L^2(0,1)$ alors $(*)$ nous donne avec $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(0,1)$: $(\alpha u') \in H^1(0,1)$ et $(\alpha u')' = f - \gamma u$ dans L^2

Ainsi $u' = \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{\in \mathcal{C}^1} \cdot \underbrace{\alpha u'}_{\in H^1(0,1)} \in H^1(0,1)$ donc $\underline{u \in H^2(0,1)}$

De plus $(*)$ nous donne pour $v \in H^1(I)$

$$\int_0^1 \alpha u' v' + \int_0^1 \gamma u v - \int_0^1 f v = 0$$

IPP donc $-\int_0^1 (\alpha u')' v + \alpha(1) u'(1) v(1) - \alpha(0) u'(0) v(0) + \int_0^1 \gamma u v - \int_0^1 f v = 0$

donc $$\int_0^1 \left(-(\alpha u')' + \gamma u - f \right) v = \alpha(0) u'(0) v(0) - \alpha(1) u'(1) v(1).$$

Or $-(\alpha u')' + \gamma u - f = 0$ dans L^2 donc $\alpha(0) u'(0) v(0) = \alpha(1) u'(1) v(1)$. $\forall v \in H^1(0,1)$

Si on suppose de plus $\alpha(0) \neq 0$, $\alpha(1) \neq 0$ alors $\alpha(0) v(0)$ et $\alpha(1) v(1)$ étant arbitraire on obtient:

$$u'(0) = u'(1) = 0.$$

Problème 5: (Condition de Neumann non homogène).

On regarde le problème suivant pour $a, b \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} -(\alpha u')' + \gamma u = f \\ u'(0) = a, \ u'(1) = b \end{cases}$

Première méthode :

Soit u_0 assez régulière telle que $u'(0) = a$, $u'(1) = b$ et on fait le changement de variable $\hat{u} = u - u_0$, ainsi $\hat{u}$ vérifie :

$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \gamma u = f + (\alpha u_0')' - \gamma u_0 \\ \hat{u}'(0) = 0, \ \hat{u}'(1) = 0 \end{cases}$$

Que l'on sait résoudre avec les bonnes conditions sur α, γ et f ainsi on a l'unique solution en prenant : $u = \hat{u} + u_0$.

Deuxième Méthode :

Si u est une solution classique, on a par IPP :

$$\forall v \in H^1(0,1), \ \int_0^1 \alpha u' v' + \int_0^1 \gamma u v = \int_0^1 (fv) - a\, v(0) + b\, v(1)$$

On applique donc Riesz avec la forme bilinéaire et la forme linéaire :

$$a : H^1 \times H^1 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \quad \varphi : H^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto \int_0^1 \alpha u' v' + \int_0^1 \gamma u v \qquad v \longmapsto \int_0^1 (fv) - a\, v(0) + b\, v(1).$$

Par cela il nous faut une minoration > 0 pour α et γ et pour on utilise que pour $v \in H^1$ on a la relation : $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1(0,1)}$.

On procède comme dans le problème homogène pour montrer que $u \in H^2(0,1)$ et $u(0) = a$, $u'(1) = b$.

Problème 6 : (Conditions aux limites mêlées).

On regarde le problème : $\begin{cases} -(\alpha u')' + \gamma u = f \\ u(0) = 0, \ u'(1) = 0 \end{cases}$

Si u est une solution classique :

$$\int_0^1 \alpha u' v' + \int_0^1 \gamma u v = \int_0^1 fv \ , \ \forall v \in H^1(0,1) \text{ tq } v(0) = 0.$$

On applique donc Riesz dans le Hilbert (car fermé dans $H^1(0,1)$) :

$$H = \{ v \in H^1(0,1) \mid v(0) = 0 \}$$

On obtient l'existence et l'unicité d'une sol. faible $u \in H^2(0,1)$.

Rmq: Si on regarde $u(0)=a$, $u'(1)=b$ $(a,b \in \mathbb{R})$ on regarde l'edp vérifié par $\tilde{u} = u - u_0$ où u_0 est une fct assez régulière vérifiant $u_0(0)=a$, $u'(0)=b$.

Problème 7: ("Troisièmes" conditions avec limites)

On regarde le problème : $\begin{cases} -(\alpha u')' + \gamma u = f \\ u'(0) = h\,u(0),\ u(1) = 0 \end{cases}$ $(h \in \mathbb{R})$.

Si u est une solution classique par IPP :

$$\int_0^1 \alpha u' v' + \int_0^1 \gamma u v + h\,u(0)v(0) = \int_0^1 f v \quad , \forall v \in H^1 \text{ avec } v(1)=0$$

On applique donc le théorème de Riesz dans le Hilbert (convenu)

$$H = \{ v \in H^1(0,1) \mid v(1) = 0 \}$$

A la forme bilinéaire, continue et la forme linéaire continue.

$$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \ell : H \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u, v \longmapsto \int_0^1 (\alpha u'v' + \gamma uv) + h\,u(0)v(0) \qquad v \longmapsto \int_0^1 fv.$$

(qui est coercive dès que $h \geq 0$).

Problème 8: (Condition avec limites périodique).

On considère le problème : $\begin{cases} -(\alpha u')' + \gamma u = f \\ u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$

Si u est une solution classique on a :

$$\int_0^1 \alpha u' v' + \int_0^1 \gamma u v = \int_0^1 f v \quad \forall v \in H^1(0,1) \text{ avec } v(0) = v(1).$$

On applique donc Riesz dans le Hilbert (convenu) :

$$H = \{ v \in H^1(0,1) \mid v(0) = v(1) \}$$

Puis on montre la régularité de u comme dans les problèmes 4 et 5

III - Principe du maximum et décomposition spectrale

1. Principe du maximum

Théorème : Soit $f \in L^2(0,1)$ et $u \in H^2(0,1)$ l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

Alors on a,

$$\forall x \in]0,1[, \quad \min(\alpha, \beta, \inf f) \leq u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, \sup f\}$$

Rmq : Pour $f \in L^2(0,1)$, $\sup f = \inf\{C ; f(x) \leq C \text{ p.p}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\inf f = \sup\{C ; f(x) \geq C \text{ p.p}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Preuve : On utilise la méthode de la troncature de Stampacchia. On sait que :

$$\forall v \in H^1_0(0,1), \int_0^1 u'v' + uv = \int_0^1 fv$$

On fixe $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que :

1. G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
2. $G(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, 0]$.

Soit $K = \max\{\alpha, \beta, \sup f\}$, ops que $K < +\infty$ et montrons que $u \leq K$ p.p.

Soit $v = G \circ (u - K) \in H^1(0,1)$ et de plus $v \in H^1_0(0,1)$:

$$u(0) - K = \alpha - K \leq 0 \quad \text{et} \quad u(1) - K = \beta - K \leq 0$$

$$\Rightarrow G(u(0) - K) = 0 \qquad \Rightarrow G(u(1) - K) = 0$$

Ainsi comme $v' = u' G'(u - K)$ (comme sur la dérivée de f° composé dans H^1 pas montrer ici) et donc :

$$\int_0^1 u'^2 G'(u-K) + \int_0^1 u\, G(u-K) = \int_0^1 f\, G(u-K)$$

ainsi $$\int_0^1 u'^2 G'(u-K) + \int_0^1 (u-K) G(u-K) = \int_0^1 (f-K) G(u-K)$$

or $(f-K) \leq 0$, $G(u-K) \geq 0$ et $G'(u-K) \geq 0$ donc

$$\int_0^1 (u-K) G(u-K) \leq 0$$

Et comme $t G(t) \geq 0 \Rightarrow \int_0 t G(t) \geq 0$ ainsi on sait que $(u-K) G(u-K) = 0$ p.p.

Ainsi $G(u-K)=0$ p.p donc $u \leq K$.
L'autre inégalité s'obtient en considérant $-u$.

Rmq: Si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ on a une autre preuve.
On note $x_0 \in [0,1]$ le point où u est maximal sur $[0,1]$. Si $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$ on a $u \in K$.
Sinon $0 < x_0 < 1$, alors $u'(x_0) = 0$, $u''(x_0) \leq 0$ ainsi comme $-u'' + u = f$ on a:

$$u(x_0) = f(x_0) + u''(x_0) \leq f(x_0) \in K.$$

d'où le résultat.
(Cette méthode s'étend aux problèmes de Sturm-Liouville généraux).

Corollaire: Soit $u \in H^2(0,1)$ l'unique solution:
i) Si $u \geq 0$ sur $\{0,1\}$ et si $f \geq 0$ sur I alors $u \geq 0$ sur $[0,1]$.
ii) Si $u = 0$ sur $\{0,1\}$ et si $f \in L^\infty(0,1)$ alors $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$
iii) Si $f = 0$ sur I alors $\|u\|_\infty \leq \max\{u(0), u(1)\}$.

Rmq: On a pour des condition de Neumann i.e $\begin{cases} -u'' + u = f \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$
alors

$$\forall x \in [0,1], \quad \inf f \leq u(x) \leq \sup f$$

2- Décomposition spectrale

On considère le problème suivant: $\begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u = f \quad (D) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$

Avec $\alpha \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $\beta \in \mathcal{C}([0,1])$ avec $\beta > 0$ p.p et $\alpha(x) \geq \alpha_{min} > 0$ (i.e le problème de Sturm Liouville)
On sait que pour $f \in L^2(0,1)$, on a existence et unicité de la solution faible dans $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$. On note donc T l'opé qui associe à $f \in L^2(0,1)$, l'unique solution faible de (D):

$$T : L^2(0,1) \longrightarrow H^2(0,1) \subset L^2(0,1)$$
$$f \longmapsto u$$

L'objectif va être d'étudier les propriétés spectrales.
Rmq: Par unicité de u, T est injectif.

Proposition: T est un opérateur continue compact de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$.

Preuve: On montre le caractère continue de T, pour $\|.\|_{L^2}$.

Soit $f \in L^2$, on a:

$$\alpha_{min} \int_0^1 u'^2 \leq \int_0^1 \alpha u'^2 + \int_0^1 p u^2 = \int_0^1 f u \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H^1}$$

Or par Poincaré on sait que $\|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{C^2} \|u\|_{H^1}^2$, ainsi $\|u\|_{H^1} \|f\|_{L^2} \geq \frac{\alpha_{min}}{C^2} \|u\|_{H^1}^2$.

$$\|Tf\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \leq \frac{C^2}{\alpha_{min}} \|f\|_{L^2}.$$

Ainsi T est continue est continue.

Mq T est compact:

Méthode 1: En utilisant les prop des opés compact.

On a $H^1(0,1) \xhookrightarrow[\text{injection compact}]{} \mathcal{C}(0,1)$ donc:

$$T: L^2(0,1) \xrightarrow{\text{bornée}} H^1(0,1) \xrightarrow{\text{compact}} \mathcal{C}(0,1) \subset L^2(0,1)$$

(on regarde $\mathcal{C}(0,1)$ comme une partie de $L^2(0,1)$ et l'injection étant triviale cette def de T à un sens).

Ainsi $T = \underbrace{K}_{\text{compact}} \circ \underbrace{S}_{\text{continue}}$ or l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal bilatère donc T compact

Méthode 2: à la main.

Soit B un bornée de $L^2(0,1)$, donc $T(B)$ est un bornée de $H^1(0,1)$ car on a montré que:

$$\|u\|_{H^1} \leq \frac{C^2}{\alpha_{min}} \|f\|_{L^2}.$$

On note $K = T(B)$ qui est donc bornée dans $H^1(0,1)$ et soit $M > 0$ tq $\forall u \in K$, $\|u\|_{H^1} \leq K$.

On a alors,

$$\forall u \in K, \quad |u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |u'| \, dx \overset{CVS}{\leq} \|u'\|_{L^2} |y-x|^{1/2} \leq K |y-x|^{1/2}$$

et

$$\forall x \in [0,1], \forall u \in K, \quad |u(x)| \leq \|u\|_\infty \leq \|u\|_{H^1} \leq K$$

Ainsi comme $K \subset \mathcal{C}([0,1])$ en utilisant le théorème d'Ascoli, on que K est compact dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty)$

Or pour $u \in L^2(0,1)$, $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_\infty$.

Donc en regardant la caractérisation séquentielle de la compacité $K = T(B)$ est un compact dans $(L^2(0,1), \|.\|_{L^2})$.

Maintenant on s'intéresse aux propriétés géométriques.

Proposition : T est un opérateur autoadjoint.

Preuve : Il faut montrer que :

$$\forall f, g \in L^2(0,1), \quad \int_0^1 (Tf)\, g = \int_0^1 f\,(Tg).$$

On note $u = Tf$ et $v = Tg$ alors

$$\int_0^1 (Tf)\, g = \int_0^1 ug = \int_0^1 \alpha u'v' + \int_0^1 \beta uv = \int_0^1 fv = \int_0^1 (Tg).$$

Donc T est autoadjoint. ∎

On peut donc utiliser le théorème suivant pour diagonaliser T qui est la généralisation du théorème spectrale.

Théorème : Soit H un Hilbert séparable et T un opérateur autoadjoint compact. Il existe $(e_n)_{n\geq 1}$ une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T et si on note $(\mu_n)_{n\geq 1}$ les valeurs-propres ops $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Preuve : On ne la fait pas ici car elle demande trop d'ingrédient mais on la trouve p.97 du Brézis, Analyse fonctionnelle.

On peut donc conclure en annonçant le théorème suivant.

Théorème : Il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs et une base Hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(0,1)$ telles que $e_n \in \mathcal{C}^2(I)$ et :

$$\begin{cases} -(\alpha e_n')' + \beta e_n = \lambda_n e_n \\ e_n(0) = e_n(1) = 0 \end{cases}$$

Avec $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Les $(e_n)_{n\geq 1}$ sont les fonctions propres de l'opérateur $Au = -(\alpha u')' + \beta u$.

Preuve : D'après le théorème spectrale on note $(e_n)_{n\geq 1}$ la base de vp de T et (μ_n) les valeurs propres associées.

Montrons que $\mu_n > 0$:

Comme T injectif, $\ker(T)=\{0\}$ donc 0 n'est pas valeurs propres de T ainsi $\mu_n \neq 0$. Deplus avec $u_n = Te_n$:

$$\mu_n \int_0^1 e_n^2 = \int_0^1 (Te_n)e_n = \int_0^1 \alpha (u_n')^2 + \int_0^1 \beta u_n^2 \geq 0.$$

Donc $\mu_n > 0$.

Montrons que $e_n \in \mathcal{C}^2([0,1])$. On sait comme $\mu_n e_n = T(e_n)$ que $e_n \in H_0^1(0,1) \subset L^2(0,1)$ et de plus e_n vérifie le pb suivant : $\begin{cases} -\mu_n (\alpha e_n')' + \mu_n \beta e_n = e_n \\ e_n(0) = e_n(1) = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} -(\alpha e_n')' + \beta e_n = \lambda_n e_n \\ e_n(0) = e_n(1) = 0 \end{cases}$

Où $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} > 0$, or $\lambda_n e_n \in L^2(0,1)$ donc comme on l'a vue e_n est une solution forte donc $e_n \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et :

$$\begin{cases} -(\alpha e_n')' + \beta e_n = \lambda_n e_n \\ e_n(0) = e_n(1) = 0. \end{cases}$$

Avec $(e_n)_{n\geq 1}$ base hilbertienne de $L^2(0,1)$, $e_n \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et $\lambda_n > 0$ avec $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (car $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

Rmq : On a le même résultat si β n'est pas positif en considérant le même problème avec

$$\tilde{\beta} = \beta + c$$

où c est une constante tel que $\tilde{\beta} = \beta + c > 0$.

Rmq : Si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ on regarde le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Dont les fonctions propres sont $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$ avec $\lambda_n = n^2\pi^2$.

Rmq : En réalité on connaît plus de propriétés sur les $(e_n)_{n\geq 1}$ et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$.

1) $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ sont les valeurs propres de $Au = -(\alpha u')' + \beta u$ et elles sont de multiplicité 1.

2) Si on range par ordre croissant les $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ alors e_n associé à λ_n possède exactement $(n-1)$ zéros sur $]0,1[$.

3) Le quotient $\frac{\lambda_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} c$ où c est une constante > 0.

Le fait qu'importe α et β, $(e_n, \lambda_n)_{n\geq 0}$ se comporte comme $(\sqrt{2}\sin(n\pi x), n^2\pi^2)_{n\geq 1}$, i.e le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

Rmq: On peut montrer aussi que $T: L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, en particulier on peut donc l'écrire comme un opérateur à noyau i.e il existe $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$ telle que:

$$T: L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$$
$$f \longmapsto Tf: x \longmapsto \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$

i.e pour tout $f \in L^2(0,1)$, $Tf(x) = u(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$ (dans $L^2(0,1)$).

IV. Minimisation d'une fonctionnelle convexe et edp elliptique non linéaire en dim 1

ref: Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation

L'objectif va être de minimiser une fonction convexe pour résoudre l'edp elliptique non linéaire:

où pention ≥ 1.

$$\begin{cases} -u''(x) + |u(x)|^p u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Pour cela on va avoir besoin de résultat sur la topologie faible dans les Hilbert et la minimisation de fonctionnelle convexes.

Outils:

Pour la topologie faible, on va seulement démontrer le théorème de Banach-Alaoglu, pour les autres résultats voir le Hirsh-Lacombe ou le cours de Karine Beauchard ou d'ANAF de M1. On trouvera les preuves suivantes dans le cours de Karine Beauchard et c'est un dl pt sur le site de Laurent Monteiguet. Pour la partie optimisation voir le Ciarlet.

Théorème: (Banach-Alaoglu)

Soit H un Hilbert et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement i.e il existe $f \in H$ tel que:

$$\forall g \in H, \quad \langle f_{\varphi(n)}, g \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle f, g \rangle$$

Preuve : On note $M>0$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|\leq M$.

Hyp: $\exists \psi$ une extractrice, $f\in H$ tel que $\langle f_{\psi(n)}, g\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle$ $(\forall g\in H)$.

Cas 1: H séparable

Soit $D=\{h_k, k\in\mathbb{N}\}$ une partie dense et dénombrable de $(H,\|.\|)$. On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que H est un $\mathbb{K}$-hilbert

Etape 1: Extraction diagonale sur D.

Par Cauchy-Schwartz, $(\langle f_n, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$ donc il existe une extractrice φ_0 tel que $(\langle f_{\varphi_0(n)}, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.

« De même $(\langle f_n, h_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$ donc il existe une extractrice φ_1 tel que $(\langle f_{\varphi_1(n)}, h_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$

Par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$, pour tout $k\in\mathbb{N}$ il existe une extractrice φ_k tel que.

$$(\langle f_{\varphi_k(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{K}.$$

En prenant, l'extractrice $\psi(n)=\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_n(n)$ on a pour tout $k\in\mathbb{N}$ que :

$$(\langle f_{\psi(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{K}.$$

Etape 2: Montrons que pour tout $g\in H$, $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.

Soit $g\in H$, montrons que $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ ce qui nous donnera ce que l'on veut.

Soit $\varepsilon>0$, par densité de D, il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tq $\|g-h_{k_0}\|\leq \frac{\varepsilon}{2M}$

$(\langle f_{\psi(n)}, h_{k_0}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ ainsi soit $n_0\in\mathbb{N}$ tq :

$$\forall p>q\geq n_0,\ |\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, h_{k_0}\rangle|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi pour $p\geq q\geq n_0$,

$$|\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, g\rangle|\leq|\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, h_{k_0}\rangle|+|\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, h_{k_0}-g\rangle|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\|f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}\|\,\|h_{k_0}-g\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

d'où le résultat.

On note donc $L: H\longrightarrow \mathbb{K}$ qui est linéaire.

$$g\longmapsto \lim_{n\to\infty}\langle f_{\psi(n)}, g\rangle$$

Etape 3: Montrons que L est continue et utilisons le théorème de Riesz.

On a pour $g \in W$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\langle f_{\psi(n)}, g \rangle| \leq \|f_{\psi(n)}\| \|g\| \leq M \|g\|.$$

Ainsi $\|L(g)\| \leq M \|g\|$.

Par le théorème de Riesz, il existe $f \in H$ telle que:

$$\forall g \in H, \quad \langle f, g \rangle = L(g) = \lim_{n \to +\infty} \langle f_{\psi(n)}, g \rangle.$$

d'où le résultat.

Cas 2: H non séparable.

On se place dans $F = \text{Vect}\{f_n ; n \in \mathbb{N}\}$ qui est un sev fermé de H donc F est un Hilbert séparable.

De plus on a: $H = F \oplus F^\perp$.

Par le cas précédent $\exists \psi$ extractrice et $f \in F$ telle que pour tout $g \in F$:

$$\langle f_{\psi(n)}, g \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle f, g \rangle$$

Soit $g \in H$ alors $g = \underbrace{g_F}_{\in F} + \underbrace{g_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$ et on a:

$$\langle f_{\psi(n)}, g \rangle = \langle f_{\psi(n)}, g_F \rangle + \underbrace{\langle f_{\psi(n)}, g_{F^\perp} \rangle}_{=0} \longrightarrow \langle f, g_F \rangle = \langle f, g \rangle \quad \text{car } f \in F.$$

d'où le résultat

□

On va donc pouvoir démontrer la proposition qui nous sera utile.

Proposition: Soit $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, convexe et coercive i.e:

$$J(h) \xrightarrow[\|h\| \to +\infty]{} +\infty \quad (\forall A > 0, \exists R > 0, \forall h \in H, \|h\| > R, J(h) \geq A).$$

Alors $\exists x_* \in H$ tq $J(x_*) = \inf_{x \in H} J(x)$

Rmq: Cette proposition est l'équivalent dans le cas non linéaire du théorème de Lax-Milgram dans le cas linéaire. En effet dans le cas l'objectif est de minimiser une fonctionnelle sur H, ici et $x \longmapsto \frac{1}{2} a(x,x) - \varphi(x)$ pour Lax-Milgram. Pour plus de détail dans le Brézis on montre que

Lax-Milgram est un corollaire du théorème de Stampacchia qui est un théorème de minimisation sur un Hilbert.

Preuve: On considère une suite minimisante $(x_n)_{n\geq 1}$ tq:

$$J(x_n) \longrightarrow \inf_{x\in H} J(x).$$

Montrons que cette suite est bornée.

Supposons l'inverse alors il existe ψ tel que, $\|x_{\psi(n)}\| \longrightarrow +\infty$ donc

$$J(x_{\psi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad J \text{ coercive.}$$

Ainsi $\inf_{x\in H} J(x) = +\infty$, Absurde

Ainsi d'après Banach Alaoglu, il existe une extractrice ψ tel que:

$$x_{\psi(n)} \longrightarrow x^* \in H.$$

Montrons que $J(x^*) = \inf_{x\in H} J(x)$:

On fixe $\alpha > \inf_{x\in H} J(x)$ et on pose:

$$C_\alpha = J^{-1}(]-\infty, \alpha])$$

C_α est non vide par choix de α et fermé car J continue. De plus par convexité de J, C_α est convexe, en effet:

$$\forall x, y \in C_\alpha, t\in[0,1], \quad J(x+t(x-y)) \leq tJ(x) + (1-t)J(y) \leq \alpha$$

Or à partir d'un certain rang N, $\forall n \geq N$, $x_{\psi(n)} \in C_\alpha$, montrons que $x^* \in C_\alpha$.

(i.e que C_α est faiblement séquentiellement fermé)

On note Π_α la projection sur C_α (bien def car C_α est fermé convexe non vide), D'après les propriétés des angles obtus, on a:

$$\forall n \geq N, \quad \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), x_{\psi(n)} - \Pi_\alpha(x^*)\rangle \leq 0$$

$$\forall n \geq N, \quad \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), x_{\psi(n)}\rangle - \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), \Pi_\alpha(x^*)\rangle \leq 0$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), x^*\rangle - \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), \Pi_\alpha(x^*)\rangle \leq 0$$

donc $\|x^* - \Pi_\alpha(x^*)\|^2 \leq 0$

Ainsi $x^* = \Pi_\alpha(x^*)$ donc $x^* \in C_\alpha$ ainsi pour tout $\alpha > \inf_{x\in H} J(x)$

$$\alpha \geq J(x^*) \geq \inf_{x\in H} J(x)$$

Ainsi on a $x^* \in H$ tel que : $J(x^*) = \inf_{x \in H} J(x)$.

Rmq : * Pour J la continuité intervient seulement pour montrer que $J^{-1}(]-\infty, \alpha]$ est fermé fortement. Ainsi on peut appauvrir l'hypothèse sur J et ainsi supposer J seulement semi-continue inférieurement i.e : $\forall a \in \mathbb{R}$, $J^{-1}(]a, +\infty[)$ est un ouvert (fort) $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$, $J^{-1}(]-\infty, a])$ est un fermé (fort) (Je pense même que faiblement semi-continue inférieurement).

* On considère C_α un convexe fermé car on a un résultat général :

Soit C un convexe non vide d'un Hilbert alors K est fermé fortement (pour $\|.\|_H$) ssi il est fermé faiblement.

Ceci donne que C_α est fermé faiblement donc $x^* \in C_\alpha$ $(\forall \alpha)$.

* Si J est supposé différentiable alors pour montrer que :

$$J(x^*) = \inf_{x \in H} J(x).$$

On peut utiliser que :

$$J(x_{\eta(x_n)}) \geq J(x_n) + \langle \nabla J(x^n), x_{\eta(n)} - x_n \rangle \quad (J \text{ convexe + diff})$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_{x \in H} J(x) \geq J(x^*).$$

Résolution d'une edp elliptique non linéaire

On considère le problème non linéaire suivant ($p \geq 1$) :

$$\begin{cases} -u'' + |u|^{p-1}u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Théorème : Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p \geq 1$.

* Il existe une unique fonction $u \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$ telle que : $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$
* Si $f \in C^0([0,1])$ alors $u \in C^2([0,1])$ et est une sol classique i.e :

$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(x) + |u|^{p-1}(x)u(x) = f(x)$$

Preuve : On s'intéresse au problème faible, càd montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tq :

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \int_0^1 u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Etape 1 : Existence et unicité de $u \in H_0^1(0,1)$

On définit la fonctionnelle, $J : H_0^1(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$v \longmapsto \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|v'(x)|^2 + \frac{|v(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)v(x) \right) dx.$$

1) J est bien définie et continue :

Soit $v \in H_0^1(0,1)$ alors $v, v' \in L^2(0,1)$ et $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$ donc :

- $\frac{1}{2}\int_0^1 |v'(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2}^2 < +\infty$
- $\frac{1}{p+1}\int_0^1 |v|^{p+1} \leq \frac{\|v\|_\infty^p}{p+1} \|v\|_{L^2} < +\infty$
- $\int_0^1 |f(x)v(x)| dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} < +\infty$

J est bien définie.

Montrons que J est continue, par ce qu'on a montré :

$$|J(u-v)| \leq \frac{1}{2}\|u'-v'\|_{L^2} + \frac{1}{p+1}\|u-v\|_\infty^p \|u-v\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\|u-v\|_{L^2}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \|f\|_{L^2}\right)\|u-v\|_{H^1} + \frac{1}{p+1}\|u-v\|_{H^1}^{p+1}$$

Ainsi J est continue.

2) Montrons que J est strictement convexe.

Soit $\lambda \in]0,1[$ et $u, v \in H_0^1(0,1)$ alors :

$$J(\lambda u + (1-\lambda)v) = \int_0^1 \frac{1}{2}|\lambda u'(x) + (1-\lambda)v'(x)|^2 + \frac{|\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)|^{p+1}}{p+1} - \lambda f(x)u(x) - (1-\lambda)f(x)v(x)dx$$

strict convexité de $|.|^k$ $\forall k \geq 2$.

$$< \int_0^1 \frac{\lambda}{2}|u'(x)|^2 + (1-\lambda)|v'(x)|^2 + \lambda\frac{|u(x)|^{p+1}}{p+1} + (1-\lambda)\frac{|v(x)|^{p+1}}{p+1} - \lambda f(x)u(x) + (1-\lambda)f(x)v(x) dx$$

$$< \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v).$$

3) Montrons que J est différentiable

J est introduit de manière à ce que u sol faible $\Leftrightarrow dJ(u) = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(0,1), dJ(u)v = 0$

Ainsi on veut montrer que pour $u \in H^1_0(0,1)$:

$$dJ(u) = L(u) : H^1_0(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$v \longmapsto \int_0^1 u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)v(x)\,dx$$

ainsi $L(u)$ est bien définie, continue car :

$$\forall v \in H^1_0(0,1),\ |L(u)v| \leq \left(\|u'\|_{L^2} + \|u\|_\infty^{p-1}\|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\right)\|u\|_{H^1}$$

On veut montrer que:

$$|J(u+v) - J(u) - L(u)v| = o(\|v\|_{H^1})$$

Or pour $u, v \in H^1_0(0,1)$:

$$J(u+v) = \int_0^1 \frac{|u'+v'|^2}{2} + \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - f(x)u(x) - f(x)v(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{|u'|^2}{2} + \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - fu + \frac{|v'|^2}{2} + u'v' + |u|^{p-1}uv - fv + \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv\,dx$$

$$= J(u) + L(u)v + \underbrace{\frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2}}_{o(\|v\|_{H^1})} + \int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv\,dx$$

Ainsi il nous suffit de montrer: $\int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv\,dx = o(\|v\|_{H^1})$

On fixe $u, v \in \mathbb{R}$ et on pose $\varphi : t \in [0,1] \longmapsto \frac{|u+tv|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - t|u|^{p-1}uv$ qui est continue.
Nous on veut controller :

$$|\varphi(1)| = |\varphi(1) - \varphi(0)|.$$

On a tout d'abord, soit $t \in [0,1]$ telle que $u+tv \neq 0$ alors

$$\frac{d}{dt}\left([u+tv]^{p+1}\right)(t) = (p+1)v|u+tv|^p \operatorname{sgn}(u+tv)$$

où sgn est la fonction signe, avec $\operatorname{sign}(0) = 0$. Ainsi φ dérivable presque partout et pour $t \in [0,1]$ tel que $u+tv \neq 0$:

$$\varphi'(t) = v|u+tv|^p \operatorname{sgn}(u+tv) - |u|^{p-1}uv.$$

Ainsi par le théorème des accroissements finis alors:

$$|\varphi(1)| \leq \sup_{t \leq 1}\left\{|v|\,\middle|\,|u+tv|^p \operatorname{sgn}(u+tv) - |u|^{p-1}u\right\}$$

Ce qui donne :

$$\left| \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv \right| \leq |v| \sup_{|t|\leq|v|} \left\{ \left| |u+t|^p \operatorname{sgn}(u+t) - |u|^{p-1}u \right| \right\}$$

Ainsi pour $u, v \in H^1_0(0,1)$:

$$\left| \int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv \, dx \right| \leq \int_0^1 |v| \sup_{|t|\leq\|v\|_\infty} \left\{ \left| |u+t|^p \operatorname{sgn}(u+t) - |u|^{p-1}u \right| \right\} dx$$

CVS

$$\leq \|v\|_{H^1} \left(\int_0^1 \underbrace{\sup_{|t|\leq\|v\|_\infty} \left\{ \left| |u+t|^p \operatorname{sgn}(u+t) - |u|^{p-1}u \right| \right\}^2 dx}_{=: \phi(u,v).} \right)^{1/2}$$

Il nous reste à montrer que $\phi(u,v) \xrightarrow[\|v\|_{H^1}\to 0]{} 0$. Rmq : $|u|^{p-1}u = \operatorname{sgn}(u)|u|^p$

Pour cela on va utiliser le théorème de convergence dominé. Tout d'abord $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$ donc si on fixe $x \in [0,1]$, on a :

$$\gamma(t) := \operatorname{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p - \operatorname{sgn}(u(x))|u(x)|^p$$

Si $u(x) = 0$ alors

$$|\gamma(t)| = |\operatorname{sgn}(t)\,|t|^p| \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{uniformément en } t$$

Si $u(x) \neq 0$ alors pour t assez petit, $\operatorname{sgn}(u(x)+t) = \operatorname{sgn}(u(x))$ donc

$$|\gamma(t)| = |u(x)+t|^p - |u(x)|^p \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{uniformément en } t$$

inutile

Ainsi $\gamma(t)$ converge uniformément vers 0 quand $t \to 0$ et $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$, donc

$$\forall x \in [0,1], \quad \sup_{t\leq\|v\|_\infty} \left\{ \left| \operatorname{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p - \operatorname{sgn}(u(x))|u(x)|^p \right| \right\} \xrightarrow[\|v\|_{H^1}\to 0]{} 0$$

On a donc la convergence simple de l'intégrande.

Pour la domination, ops sans perte de généralité $\|v\|_\infty \leq 1$.

$$\sup_{t\leq\|v\|_\infty} \left\{ \left| \operatorname{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p - \operatorname{sgn}(u(x))|u(x)|^p \right| \right\} \leq |u(x)+1|^p + |u(x)|^p \in L^1(0,1)$$

car $u \in L^\infty(0,1)$.

Ainsi par le TCVD on a le résultat voulu.

4) Montrons que J est coercive.

Soit $u \in H_0^1(0,1)$ on a alors: $\quad -\|u\|_{L^2} \geq -\|u\|_{H^1}$

$$J(u) = \int_0^1 \frac{|u'(x)|^2}{2} + \frac{|u(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)u(x)\,dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$$

$$\geq \frac{C}{2}\|v\|_{H^1}^2 - \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \xrightarrow[\|v\|_{H^1}\to+\infty]{} +\infty.$$

D'où le résultat.

D'après le théorème sur le min de J, il existe $u \in H_0^1(0,1)$ (Hilbert) tel que:

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v)$$

Or J est strictement convexe alors u est unique.

De plus par différentiabilité de J on a:

$$dJ(u) = 0 \iff \forall v \in H_0^1(0,1),\ dJ(u)v = 0$$

$$\iff \int_0^1 u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)v(x)\,dx = 0. \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \qquad (1)$$

Etape 1: On montre que $u \in H^2(0,1)$ et $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$:

La relation (1) nous donne, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$:

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x) = \int_0^1 \left(|u(x)|^{p-1}u(x) - f(x)\right)\varphi(x)\,dx$$

Et comme $x \mapsto |u(x)|^{p-1}u(x) - f(x) \in L^2(0,1)$, on a que $u' \in H^1(0,1)$ donc $u \in H^2(0,1)$ et que:

$$-u'' + |u|^{p-1}u = f \text{ dans } L^2(0,1).$$

Etape 3: Unicité de u

On considère $\hat{u} \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ telle que $-\hat{u} + |\hat{u}|^{p-1}\hat{u} = f$ dans $L^2(0,1)$.

Soit $v \in H_0^1(0,1)$ montrons que

$$\forall v \in H_0^1(0,1),\ \int_0^1 \hat{u}'v' + |u|^{p-1}\hat{u}v - fv = 0$$

Et l'unicité de l'étape 1 nous donne $\tilde{u} = u$.

Soit $v \in H_0^1(0,1)$ alors comme $\tilde{u} \in H^1(0,1)$ on a :

$$\int_0^1 -\tilde{u}''v + |\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u}v - fv = 0$$

Or par IPP dans $H^1(0,1)$ (comme $H_0^1(0,1) \subset H^1(0,1)$) :

$$\int_0^1 -\tilde{u}''v = \tilde{u}'(1)v(1) - \tilde{u}'(0)v(0) + \int_0^1 \tilde{u}'v'$$) Cela revient à faire Fubini.

Or $v \in H_0^1(0,1)$ donc $v(1) = v(0)$ d'où $\int_0^1 -u''v = \int_0^1 \tilde{u}'v'$ on a ainsi le résultat.

Etape 4 : Si f est continue alors $x \mapsto |u(x)|^{p-1}u(x) - f$ est continue et donc l'égalité.

$$\text{p.p } u'' = |u|^{p-1}u - f.$$

devient $\forall x \in \mathcal{C}([0,1])$ $u''(x) = |u(x)|^{p-1}u(x) - f(x)$

ainsi $u'' \in \mathcal{C}^2$ et on a le résultat voulu.

$\boxtimes$



J'ajoute ici des remarques oubliées dans le document.

Rmq 1 : On regarde : ① $\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Alors on peut résoudre explicitement ① et on obtient si $f \in \mathcal{C}([0,1])$

$$u(x) = C\,\mathrm{sh}(x) - \int_0^x \mathrm{sh}(x-s)f(s)\,ds \quad \text{avec } D = \frac{1}{\mathrm{sh}(1)}\int_0^1 \mathrm{sh}(1-s)f(s)\,ds$$

Et si $f \in L^2(0,1)$ on vérifie que $u \in H_0^1(0,1) \cap H^1(0,1)$ (définie pareil) et que

$$u'' = u - f \text{ dans } L^2(0,1).$$

Le fait qu'importe α et β, $(e_n, \lambda_n)_{n\geq 0}$ se comporte comme $(\sqrt{2}\sin(n\pi x), n^2\pi^2)_{n\geq 1}$, i.e le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 0$.

Rmq: On peut montrer aussi que $T: L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, en particulier on peut donc l'écrire comme un opérateur à noyau i.e il existe $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$ telle que:

$$T: L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$$
$$f \longmapsto Tf: x \longmapsto \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$

i.e pour tout $f \in L^2(0,1)$, $Tf(x) = u(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$ (dans $L^2(0,1)$).

IV. Minimisation d'une fonctionnelle convexe et edp elliptique non linéaire en dim 1

ref: Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation

L'objectif va être de minimiser une fonction convexe pour résoudre l'edp elliptique non linéaire:

où pention ≥ 1.

$$\begin{cases} -u''(x) + |u(x)|^p u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Pour cela on va avoir besoin de résultat sur la topologie faible dans les Hilbert et la minimisation de fonctionnelle convexes.

Outils:

Pour la topologie faible, on va seulement démontrer le théorème de Banach-Alaoglu, pour les autres résultats voir le Hirsh-Lacombe ou le cours de Karine Beauchard ou d'ANAF de M1. On trouvera les preuves suivantes dans le cours de Karine Beauchard et c'est un dl pt sur le site de Laurent Monteiguet. Pour la partie optimisation voir le Ciarlet.

Théorème: (Banach-Alaoglu)

Soit H un Hilbert et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement i.e il existe $f \in H$ tel que:

$$\forall g \in H, \quad \langle f_{\varphi(n)}, g \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle f, g \rangle$$

Preuve : On note $M>0$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|\leq M$.

Hyp: $\exists \psi$ une extractrice, $f\in H$ tel que $\langle f_{\psi(n)}, g\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle$ $(\forall g\in H)$.

Cas 1: H séparable

Soit $D=\{h_k, k\in\mathbb{N}\}$ une partie dense et dénombrable de $(H,\|.\|)$. On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que H est un $\mathbb{K}$-hilbert

Etape 1: Extraction diagonale sur D.

Par Cauchy-Schwartz, $(\langle f_n, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$ donc il existe une extractrice φ_0 tel que $(\langle f_{\varphi_0(n)}, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.

« De même $(\langle f_n, h_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$ donc il existe une extractrice φ_1 tel que $(\langle f_{\varphi_1(n)}, h_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$

Par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$, pour tout $k\in\mathbb{N}$ il existe une extractrice φ_k tel que.

$$(\langle f_{\varphi_k(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{K}.$$

En prenant, l'extractrice $\psi(n)=\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_n(n)$ on a pour tout $k\in\mathbb{N}$ que :

$$(\langle f_{\psi(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{K}.$$

Etape 2: Montrons que pour tout $g\in H$, $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.

Soit $g\in H$, montrons que $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ ce qui nous donnera ce que l'on veut.

Soit $\varepsilon>0$, par densité de D, il existe $k_0\in\mathbb{N}$ tq $\|g-h_{k_0}\|\leq \frac{\varepsilon}{2M}$

$(\langle f_{\psi(n)}, h_{k_0}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ ainsi soit $n_0\in\mathbb{N}$ tq :

$$\forall p>q\geq n_0,\ |\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, h_{k_0}\rangle|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi pour $p\geq q\geq n_0$,

$$|\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, g\rangle| \leq |\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, h_{k_0}\rangle| + |\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, h_{k_0}-g\rangle|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}\|\,\|h_{k_0}-g\| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

d'où le résultat.

On note donc $L: H\longrightarrow \mathbb{K}$ qui est linéaire.

$$g\longmapsto \lim_{n\to\infty}\langle f_{\psi(n)}, g\rangle$$

Etape 3: Montrons que L est continue et utilisons le théorème de Riesz.

On a pour $g \in W$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\langle f_{\psi(n)}, g \rangle| \leq \|f_{\psi(n)}\| \|g\| \leq M \|g\|.$$

Ainsi $\|L(g)\| \leq M \|g\|$.

Par le théorème de Riesz, il existe $f \in H$ telle que:

$$\forall g \in H, \quad \langle f, g \rangle = L(g) = \lim_{n \to +\infty} \langle f_{\psi(n)}, g \rangle.$$

d'où le résultat.

Cas 2: H non séparable.

On se place dans $F = \text{Vect}\{f_n ; n \in \mathbb{N}\}$ qui est un sev fermé de H donc F est un Hilbert séparable.

De plus on a: $H = F \oplus F^\perp$.

Par le cas précédent $\exists \psi$ extractrice et $f \in F$ telle que pour tout $g \in F$:

$$\langle f_{\psi(n)}, g \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle f, g \rangle$$

Soit $g \in H$ alors $g = \underbrace{g_F}_{\in F} + \underbrace{g_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$ et on a:

$$\langle f_{\psi(n)}, g \rangle = \langle f_{\psi(n)}, g_F \rangle + \underbrace{\langle f_{\psi(n)}, g_{F^\perp} \rangle}_{=0} \longrightarrow \langle f, g_F \rangle = \langle f, g \rangle \quad \text{car } f \in F.$$

d'où le résultat

□

On va donc pouvoir démontrer la proposition qui nous sera utile.

Proposition: Soit $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, convexe et coercive i.e:

$$J(h) \xrightarrow[\|h\| \to +\infty]{} +\infty \quad (\forall A > 0, \exists R > 0, \forall h \in H, \|h\| > R, J(h) \geq A).$$

Alors $\exists x_* \in H$ tq $J(x_*) = \inf_{x \in H} J(x)$

Rmq: Cette proposition est l'équivalent dans le cas non linéaire du théorème de Lax-Milgram dans le cas linéaire. En effet dans le cas l'objectif est de minimiser une fonctionnelle sur H, ici et $x \longmapsto \frac{1}{2} a(x,x) - \varphi(x)$ pour Lax-Milgram. Pour plus de détail dans le Brézis on montre que

Lax-Milgram est un corollaire du théorème de Stampacchia qui est un théorème de minimisation sur un Hilbert.

Preuve: On considère une suite minimisante $(x_n)_{n\geq 1}$ tq:

$$J(x_n) \longrightarrow \inf_{x\in H} J(x).$$

Montrons que cette suite est bornée.

Supposons l'inverse alors il existe ψ tel que, $\|x_{\psi(n)}\| \longrightarrow +\infty$ donc

$$J(x_{\psi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad J \text{ coercive.}$$

Ainsi $\inf_{x\in H} J(x) = +\infty$, Absurde

Ainsi d'après Banach Alaoglu, il existe une extractrice ψ tel que:

$$x_{\psi(n)} \longrightarrow x^* \in H.$$

Montrons que $J(x^*) = \inf_{x\in H} J(x)$:

On fixe $\alpha > \inf_{x\in H} J(x)$ et on pose:

$$C_\alpha = J^{-1}(]-\infty, \alpha])$$

C_α est non vide par choix de α et fermé car J continue. De plus par convexité de J, C_α est convexe, en effet:

$$\forall x, y \in C_\alpha, t\in[0,1], \quad J(x+t(x-y)) \leq tJ(x) + (1-t)J(y) \leq \alpha$$

Or à partir d'un certain rang N, $\forall n \geq N$, $x_{\psi(n)} \in C_\alpha$, montrons que $x^* \in C_\alpha$.

(i.e que C_α est faiblement séquentiellement fermé)

On note Π_α la projection sur C_α (bien def car C_α est fermé convexe non vide), D'après les propriétés des angles obtus, on a:

$$\forall n \geq N, \quad \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), x_{\psi(n)} - \Pi_\alpha(x^*)\rangle \leq 0$$

$$\forall n \geq N, \quad \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), x_{\psi(n)}\rangle - \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), \Pi_\alpha(x^*)\rangle \leq 0$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), x^*\rangle - \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), \Pi_\alpha(x^*)\rangle \leq 0$$

donc $\|x^* - \Pi_\alpha(x^*)\|^2 \leq 0$

Ainsi $x^* = \Pi_\alpha(x^*)$ donc $x^* \in C_\alpha$ ainsi pour tout $\alpha > \inf_{x\in H} J(x)$

$$\alpha \geq J(x^*) \geq \inf_{x\in H} J(x)$$

Ainsi on a $x^* \in H$ tel que : $J(x^*) = \inf_{x \in H} J(x)$.

Rmq : * Pour J la continuité intervient seulement pour montrer que $J^{-1}(]-\infty, \alpha]$ est fermé fortement. Ainsi on peut appauvrir l'hypothèse sur J et ainsi supposer J seulement semi-continue inférieurement i.e : $\forall a \in \mathbb{R}$, $J^{-1}(]a, +\infty[)$ est un ouvert (fort) $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$, $J^{-1}(]-\infty, a])$ est un fermé (fort) (Je pense même que faiblement semi-continue inférieurement).

* On considère C_α un convexe fermé car on a un résultat général :

Soit C un convexe non vide d'un Hilbert alors K est fermé fortement (pour $\|.\|_H$) ssi il est fermé faiblement.

Ceci donne que C_α est fermé faiblement donc $x^* \in C_\alpha$ $(\forall \alpha)$.

* Si J est supposé différentiable alors pour montrer que :

$$J(x^*) = \inf_{x \in H} J(x).$$

On peut utiliser que :

$$J(x_{\eta(x_n)}) \geq J(x_n) + \langle \nabla J(x^n), x_{\eta(n)} - x_n \rangle \quad (J \text{ convexe + diff})$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_{x \in H} J(x) \geq J(x^*).$$

Résolution d'une edp elliptique non linéaire

On considère le problème non linéaire suivant ($p \geq 1$) :

$$\begin{cases} -u'' + |u|^{p-1}u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Théorème : Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p \geq 1$.

* Il existe une unique fonction $u \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$ telle que : $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$
* Si $f \in C^0([0,1])$ alors $u \in C^2([0,1])$ et est une sol classique i.e :

$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(x) + |u|^{p-1}(x)u(x) = f(x)$$

Preuve : On s'intéresse au problème faible, càd montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tq :

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \int_0^1 u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Etape 1 : Existence et unicité de $u \in H_0^1(0,1)$

On définit la fonctionnelle, $J : H_0^1(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$v \longmapsto \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|v'(x)|^2 + \frac{|v(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)v(x) \right) dx.$$

1) J est bien définie et continue :

Soit $v \in H_0^1(0,1)$ alors $v, v' \in L^2(0,1)$ et $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$ donc :

- $\frac{1}{2}\int_0^1 |v'(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2}^2 < +\infty$
- $\frac{1}{p+1}\int_0^1 |v|^{p+1} \leq \frac{\|v\|_\infty^p}{p+1} \|v\|_{L^2} < +\infty$
- $\int_0^1 |f(x)v(x)| dx \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} < +\infty$

J est bien définie.

Montrons que J est continue, par ce qu'on a montré :

$$|J(u-v)| \leq \frac{1}{2}\|u'-v'\|_{L^2} + \frac{1}{p+1}\|u-v\|_\infty^p \|u-v\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\|u-v\|_{L^2}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \|f\|_{L^2}\right)\|u-v\|_{H^1} + \frac{1}{p+1}\|u-v\|_{H^1}^{p+1}$$

Ainsi J est continue.

2) Montrons que J est strictement convexe.

Soit $\lambda \in]0,1[$ et $u, v \in H_0^1(0,1)$ alors :

$$J(\lambda u + (1-\lambda)v) = \int_0^1 \frac{1}{2}|\lambda u'(x) + (1-\lambda)v'(x)|^2 + \frac{|\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)|^{p+1}}{p+1} - \lambda f(x)u(x) - (1-\lambda)f(x)v(x)dx$$

strict convexité de $|.|^k$ $\forall k \geq 2$.

$$< \int_0^1 \frac{\lambda}{2}|u'(x)|^2 + (1-\lambda)|v'(x)|^2 + \lambda\frac{|u(x)|^{p+1}}{p+1} + (1-\lambda)\frac{|v(x)|^{p+1}}{p+1} - \lambda f(x)u(x) + (1-\lambda)f(x)v(x) dx$$

$$< \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v).$$

3) Montrons que J est différentiable

J est introduit de manière à ce que u sol faible $\Leftrightarrow dJ(u) = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(0,1), dJ(u)v = 0$

Ainsi on veut montrer que pour $u \in H^1_0(0,1)$:

$$dJ(u) = L(u) : H^1_0(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$v \longmapsto \int_0^1 u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)v(x)\,dx$$

ainsi $L(u)$ est bien définie, continue car :

$$\forall v \in H^1_0(0,1),\ |L(u)v| \leq \left(\|u'\|_{L^2} + \|u\|_\infty^{p-1}\|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\right)\|u\|_{H^1}$$

On veut montrer que:

$$|J(u+v) - J(u) - L(u)v| = o(\|v\|_{H^1})$$

Or pour $u, v \in H^1_0(0,1)$:

$$J(u+v) = \int_0^1 \frac{|u'+v'|^2}{2} + \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - f(x)u(x) - f(x)v(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{|u'|^2}{2} + \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - fu + \frac{|v'|^2}{2} + u'v' + |u|^{p-1}uv - fv + \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv\,dx$$

$$= J(u) + L(u)v + \underbrace{\frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2}}_{o(\|v\|_{H^1})} + \int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv\,dx$$

Ainsi il nous suffit de montrer: $\int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv\,dx = o(\|v\|_{H^1})$

On fixe $u, v \in \mathbb{R}$ et on pose $\varphi : t \in [0,1] \longmapsto \frac{|u+tv|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - t|u|^{p-1}uv$ qui est continue.
Nous on veut controller :

$$|\varphi(1)| = |\varphi(1) - \varphi(0)|.$$

On a tout d'abord, soit $t \in [0,1]$ telle que $u+tv \neq 0$ alors

$$\frac{d}{dt}\left([u+tv]^{p+1}\right)(t) = (p+1)v|u+tv|^p \operatorname{sgn}(u+tv)$$

où sgn est la fonction signe, avec $\operatorname{sign}(0) = 0$. Ainsi φ dérivable presque partout et pour $t \in [0,1]$ tel que $u+tv \neq 0$:

$$\varphi'(t) = v|u+tv|^p \operatorname{sgn}(u+tv) - |u|^{p-1}uv.$$

Ainsi par le théorème des accroissements finis alors:

$$|\varphi(1)| \leq \sup_{t \leq 1}\left\{|v|\,\middle|\,|u+tv|^p \operatorname{sgn}(u+tv) - |u|^{p-1}u\right\}$$

Ce qui donne :

$$\left| \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv \right| \leq |v| \sup_{|t|\leq|v|} \left\{ \left| |u+t|^p \operatorname{sgn}(u+t) - |u|^{p-1}u \right| \right\}$$

Ainsi pour $u, v \in H^1_0(0,1)$:

$$\left| \int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv \, dx \right| \leq \int_0^1 |v| \sup_{|t|\leq\|v\|_\infty} \left\{ \left| |u+t|^p \operatorname{sgn}(u+t) - |u|^{p-1}u \right| \right\} dx$$

CVS

$$\leq \|v\|_{H^1} \left(\int_0^1 \underbrace{\sup_{|t|\leq\|v\|_\infty} \left\{ \left| |u+t|^p \operatorname{sgn}(u+t) - |u|^{p-1}u \right| \right\}^2 dx}_{=: \phi(u,v).} \right)^{1/2}$$

Il nous reste à montrer que $\phi(u,v) \xrightarrow[\|v\|_{H^1}\to 0]{} 0$. Rmq : $|u|^{p-1}u = \operatorname{sgn}(u)|u|^p$

Pour cela on va utiliser le théorème de convergence dominé. Tout d'abord $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$ donc si on fixe $x \in [0,1]$, on a :

$$\gamma(t) := \operatorname{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p - \operatorname{sgn}(u(x))|u(x)|^p$$

Si $u(x) = 0$ alors

$$|\gamma(t)| = |\operatorname{sgn}(t)\,|t|^p| \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{uniformément en } t$$

Si $u(x) \neq 0$ alors pour t assez petit, $\operatorname{sgn}(u(x)+t) = \operatorname{sgn}(u(x))$ donc

$$|\gamma(t)| = |u(x)+t|^p - |u(x)|^p \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{uniformément en } t$$

inutile

Ainsi $\gamma(t)$ converge uniformément vers 0 quand $t \to 0$ et $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$, donc

$$\forall x \in [0,1], \quad \sup_{t\leq\|v\|_\infty} \left\{ \left| \operatorname{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p - \operatorname{sgn}(u(x))|u(x)|^p \right| \right\} \xrightarrow[\|v\|_{H^1}\to 0]{} 0$$

On a donc la convergence simple de l'intégrande.

Pour la domination, ops sans perte de généralité $\|v\|_\infty \leq 1$.

$$\sup_{t\leq\|v\|_\infty} \left\{ \left| \operatorname{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p - \operatorname{sgn}(u(x))|u(x)|^p \right| \right\} \leq |u(x)+1|^p + |u(x)|^p \in L^1(0,1)$$

car $u \in L^\infty(0,1)$.

Ainsi par le TCVD on a le résultat voulu.

4) Montrons que J est coercive.

Soit $u \in H_0^1(0,1)$ on a alors: $\quad -\|u\|_{L^2} \geq -\|u\|_{H^1}$

$$J(u) = \int_0^1 \frac{|u'(x)|^2}{2} + \frac{|u(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)u(x)\,dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$$

$$\geq \frac{C}{2}\|v\|_{H^1}^2 - \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \xrightarrow[\|v\|_{H^1}\to+\infty]{} +\infty.$$

D'où le résultat.

D'après le théorème sur le min de J, il existe $u \in H_0^1(0,1)$ (Hilbert) tel que:

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v)$$

Or J est strictement convexe alors u est unique.

De plus par différentiabilité de J on a:

$$dJ(u) = 0 \iff \forall v \in H_0^1(0,1),\ dJ(u)v = 0$$

$$\iff \int_0^1 u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)v(x)\,dx = 0. \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \qquad (1)$$

Etape 1: On montre que $u \in H^2(0,1)$ et $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$:

La relation (1) nous donne, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$:

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x) = \int_0^1 \left(|u(x)|^{p-1}u(x) - f(x)\right)\varphi(x)\,dx$$

Et comme $x \mapsto |u(x)|^{p-1}u(x) - f(x) \in L^2(0,1)$, on a que $u' \in H^1(0,1)$ donc $u \in H^2(0,1)$ et que:

$$-u'' + |u|^{p-1}u = f \text{ dans } L^2(0,1).$$

Etape 3: Unicité de u

On considère $\hat{u} \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ telle que $-\hat{u} + |\hat{u}|^{p-1}\hat{u} = f$ dans $L^2(0,1)$.

Soit $v \in H_0^1(0,1)$ montrons que

$$\forall v \in H_0^1(0,1),\ \int_0^1 \hat{u}'v' + |u|^{p-1}\hat{u}v - fv = 0$$

Et l'unicité de l'étape 1 nous donne $\tilde{u} = u$.

Soit $v \in H_0^1(0,1)$ alors comme $\tilde{u} \in H^1(0,1)$ on a :

$$\int_0^1 -\tilde{u}''v + |\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u}v - fv = 0$$

Or par IPP dans $H^1(0,1)$ (comme $H_0^1(0,1) \subset H^1(0,1)$) :

$$\int_0^1 -\tilde{u}''v = \tilde{u}'(1)v(1) - \tilde{u}'(0)v(0) + \int_0^1 \tilde{u}'v'$$) Cela revient à faire Fubini.

Or $v \in H_0^1(0,1)$ donc $v(1) = v(0)$ d'où $\int_0^1 -u''v = \int_0^1 \tilde{u}'v'$ on a ainsi le résultat.

Etape 4 : Si f est continue alors $x \mapsto |u(x)|^{p-1}u(x) - f$ est continue et donc l'égalité.

$$\text{p.p } u'' = |u|^{p-1}u - f.$$

devient $\forall x \in \mathcal{C}([0,1])$ $u''(x) = |u(x)|^{p-1}u(x) - f(x)$

ainsi $u'' \in \mathcal{C}^2$ et on a le résultat voulu.

$\boxtimes$



J'ajoute ici des remarques oubliées dans le document.

Rmq 1 : On regarde : ① $\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Alors on peut résoudre explicitement ① et on obtient si $f \in \mathcal{C}([0,1])$

$$u(x) = C\,\mathrm{sh}(x) - \int_0^x \mathrm{sh}(x-s)f(s)\,ds \quad \text{avec } D = \frac{1}{\mathrm{sh}(1)}\int_0^1 \mathrm{sh}(1-s)f(s)\,ds$$

Et si $f \in L^2(0,1)$ on vérifie que $u \in H_0^1(0,1) \cap H^1(0,1)$ (définie pareil) et que

$$u'' = u - f \text{ dans } L^2(0,1).$$