Système hyperbolique linéaire.

ref: Bernis Bernis.

Remarque: Soit $f \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ on note $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))$ si:
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t,.) \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$
- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}_+$, $f(.,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- $t \longmapsto f(t,.)$ est dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Rmq: Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))$ alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\partial_t f(.,\xi)$ existe et est continue.
De plus $t \longmapsto f(t,.)$ est dérivable. Or la cv dans L^2 implique la convergence selon une sous-suite donc sa dérivée est $t \longmapsto \partial_t f(t,.)$.

Notation: On note $\langle . \rangle : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$\xi \longmapsto \langle \xi \rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}.$$

En particulier si $\alpha > \frac{m}{2}$ alors $\langle \xi \rangle^{-\alpha}$ est un élément de $L^2(\mathbb{R}^m)$.

Théorème:

Soient $\alpha > m$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ vérifiant:

$$\xi \longmapsto \langle \xi \rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u}_0(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

Soient $A_1, \dots, A_m \in S_m(\mathbb{R})$.
Alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))$, telle que pour tout $j \in [\![1,m]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\partial_{x_j} u(t,.) \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^{m} A_j \partial_{x_j} u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{p.p } x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Preuve:

Lemme: Soit $\xi \in \mathbb{R}^m$ avec $A(\xi) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j A_j$ alors $\exp(itA(\xi)) \in \mathcal{U}_m(\mathbb{C})$. En particulier:

$$\| \exp(itA(\xi)) \| = 1.$$

Preuve: Il est clair que $A(\xi) \in S_m(\mathbb{R})$ et par continuité de la transconjugaison:

$$\exp(itA(\xi))^* = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itA(\xi))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-itA(\xi))^n}{n!} = \exp(-itA(\xi)) = \exp(itA(\xi))^{-1}.$$

∎

Existence:

Heuristique: Soit u une application suffisamment régulière par exemple $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ solution du problème. Alors,

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^m A_j \partial_j u = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Fourier spatial, par régularité sous l'intégrale:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + 2i\pi \sum_{j=1}^m \xi_j A_j \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(0,\cdot) = \hat{u}_0 \text{ pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Par la théorie des EDO, $\hat{u}$ coincide pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^m$ avec

$$\tilde{u} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ (t,\xi) \longmapsto \exp(-2i\pi t A(\xi)) \hat{u}_0(\xi). \end{cases}$$

→ La transformée de Fourier inverse de $\tilde{u}$ nous fournit donc un candidat naturel.

Mq que la transfo de Fourier inverse de $\tilde{u}$ est bien définie et qu'elle vérifie bien l'équation.

On sait que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \tilde{u}(t,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, comme $\|\exp(-2i\pi t A(\xi))\| = 1$ on a pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^m$,

$$|\tilde{u}(t,\xi)| = |\exp(-2i\pi t A(\xi)) \hat{u}_0(\xi)| \leq |\underbrace{\langle \xi \rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u}_0(\xi)}_{\in L^2}| \underbrace{\langle \xi \rangle^{-(\frac{\alpha}{2}+1)}}_{\in L^2}$$

Ainsi par Cauchy-Schwartz, $\tilde{u}(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m)$.

On peut donc définir la transformée Fourier $\tilde{u}$, ainsi on définit pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}^m$:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{2i\pi x \cdot \xi} \tilde{u}(t,\xi) \, d\xi.$$

Mq u est $\mathcal{C}^1$.

Pour presque tout ξ et tout $x \in \mathbb{R}^m$, $t \longmapsto e^{2i\pi x \cdot \xi} \tilde{u}(t,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

On majore la dérivée, pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$|-2i\pi e^{2i\pi x\cdot\xi} A(\xi)\hat{u}(t,\xi)| \le 2\pi\, \|A(\xi)\|\, |\hat{u}_0(\xi)|$$
$$\le 2\pi \Big\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j A_j \Big\| \, |\hat{u}_0(\xi)|$$
$$\le 2\pi m \max_{j\in[\![1,m]\!]} \|A_j\| \, \frac{|\xi|}{\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1}} \, |\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u}_0(\xi)|$$
$$\le 2\pi m \max_{j\in[\![1,m]\!]} \|A_j\| \, \underbrace{\langle\xi\rangle^{-\frac{\alpha}{2}}}_{\in L^2} \, |\underbrace{\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1}\hat{u}_0(\xi)}_{\in L^2}|$$

Par Cauchy-Schwartz le second membre est dans $L^1(\mathbb{R}^m)$ et indépendant de t. Ainsi par régularité sous l'intégrale, pour $x\in\mathbb{R}^m$, $u(\cdot,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

De même pour $j\in[\![1,m]\!]$, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, presque tout $\xi\in\mathbb{R}^m$, $x\longmapsto e^{2i\pi x\cdot\xi}\hat{u}(t,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ selon x_j, et sa dérivée partielle est :

$$x\longmapsto 2i\pi\xi_j e^{2i\pi x\cdot\xi}\hat{u}(t,\xi).$$

Que l'on peut majorer comme précédemment :

$$|2i\pi\xi_j e^{2i\pi x\cdot\xi}\hat{u}(t,\xi)| \le 2\pi|\xi|\,|\hat{u}_0(\xi)| \le 2\pi\langle\xi\rangle^{-\frac{\alpha}{2}}\,|\langle\xi\rangle^{\frac{\alpha}{2}+1}\hat{u}_0(\xi)|.$$

Ainsi par le théorème de régularité sous le signe intégrale u est de classe $\mathcal{C}^1$ selon la variable x_j.

$\Rightarrow$ En particulier $u:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Mq u est solution du problème.

Pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m$:

$$\partial_t u(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^m} 2i\pi\, e^{2i\pi x\cdot\xi} A(\xi)\hat{u}(t,\xi)\,d\xi$$
$$= -\sum_{j=1}^{m} A_j \int_{\mathbb{R}^m} 2i\pi\xi_j e^{2i\pi x\cdot\xi}\hat{u}(t,\xi)\,d\xi.$$
$$= -\sum_{j=1}^{m} A_j\,\partial_{x_j} u(t,x).$$

D'autre part $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^m)$ donc $\hat{u}_0$ est élément de $L^2(\mathbb{R}^m)$ et $\hat{u}_0$ est également élément de $L^1(\mathbb{R}^m)$ car $\hat{u}_0 = \hat{u}(0,\cdot)$

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$, $u(0,x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{2i\pi x \cdot \xi} \hat{u}_0(\xi)\, d\xi$

donc $u(0,\cdot) = u_0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. ↙ inversion de Fourier

Mq u est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

En effet u_0 est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, pour tout $(t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$, alors

$$\overline{\hat{u}}(t,\xi) = \hat{u}(t,-\xi)$$

Ainsi pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$,

$$\bar{u}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{2i\pi x \cdot (-\xi)} \hat{u}(t,-\xi)\, d\xi = u(t,x).$$

donc $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Mq que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $j \in [\![1, m]\!]$, $u(t,\cdot)$ et $\partial_{x_j} u(t,\cdot)$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et que $t \longmapsto u(t,\cdot)$ est dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^m$, $|\hat{u}(t,\xi)|^2 \leq |\hat{u}_0(\xi)|^2$

$$|\xi_j \hat{u}(t,\xi)|^2 \leq |\xi_j|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 \leq \langle \xi \rangle^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 \leq |\langle \xi \rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u}_0(\xi)|^2$$

car $\langle \xi \rangle \geqslant 1$.

Or par hypothèse $\hat{u}_0 \in L^2$ et $\langle \xi \rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u}_0(\xi) \in L^2$.

Ainsi $\xi \longmapsto \hat{u}(t,\xi)$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

$\xi \longmapsto \xi_j \hat{u}(t,\xi)$

Donc leur transformée de Fourier inverse sont donc dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m)$. Or $\xi \longmapsto \hat{u}(t,\xi)$ et $\xi \longmapsto \xi_j \hat{u}(t,\xi)$ sont aussi dans $L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m)$ donc leur transfo de Fourier inverse sont bien $u(t,\cdot)$ et $\partial_{x_j} u(t,\cdot)$ qui sont donc dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

Il reste à montrer que $t \longmapsto u(t,\cdot)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ est dérivable.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^m$,

$$\left| \frac{\hat{u}(t',\xi) - \hat{u}(t,\xi)}{t'-t} - \partial_t \hat{u}(t,\xi) \right|^2 \xrightarrow[t' \to t]{} 0$$

Pour $t' \in \mathbb{R}_+$ tel que $t' \neq t$ et $|t-t'| \leq 1$, on applique l'inégalité des accroissements finis appliquée entre t et t' à $\theta \longmapsto \hat{u}(\theta, \xi) - (\theta - t)\partial_t \hat{u}(t, \xi)$, donc :

$$\left| \frac{\hat{u}(t', \xi) - \hat{u}(t, \xi)}{t' - t} - \partial_t \hat{u}(t, \xi) \right|^2 \leq 4 \sup_{s \in [t-1, t+1] \cap \mathbb{R}_+} |\partial_t \hat{u}(s, \xi)|^2$$

Or pour $s \in [t-1, t+1] \cap \mathbb{R}_+$ on a déjà vue que :

$$|\partial_t \hat{u}(s, \xi)| \leq 2\pi m \max_{j \in [\![1, m]\!]} \|A_j\| \, \langle \xi \rangle^{-\frac{\alpha}{2}} \, |\langle \xi \rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u}_0(\xi)|$$

Donc $\left| \frac{\hat{u}(t', \xi) - \hat{u}(t, \xi)}{t' - t} - \partial_t \hat{u}(t, \xi) \right|^2 \leq 16 \pi^2 m^2 \max_{j \in [\![1, m]\!]} \|A_j\|^2 \, \langle \xi \rangle^{-\alpha} \, |\langle \xi \rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u}_0(\xi)|^2$

$\hat{u}(t, \xi) = \exp(-2i\pi t A(\xi)) \hat{u}_0(\xi)$

$\leq \sum_j |\xi_j| \|A_j\|$

$$|\partial_t u(s, \xi)|^2 = 4\pi^2 \, |A(\xi) \hat{u}(s, \xi)|^2 \leq 4\pi^2 \left\| \sum_j \xi_j A_j \right\|^2 |\hat{u}(s, \xi)|^2$$

$$\leq 4\pi^2 \max_{j \in [\![1, m]\!]} \|A_j\|^2 |\xi_j|^2$$

$$\leq 4\pi^2 \max_{j \in [\![1, m]\!]} \|A_j\|^2 \, |\xi|^2 \, |\hat{u}_0(\xi)|^2$$

$$\leq 4\pi^2 \max_{j \in [\![1, m]\!]} |\langle \xi \rangle^{\frac{\alpha}{2}+1} \hat{u}_0(\xi)|^2$$

On a donc la domination ainsi :

$$\left\| \frac{\hat{u}(t', .) - \hat{u}(t, .)}{t' - t} - \partial_t \hat{u}(t, .) \right\|^2 \xrightarrow[t' \to t]{} 0.$$

Or par isométrie de Plancherel, pour $t' \neq t$ on a :

$$\left\| \frac{u(t', .) - u(t, .)}{t' - t} - \partial_t u(t, .) \right\|_{L^2}^2 = \left\| \frac{\hat{u}(t', .) - \hat{u}(t, .)}{t' - t} - \partial_t \hat{u}(t, .) \right\|^2 \xrightarrow[t' \to t]{} 0.$$

Ainsi $t \longmapsto u(t, .)$ est dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, donc $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))$

Unicité :

Le système étant linéaire il suffit de montrer l'unicité pour $u_0 = 0$.
Soit $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ vérifiant le système pour $u_0 = 0$.

On sait que $t \longmapsto v(t,.)$ est dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.
Ainsi $V : t \longmapsto \|v(t,.)\|^2_{L^2}$ est dérivable car composée. De plus pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$V'(t) = 2 < \partial_t v(t,.), v(t,.) >$$

(Admis) Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(\mathbb{R}^m)$ tel que : (voir fin)

$$u_n \xrightarrow{L^2} v(t,.) \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,m]\!],\ \partial_{x_j} u_n \xrightarrow{L^2} \partial_{x_j} v(t,.)$$

Soit $j \in [\![1,m]\!]$ on note :

$$T_j : L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(w_1, w_2) \longmapsto < A_j w_1, w_2 >$$

Alors T_j est une appli bilinéaire, symétrique et continue.

Or pour n fixé,

$$T_j(u_n, u_n) = < A_j \partial_{x_j} u_n, u_n > = < \partial_{x_j} u_n, A_j u_n > \overset{\text{IPP selon } x_j}{=} - < u_n, A_j \partial_{x_j} u_n > = - < A_j u_n, \partial_{x_j} u_n >$$
$$= -T(u_n, u_n)$$

En effet : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} < A_j \partial_{x_j} u_n(x), u_n(x) > dx = \int_{\mathbb{R}^m} < \partial_{x_j} u_n(x), A_j u_n(x) > dx$

$\downarrow$ $v_n = A_j u_n(x)$.

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{m} \partial_{x_j} u_n^i(x)\ v_n^i(x)\ dx$$

$\downarrow$ IPP

$$= -\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{m} u_n^i(x)\ \partial_{x_j} v_n^i(x)\, dx$$

Or A_j cste donc $\partial_{x_j} v_n = A_j \partial_{x_j} u_n$, d'où le résultat et $T_j(\partial_{x_j} u_n, u_n) = 0$
Or par continuité de T_j on a :

$$T_j(\partial_{x_j} u_n, u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{R}} T_j(\partial_{x_j} v(t,.), v(t,.))$$

Donc $T_j(\partial_{x_j} v(t,.), v(t,.)) = 0$ donc

$$\sum_{j=1}^{m} T_j(\partial_{x_j} v(t,.), v(t,.)) = 0$$

Or v étant solution on a:

$$v'(t) = 2 < \partial_t v(t,.), v(t,.) > = -2 \sum_{j=1}^{m} T_j(\partial_{x_j} v(t,.), v(t,.)) = 0.$$

Ainsi V est constante donc $V(t) = V(0) = \|u_0\|_{L^2}^2 = 0$ ainsi $\|v(t,.)\|_{L^2}^2 = 0$ donc

$$v(t,x) = 0 \quad \text{p.p } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi v est nulle dans $C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))$.

□

Complément sur la preuve :

Rmq: Cas où $m=1$:

Alors le système devient: $\begin{cases} \partial_t u + a \partial_x u = 0 \\ u(0,.) = u_0. \end{cases}$

Ceci est une équation de transport

→ Peut-être résolue par la méthode des caractéristiques i.e la solution est:

$$u(t,x) = u_0(x - at).$$

En effet, $u(0,x) = u_0$ et

$$\partial_t u = -a \frac{dl}{dy}(u_0)(x-at). \qquad -2i\pi\xi a$$

$$\partial_x u = \frac{dl}{dy}(u_0)(x-at)$$

d'où:

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0$$

→ Ou par transformée de Fourier, car si u solution: $\hat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \xi} u(t,x)\,dx$

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} - 2i\pi a \xi \hat{u}(t,\xi) = 0 \\ \hat{u}(0,.) = \hat{u}_0 \end{cases} \qquad e^{2i\pi}$$

erreur de signe

$$\text{donc } \hat{u}(t,\xi) = \hat{u_0}(\xi)\, e^{2i\pi a t \xi}$$

$$\text{donc } u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x \xi} \hat{u}(t,\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi (x+at)\xi} \hat{u}_0(\xi)\,d\xi = u_0(x+at)$$

Définition des espaces de Sobolev. réf: Golse, Distributions, analyse de Fourier, ed p. p 195

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des distributions tempérées.

Définition: Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit:

$$H^s_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^N) = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \mid (1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^N) \}.$$

que l'on munit d'un ps:

$$\langle f, g \rangle_{H^s_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s \overline{\mathcal{F}f(\xi)}\, \mathcal{F}g(\xi)\, d\xi.$$

Alors $\left(H^s(\mathbb{R}^N), \langle ., . \rangle\right)$ est un espace de Hilbert.

Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ on a une définition plus général.

Définition: Espaces de Sobolev.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On définit l'espace $H^k(\Omega)$ comme:

$$H^k(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq k \}$$

On le munit du produit scalaire

$$\forall f, g \in H^k(\Omega), \quad \langle f, g \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}$$

La dérivée faible.

Lemme:

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, il y a équivalences entre

1) $f \in H^k(\mathbb{R}^N)$
2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$, on a
$$\xi^\alpha \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^N).$$
3) $f \in H^k_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^N)$

Preuve:

On sait que pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ on a: $\mathcal{F}(\partial_{x_i} f) = i \xi_i \mathcal{F}(f)$.

On commence donc par traiter le cas $k=0$.

Mq : 1') $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \iff$ 2') $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Q 1') $\Rightarrow$ 2') vient de Plancherel.

2') $\Rightarrow$ 1') : Par inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ on a :

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f) = (2\pi)^N f \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}).$$

Q par Plancherel,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

Donc $f \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^N}) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ainsi $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

On a donc montré : 1) $f \in H^k(\mathbb{R}^N) \iff \xi^\alpha \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. $\forall |\alpha| \leq k$. 2)

Supposons 2).

Alors on a : $(1+|\xi|^2)^k = \sum_{|\alpha| \leq k} \xi^{2\alpha}$

$$\text{or } \xi^\alpha \mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha \mathcal{F}(f)|^2 \, d\xi < +\infty$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \left| (1+|\xi|^2)^{k/2} \mathcal{F}(f) \right|^2 d\xi < +\infty$$

$$\Rightarrow f \in H^k_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^N).$$

Inversement si $f \in H^k_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^N)$ alors $\sum_{|\alpha| \leq k} \int |\xi^\alpha \mathcal{F}(f)|^2 \, d\xi < +\infty$

$$\text{donc } \xi^\alpha \mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

□

Rmq : Les normes sont équivalentes :

$$\langle f, f \rangle_{H^k(\mathbb{R}^N)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha f | \partial^\alpha f \rangle_{L^2}$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{(2\pi)^N} \langle \xi^\alpha \mathcal{F}f | \xi^\alpha \mathcal{F}f \rangle_{L^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{|\alpha| \le k} \xi^{2\alpha} \right) |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^k |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi.$$

On note donc $H^s(\mathbb{R}^N) = H^s_2(\mathbb{R}^N)$.

Théorème: Pour tout $s \in \mathbb{N}$, $H^s(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert.

Preuve: Montrons qu'il est complet. Si $s = k \in \mathbb{N}$:

Soit $f_n \in H^k(\mathbb{R}^N)$ une suite de Cauchy.

Alors $f_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est une suite de Cauchy, $f_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^N)} g$ car complet

donc $f_n \longrightarrow g$ dans $S'(\mathbb{R}^N)$.

donc $\partial_\alpha f_n \longrightarrow \partial_\alpha g$ dans $S'(\mathbb{R}^N)$

Par continuité des dérivées partielles dans $S'(\mathbb{R}^N)$.

Or $\partial_\alpha f_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour tout $|\alpha| \le k$ et c'est une suite de Cauchy donc

$$\partial_\alpha f_n \to h_\alpha \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^N) \text{ donc dans } S'(\mathbb{R}^N)$$

Par unicité de la limite:

$$h_\alpha = \partial_\alpha g \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

Donc par la norme $g \in H^k(\mathbb{R}^N)$.

Proposition:

Soient $s, t \in \mathbb{R}$.

1) Si $s < t$ alors $H^t(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ est l'inclusion est continue

2) Si $s > 0$ on a avec des inclusions continues:

$$H^s(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^N).$$

3) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

4) $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ est le dual topo de $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Preuve :

3) Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ alors

$$\Phi := (1+|\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F} f \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

Par densité il existe $\Phi_m \in C_c^\infty$ tq

$$\Phi_m \longrightarrow \Phi \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^N).$$

On pose :

$$\varphi_m = (1+|\xi|^2)^{-s/2} \Phi_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

et $f_m = \mathcal{F}^{-1} \varphi_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Et on a :

$$\|f_m - f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \| (1+|\xi|^2)^{s/2} (\mathcal{F} f_m - \mathcal{F} f) \|_{L^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \| \Phi_m - \Phi \|_{L^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

□

Théorème plongement de Sobolev :

Soit $k \in \mathbb{N}$, pour tout $s > \frac{N}{2} + k$, on a :

$$H^s(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$$

$\frac{\alpha}{2} + 1 > \frac{N}{2} + 1$

$H^{\frac{N}{2}+1} \subset C^0$

Plus précis, $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ alors f est égale p.p à une fonction de $C^k(\mathbb{R}^N)$. De plus il existe $C_{k,N,s} > 0$ tq, $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^N)$,

$$\max_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\partial^\alpha f(x)| \le C_{N,k,s} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Théorème : Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est complet.

Preuve : Soit $f_m \in H^s(\mathbb{R}^d)$ une suite de Cauchy.

Alors on a :

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\,\mathcal{F}f_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

Ainsi $\mathcal{F}f_n \in L^2(\mathbb{R}^N, (1+|\xi|^2)^s)$.

et c'est une suite de Cauchy donc il existe $v \in L^2(\mathbb{R}^N, (1+|\xi|^2)^s)$ tel que :

$$\mathcal{F}f_n \longrightarrow g \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^N, (1+|\xi|^2)^s)$$

Or $g \in L^2(\mathbb{R}^N, (1+|\xi|^2)^s) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ donc il existe $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tel que :

$$\mathcal{F}f = g.$$

Ainsi

$$\mathcal{F}f_n \longrightarrow \mathcal{F}f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^N, (1+|\xi|^2)^s)$$

donc $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f_n \longrightarrow (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f$ dans L^2.

Ainsi $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et $f_n \to f$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

□

Avec ces notations on peut écrire :

Théorème :

Soient $\alpha > m$ et $u_0 \in H^{\frac{\alpha}{2}+1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Soient $A_1, \dots, A_m$ des éléments de $S_m(\mathbb{R})$.

Alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m))$ tel que :

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{j=1}^{m} A_j \partial_{x_j} u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ p.p.} \end{cases}$$

Lemme :

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ tel que pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $\partial_{x_j} u \in L^2$. Alors il existe $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ tel que : $u_n \longrightarrow u$ dans L^2

$\partial_{x_j} u_n \to \partial_{x_j} u$ dans L^2

Preuve :

On a $u \in L^2$ et $\partial_{x_j} u \in L^2$ donc

$$(1+|\xi|^2)^{1/2} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m).$$

Alors $\mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m, (1+|\xi|^2))$.

Donc $\exists v_n \in \mathcal{C}_c^\infty$ tq $v_n \longrightarrow \mathcal{F}u$ dans $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2))$.

Or $v_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ donc $v_n = \mathcal{F}\varphi_n$ avec $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$

$$(1+|\xi|^2)^{1/2} \mathcal{F}\varphi_n \longrightarrow (1+|\xi|^2)^{1/2} \mathcal{F}u \text{ dans } L^2.$$

En particulier $\mathcal{F}\varphi_n \longrightarrow \mathcal{F}u$ dans L^2

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi_n) = (-i\xi_j)\mathcal{F}(\varphi_n) \longrightarrow (-i\xi_j)\mathcal{F}(u) \underset{\longleftarrow}{=} \mathcal{F}(\partial_{x_j} u).$$

Ainsi $\varphi_n \to u$ et $\partial_{x_j}\varphi_n \to \partial_{x_j} u$. ∎