Inégalité de Hoeffding

Réf: Bernis Bernis p 116
Ouvrard, Probabilités 2 p 127.

Lemme: Soit X une variable aléatoire réelle, centrée et bornée $\mathbb{P}$-ps par 1 i.e $|X| \leq 1$ $\mathbb{P}$-ps, alors:

$$\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Preuve:

- Soit $x \in [-1,1]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a:

$$\frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2} t = tx$$

et $\frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1$

$\frac{1 \pm x}{2} \in [0,1]$.

Ainsi par convexité de $y \longmapsto \exp(y)$ on a:

$$\exp(tx) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, tX est p.s bornée donc $\exp(tX)$ aussi ainsi elle est intégrable, on a donc:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(tX)] &\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[(1-X)\exp(-t)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[(1+X)\exp(t)] \\ &= \frac{1}{2}\exp(-t) + \frac{1}{2}\exp(t) \quad \text{car } \mathbb{E}[X] = 0 \\ &= \operatorname{ch}(t)\end{aligned}$$

Or on a $\operatorname{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ en effet $\operatorname{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$ or $(2k)! \geqslant 2^k k!$.

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

On a bien le résultat.

□

Théorème: Inégalité de Hoeffding.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires réelles, indépendantes, centrées. On suppose qu'il existe une suite de réels strictement positifs $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que:

$$|X_n| \leq c_n \ \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

En notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right).$$

Preuve : On fixe $\varepsilon > 0$.

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

On a que les v.a $(\exp(tX_k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes (f° mesurable) de plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{|X_k|}{c_k} \leq 1 \quad p\text{-}s.$$

Ainsi on utilisant le Lemme précédent :

$$\mathbb{E}[\exp(tS_n)] = \mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left(tc_k \frac{X_k}{c_k}\right)\right]$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{t^2 c_k^2}{2}\right).$$

$$\leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right).$$

Ainsi en utilisant l'inégalité de Markov, comme exp est strictement croissante $\{S_n > \varepsilon\} = \{\exp(tS_n) > e^{t\varepsilon}\}$ on obtient :

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(\exp(tS_n) > e^{t\varepsilon})$$

$$\leq e^{-t\varepsilon}\, \mathbb{E}[\exp(tS_n)]$$

$$\leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2 - t\varepsilon\right).$$

Il nous reste à minimiser en t, on obtient $t_{min} = \dfrac{\varepsilon}{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}$ et donc :

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$$

On remarque que la suite $(-X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les mêmes hypothèses donc :

$$\mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right).$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{c\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right). \quad (2)$$

Application 2 : Convergence presque sûre.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on suppose qu'il existe un réel $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq n^{2\alpha-\beta}.$$

Alors on a :

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$$

Preuve Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité nous donne :

$$\mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{n^{2\alpha}\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$$

$$\leq 2\exp\left(-\frac{n^\beta \varepsilon^2}{2}\right).$$

Or $\exp\left(-\frac{n^\beta \varepsilon^2}{2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et ses positifs aussi la série suivante converge :

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|S_n| > n^{-\alpha}\varepsilon)$$

Par le Lemme de Borel-Cantelli, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} \left\{\left|\frac{S_n}{n^\alpha}\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

C'est à dire, $1 = \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} \left\{\left|\frac{S_n}{n^\alpha}\right| \leq \varepsilon\right\}\right)$

Or par dénombrabilité de $\mathbb{Q}_+^*$ on a :

$$1 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*} \liminf_{n\to+\infty} \left\{\left|\frac{S_n}{n^\alpha}\right| \leq \varepsilon\right\}\right)$$

i.e $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$. (4)

Application 3 : Soit $\mathcal{I} = [a,b]^d$ et $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathcal{I})$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a iid de loi uniforme sur $\mathcal{I}$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(Y_k) - \int_{\mathbb{R}^d} f \right| > \varepsilon \right) \leq 2 \exp\left(- \frac{n\varepsilon^2}{8 \|f\|_\infty^2} \right)$$

Preuve: On pose $X_n = f(Y_n) - \int_{\mathbb{R}^d} f$.

Alors on a: $|X_n| \leq 2\|f\|_\infty$.

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[f(Y_n)] - \int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^d} f - \int_{\mathbb{R}^d} f = 0$$

Ainsi avec l'inégalité de Hoeffding, pour $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(Y_k) - \int_{\mathbb{R}^d} f \right| \geq \varepsilon \right) = \mathbb{P}\left(S_n \geq n\varepsilon \right)$$

$$\leq 2 \exp\left(- \frac{n^2 \varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^{n} 4 \|f\|_\infty^2} \right)$$

$$\leq 2 \exp\left(- \frac{n\varepsilon^2}{8 \|f\|_\infty^2} \right).$$

∎