Inégalité de Heisenberg :

Réf : - H. Amrani, Analyse de Fourier ⇒ pas fan de la densité | Leçon : 250, 234, 209, 201
- Site de Matthias Hostein

Théorème : Inégalité de Heisenberg.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\pi}{2} \|f\|_2^4$$

Preuve :

Si $xf \notin L^2$ ou $\xi \hat{f} \notin L^2$ alors l'inégalité est trivialement vraie.

On note donc :

$$H_1^1(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; xf \in L^2(\mathbb{R}), \xi \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

Et on veut montrer l'inégalité pour $f \in H_1^1(\mathbb{R})$.

Etape 1 : $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors il est clair que $f \in H_1^1(\mathbb{R})$

De plus on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(\xi) = -i\xi \hat{f}(\xi).$$

Ainsi on a :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= 2\pi \|xf\|_2^2 \|f'\|_2^2 \quad \text{par Parseval}$$

$$\geq 2\pi \left[\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right) \right]^2 \quad \text{par Cauchy-Schwartz.}$$

or

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx + \int_{\mathbb{R}} x f'(x) \overline{f(x)} dx \right)$$

Par IPP $= \frac{1}{2}\left(\left[x|f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} x f'(x)\overline{f(x)}dx + \int_{\mathbb{R}} x f'(x)\overline{f(x)}dx \right)$

$= -\frac{1}{2}\|f\|_2^2$

D'où :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\pi}{4}\|f\|_2^4 = \frac{\pi}{2}\|f\|_2^4$$

Etape 2 : Soit $f \in H_1^1$, on va montrer le résultat par densité.
Pour cela, on remarque que en définissant :

$$\forall f,g \in H_1^1(\mathbb{R}), \quad \langle f,g\rangle_{H_1^1} = \int_{\mathbb{R}} f\bar{g} + \int_{\mathbb{R}} x^2 f\bar{g} + \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \hat{f}\bar{\hat{g}}$$

il un produit-scalaire hermitien sur $H_1^1(\mathbb{R})$, et que $(H_1^1(\mathbb{R}), \langle .,. \rangle)$ est un espace de Hilbert.
La norme associée étant :

$$\forall f \in H_1^1(\mathbb{R}), \quad \|f\|_{H_1^1} = \sqrt{\|f\|_2^2 + \|xf\|_2^2 + \|\xi\hat{f}\|_2^2}$$

Mq $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans H_1^1 pour $\|.\|_{H_1^1}$:

Sous-étape 1 : Soit $f \in H_1^1$ montrons qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H_1^1$ à support compact tel que :

$$f_n \xrightarrow{H_1^1} f$$

Pour cela on note $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

- $\chi(0) = 1$
- $0 \leq \chi \leq 1$
- $\mathrm{supp}(\chi) \subseteq [-1,1]$

exemple : $\chi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{1-x^2}} & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On pose donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\chi_n = \chi\left(\frac{\cdot}{n}\right)$, on remarque que l'on a :

$$\forall g \in L^2, \quad \|\chi_n g - g\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par convergence dominée car $\chi_n g \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} g$ et $|\chi_n g| \leq |g| \in L^2$.
En particulier en notant $f_n = f\chi_n$:

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \quad \text{et} \quad xf_n \xrightarrow{L^2} xf$$

De plus il est clair que f_n est à support compact et $f_n \in H^1_1$.
Il nous reste à montre que $\varphi \hat{f}_n \longrightarrow \varphi \hat{f}$, pour cela on remarque que pour presque tout $\varphi \in \mathbb{R}$ on a:

$$\varphi \widehat{f_n}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \varphi \, (\hat{f} * \hat{\chi}_n)(\varphi)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\varphi - y) \hat{f}(\varphi - y) \hat{\chi}_n(y) \, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\varphi - y) \, y \, \hat{\chi}_n(y) \, dy .$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left((y \hat{f}) * \hat{\chi}_n \right)(\varphi) + \frac{i}{2\pi} \left(\hat{f} * \widehat{\chi_n'} \right)(\varphi) \quad \text{car} \quad \widehat{\chi_n'}(\varphi) = -i y \hat{\chi}_n(\varphi).$$

Or il existe $g \in L^2$ tel que $\hat{g}(y) = y \hat{f}(y)$ ainsi on a:

$$(y \hat{f}) * \hat{\chi}_n = \hat{g} * \hat{\chi}_n = 2\pi \, \widehat{g \chi_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{L^2} 2\pi \hat{g} = 2\pi \varphi \hat{f}(\varphi).$$

En effet $g \chi_n \longrightarrow g$ dans L^2 et $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ et continue.
Pour l'autre terme on remarque que:

$$\hat{f} * \widehat{\chi_n'} = \widehat{f \chi_n'}$$

Et on a: $\chi_n' = \frac{1}{n} \chi'\left(\frac{\cdot}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{C.V.S}} 0$ d'où $f \chi_n' \xrightarrow{\text{C.V.S}} 0$.

De plus $|f \chi_n'| \leq |f| \, \|\chi'\|_\infty$ qui est L^2, donc par convergence dominée:

$$f \chi_n' \xrightarrow{L^2} 0$$

$$\text{d'où} \quad \widehat{f \chi_n'} \xrightarrow{L^2} 0 .$$

Ainsi on obtient bien que: $\varphi \hat{f}_n \xrightarrow{L^2} \varphi \hat{f}$

On a donc bien $\|f_n - f\|_{H^1_1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Sous-étape 2: Soit $f \in H^1_1$ à support compact, montrons que l'on peut approcher f par $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty_c$ dans H^1_1.
On note $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-R+1, R-1]$

De plus on considère φ une approximation de l'unité, c'est à dire :

- $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c \subset H^1_1$, $\text{supp}(\varphi) \subset [-1,1]$.
- $\varphi \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx = 1$.

On pose $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$.

Alors on sait déjà que pour tout $g \in L^2$, $g * \varphi_n \xrightarrow{L^2} g$ et $g * \varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Ainsi en notant $f_n = f * \varphi_n$, on a :

- $f_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{supp}(f_n) \subset [-R+1-\frac{1}{n}, R-1+\frac{1}{n}] \subset [-R,R]$
- $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} f$

Montrons que $xf_n \xrightarrow{L^2} xf$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-R}^{R} x^2 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq R^2 \|f_n - f\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrons que $\widehat{\varphi f_n} \xrightarrow{L^2} \widehat{\varphi f}$:

On remarque que l'on a : $\widehat{f_n} = \widehat{f * \varphi_n} = \widehat{f}\,\widehat{\varphi_n}$ ainsi.

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi^2 |\widehat{f_n}(\varphi) - \widehat{f}(\varphi)|^2 d\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi^4 |\widehat{f}(\varphi)|^2 (\widehat{\varphi_n}(\varphi) - 1)^2 d\varphi$$

Or on a $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ donc on a :

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi_n}(\varphi) = \widehat{\varphi}\left(\frac{\varphi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi = 1.$$

Ainsi on a pour presque tout $\varphi \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^2 |\widehat{f}(\varphi)|^2 (\widehat{\varphi_n}(\varphi) - 1)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

De plus on a la domination suivante :

$$\begin{aligned} \varphi^2 |\widehat{f}(\varphi)|^2 |\widehat{\varphi_n}(\varphi) - 1|^2 &\leq \varphi^2 |\widehat{f}(\varphi)|^2 (1 + \|\widehat{\varphi_n}\|_\infty)^2 \\ &\leq \varphi^2 |\widehat{f}(\varphi)|^2 (1 + \|\varphi_n\|_1)^2 \\ &\leq 2\varphi^2 |\widehat{f}(\varphi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

D'où par convergence dominée, $\varphi \hat{f}_n \xrightarrow{L^2} \varphi \hat{f}$, d'où le résultat.

Conclusion : Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ telle que : $\varphi_n \xrightarrow{H^1} f$.

Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x\varphi_n\|_2^2 \, \|\varphi \hat{\varphi}_n\|_2^2 \geq \frac{\pi}{2} \|\varphi_n\|_2^4$$

Ce qui donne par passage à la limite :

$$\|xf\|_2^2 \, \|\varphi \hat{f}\|_2^2 \geq \frac{\pi}{2} \|f\|_2^4 .$$

□

Remarque : (Cas d'égalité)

Dans le cas de la classe de Schwartz, il y a égalité si et seulement si on a égalité dans Cauchy-Schwartz donc ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lambda x f(x)$$

ssi f est une gaussienne i.e :

$$f(x) = Ce^{-\lambda x^2}$$

Lemme : Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ une approximation de l'unité, i.e telle que :

- $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-1,1]$
- $\int \varphi \, dx = 1$
- $\varphi \geq 0$

Alors en notant $\varphi_n = n\varphi(n.)$ on a :

$$\forall f \in L^p, \quad \varphi_n * f \xrightarrow{L^p} f .$$

Preuve : Voir L^p et dualité.

□