Zêta et nombres premiers

Réf: Rombaldi, Analyse pour l'agrégation p 345
Analyse, Gourdon p. 302.

Théorème: Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers alors:

$$\forall s>1,\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Application: Soit $(p_n)\in\mathbb{N}$ les nombres premiers alors:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} \text{ diverge.}$$

Preuve du théorème: On fixe $s>1$.

On munit $\mathbb{N}^*$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et on définit une loi de probabilité par:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{n^s} > 0$$

En effet, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = 1$.

Étape 1: Montrons que les évènements $(p\mathbb{N}^*)_{p\in\mathcal{P}}$ sont indépendants.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \{kp\}\right)$$

$\Big\downarrow$ évènement disjoints.

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{kp\})$$

$$= \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}\frac{1}{p^s} = \frac{1}{p^s}$$

Soit $p_1,\dots,p_n\in\mathbb{N}^*$ des nombres premiers alors:

$$\bigcap_{k=1}^{n} p_k\mathbb{N}^* = \operatorname{ppcm}(p_k, k\in\mathbb{N})\mathbb{N}^* = p_1\cdots p_n\mathbb{N}^*$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} p_k\mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{p_1^s\cdots p_n^s} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(p_k\mathbb{N}^*).$$

Les évènements sont donc bien indépendants.

Étape 2 : Convergence du produit.

On range les nombres premiers dans l'ordre croissant $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on sait que le produit converge si et seulement si la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right) \text{ converge.}$$

Or on sait que $p_n > n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ on a :

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_n^s} < \frac{1}{n^s}$$

ainsi comme $s>1$, la série converge donc le produit aussi car :

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^s}\right) \text{ et } s>1$$

Et les suites sont positives.

On a donc :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)^{-1} < +\infty.$$

Étape 3 : Conclusion.

On note l'évènement $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbb{N}^* \setminus p_k\mathbb{N}^*) = \{k\in\mathbb{N}^* \mid p_1 \nmid k, \dots, p_n \nmid k\}$.

(A_n) est donc une suite décroissante d'évènements.

De plus :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{k\in\mathbb{N}^* \mid \text{tq } \forall p\in\mathcal{P},\ p\nmid k\} = \{1\}.$$

Ainsi on a : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$

et $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\mathbb{P}(p_k\mathbb{N}^*)\right) \quad \text{par indépendance.}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{p_k^s}\right).$$

On a donc :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$$

$$= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

[7]

Preuve de l'application:

Etape 1: L'équivalent de ζ en 1.

On fait une comparaison intégrale,

$$\forall s>1, \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^s}\,dt \leq \frac{1}{n^s}$$

Ainsi on a, $\forall s>1, \quad \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s).$

On en déduit donc,

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$$

Ainsi,

$$\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$$

Etape 2:

Par l'absurde supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ converge.

Or on sait que:

$$-\log\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_n} \quad \text{donc} \quad \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1} \text{ converge.}$$

On note ℓ sa valeur comme on a, $\forall s>1, \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1} \leq \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ donc $\Big| \begin{matrix} p_n^s \geq p_n \\ 1 - \frac{1}{p_n^s} \geq 1 - \frac{1}{p_n} \end{matrix} \Big| \rightsquigarrow$

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1} \leq \ell.$$

i.e $\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{=} O(1)$ ce qui est absurde car $\zeta(s) \underset{s\to 1^+}{\sim} \frac{1}{(s-1)}$

[3]