Weierstrass par Bernstein

réf: Zuily-Queffélec, Analyse pour l'agreg p. 524

Théorème: Weierstrass.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, ω son module de continuité uniforme,
i.e $\omega(h) = \sup \{ |f(u) - f(v)|, |u-v| \leq h \}$.

Pour $n \geq 1$ on considère le polynôme de Bernstein,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Alors:

1) $B_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ uniformément sur $[0,1]$.

2) Il existe $C > 0$, une constante indépendante de f tel que:

$$\|f - B_n\|_\infty \leq C \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

3) Cette estimation est optimale, il existe une fonction lipschitzienne f pour laquelle:

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{b}{\sqrt{n}}$$

où b est une constante numérique.

Preuve:

1) Soit $x \in [0,1]$, on considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des variables aléatoires i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre x.
Alors la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi binomiale de paramètre n et x ainsi:

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(x)$$

Si on fixe $\delta \in]0,1[$, on a:

$$|f(x) - B_n(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right|$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \quad \text{or } \left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \omega(\delta) \text{ si } \left|x - \frac{S_n}{n}\right| \leq \delta.$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \text{ sinon}$$

$$\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right).$$

Or en utilisant l'inégalité de Markov, comme $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = x$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{\delta^2} \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(X_1)}{n\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

Ce qui donne:

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Ainsi on obtient que :

$$\forall \delta > 0, \quad \limsup_{n \to +\infty} \|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta).$$

Or f est continue sur $[0,1]$ donc uniformément continue ainsi $\omega(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0^+]{} 0$ d'où $B_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$

2) On utilise que : $\omega(\lambda h) \leq (\lambda + 1)\omega(h)$ pour $h, \lambda h \in [0,1]$.

Cela nous en particulier pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) \leq \left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Or on sait que :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right]$$

$$\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right]$$

$$\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right]\right)$$

$$\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n} - x\right)}\right)$$

$$\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right).$$

↓ Cauchy - Schwartz

↓ car $\mathrm{Var}(S_n - nx)$

$= \mathrm{Var}(S_n) = n x(1-x)$

or $\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{1}{2}$ donc $\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ d'où le résultat.

3) On prend, $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ alors $\omega(h) \leq h$, mais

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$= \left|B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right|$$

$$= \mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right|\right]$$

$$= \frac{1}{2^n}\,\mathbb{E}\left[\left|2S_n - n\right|\right]$$

Or $2S_n - n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_k = 2X_j - 1$ qui est donc une suite i.i.d de variables de Rademacher. En utilisant l'inégalité de Khintchine :

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2^n}\,\|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n\|_1$$

↓ Khintchine.

$$\geqslant \frac{1}{2^n}\, e^{-1/2}\,\|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n\|_2$$

$$\geqslant \frac{1}{2e^{1/2}}\,\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{2e^{1/2}}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Or $\|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n\|_2 = \left(\mathbb{E}\left[|2S_n - n|^2\right]\right)^{1/2}$

$= \sqrt{4\,\mathrm{Var}\left(S_n - \frac{n}{2}\right)} = \sqrt{n}\sqrt{4\,\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}$

$= \sqrt{n}$

□

Proposition : Inégalité de Khintchine p $\leq 1 \leq$.

Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des Rademacher i.i.d, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $X = \sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k$ alors on a :

$$\|X\|_p \leq \sqrt{2e}\,\sqrt{p}\,\|X\|_2$$

et $\|X\|_1 \geqslant e^{-1/2}\,\|X\|_2$.

Preuve : On montre que la deuxième, celle que l'on utilise.

On sait que $\mathbb{E}[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \mathbb{E}[\varepsilon_i]\,\mathbb{E}[\varepsilon_j] = 0$ si $i \neq j$.

Ainsi $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est orthonormé dans L^2, quitte à renormaliser $\|X\|_2 = 1$ on peut supposer que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1.$$

On définit $g = \prod_{j=1}^{n} (1 + i a_j \varepsilon_j)$ alors pour presque tout ω, on a :

$$|g(\omega)| = \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2 r_j^2(\omega)} = \prod_{j=1}^{n} \sqrt{1 + a_j^2}$$

$$\leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\exp(a_j^2)}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\right). \quad \text{ainsi } \|g\|_\infty \leq \sqrt{e}.$$

D'autre par, par indépendance des $\varepsilon_1, \to \varepsilon_n$, on a pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{E}[r_j g] = \mathbb{E}\Big[r_j(1+a_j r_j) \prod_{k \neq j} (1 + i a_k r_k)\Big]$$

$$= \mathbb{E}[r_j(1+i a_j r_j)] \prod_{k \neq j} \mathbb{E}[1 + i a_k r_k].$$

$$= \mathbb{E}[r_j + i a_j] \prod_{k \neq j} 1.$$

$$= i a_j.$$

Ainsi $|\mathbb{E}[Xg]| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{E}[a_j g]\Big| = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1.$

Or on a:

$$\|X\|_1 \geq \frac{|\mathbb{E}[Xg]|}{\|g\|_\infty} \geq e^{-1/2}.$$

□

Lemme: Soit ω le module de continuité, on a pour $h, \lambda h \in [0,1]$.

$$\omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$$

IV.49.

Preuve: On a pour tout $h_1, h_2 \in [0,1]$ tq $h_1 + h_2 \in [0,1]$.

$$\omega(h_1 + h_2) \leq \omega(h_1) + \omega(h_2).$$

Alors en particulier, $\omega(nh) \leq n\omega(h)$.

Soit n tel que $n \leq \lambda \leq n+1$ alors comme ω est croissante.

$$\omega(\lambda h) \leq \omega((n+1)h) \leq (n+1)\omega(h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$$

□