Théorème taubérien fort

réf: Gourdon, Analyse p.305.
131, clypt. p 545.

Théorème: taubérien de Hardy - Littlewood.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ et tel que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1. Alors on suppose qu'il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell \text{ alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell.$$

Preuve: Quitte à considérer la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_n = \begin{cases} a_n \text{ si } a\neq 0 \\ a_0 - \ell \text{ sinon} \end{cases}$ on peut supposer $\ell = 0$.
On considère:

$$\Phi = \left\{ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \sum a_n \varphi(x^n) \text{ converge } \forall x\in[0,1[\text{ et } \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = 0 \right\}$$

Étape 1: Supposons qu'il existe $0<\delta>1$ tel que $\mathbb{1}_{[1-\delta,1]} \in \Phi$.
Ainsi comme on a $\frac{1}{e}^{1/N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$ et $\frac{1}{e}^{1/N} < 1$, et $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n}{N}} < \frac{1}{e} \iff \frac{n}{N} > 1 \iff n > N$

$$0 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n\geq 0} a_n \mathbb{1}_{[\frac{1}{e},1]}\left(\frac{1}{e}^{1/N}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n\geq 0} a_n.$$

L'objectif est donc d'approcher cette indicatrice par des fonctions plus régulières.

Étape 2: Les polynômes dans Φ.
Soit p une fonction polynomiale nulle en 0. Mq: $p\in\Phi$.
Si $h(x) = x^k$ avec $k\geq 1$ alors,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n h(x^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^{kn}$$

qui converge pour tout $x\in[0,1[$.
De plus,

$$\forall x\in[0,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h(x^n) = f(x^k) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$$

Donc $h\in\Phi$.
Par linéarité on obtient que $p\in\Phi$.

Étape 3 : Soit $g = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$, approchons g par des polynômes, soit $\varepsilon > 0$.

On pose donc la fonction :

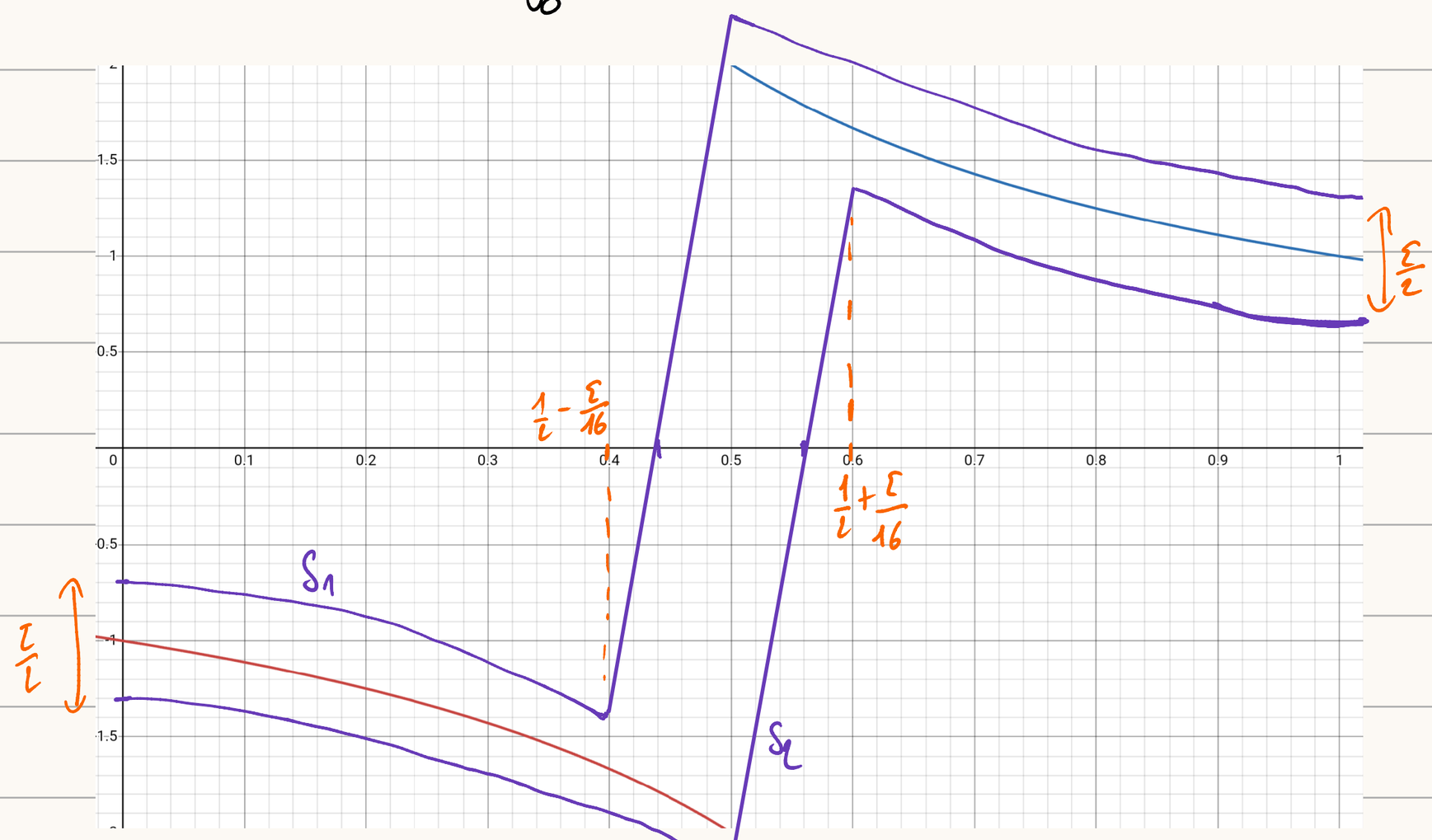
$$\forall x \in [0,1],\quad h(x) = \frac{g(x)-x}{x(1-x)} = \begin{cases} \frac{-1}{1-x} & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

h est une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$, avec une unique discontinuité en $\frac{1}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $s_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $s_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues et telles que :

$$\int_0^1 |s_1 - s_2| \leq \varepsilon.$$

En effet :



Comme les s_i sont continues par le théorème de Weierstrass l'existe t_1, t_2 des fonctions polynomiales tel que

$$\|t_1 - s_1\|_\infty \leq \varepsilon \text{ et } \|t_2 - s_2\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On pose donc $u_1 = t_1 - \varepsilon$ et $u_2 = t_2 + \varepsilon$ on a donc :

$$u_1 < s_1 \leq h \leq s_2 < u_2$$

Et de plus

$$\int_0^1 u_2(x) - u_1(x)\,dx \leq \int_0^1 s_2(x) - s_1(x) + 4\varepsilon \,dx < 5\varepsilon.$$

On peut maintenant définir $p_i = x + x(1-x)u_i(x)$ qui est une fonction polynomiale qui vérifie de plus : $\cdot\ p_1(0) = p_2(0) = 0$ et $p_1(1) = p_2(1) = 1$.

- Pour $x \in [0,1[$,

$$u_1(x) \leq \frac{g(x)-x}{x(1-x)} \leq u_2(x) \text{ donc } \quad p_1(x) \leq g(x) \leq p_2(x).$$

- Et,

$$\int_0^1 \frac{p_1(x) - p_2(x)}{x(1-x)}\,dx = \int_0^1 u_1(x) - u_2(x)\,dx \leq 5\varepsilon.$$

Étape 4 : Mq : $g \in \overline{\Phi}$

1. Soit $x \in [0,1[$, il existe N tq, $\forall n \geq N$, $x^n < \frac{1}{2}$ donc $g(x^n) = 0$.

Ainsi la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n g(x^n)$ a qu'un nbre fini de terme non nul donc converge.

2. On note $M > 0$ tq :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq \frac{M}{n}.$$

On sait que $p_1 \leq g \leq p_2$ donc pour $x \in [0,1[$:

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| (p_2 - p_1)(x^n) \quad \text{car } a_0 g(x^0) - a_0 p_1(x^0) = a_0 - a_0 = 0.$$

$$\leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \quad \text{où } q(x) = \frac{p_1(x) - p_2(x)}{x(1-x)} \in \mathbb{R}[X].$$

$$\leq M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n)$$

Or $p_1 \in \overline{\Phi}$ donc $\exists \lambda \in [0,1[$, $\forall x \in [\lambda, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) < \varepsilon$.

De plus soit $e_k : x \longmapsto x^k$ $(k \in \mathbb{N})$ alors e_k est bornée sur $[0,1]$ donc pour $x \in [0,1[$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x^n e_k(x^n)$ est convergente donc par linéarité $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x^n q(x^n)$ aussi.

De plus,

$$\forall x \in [0,1[, \quad (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n e_k(x^n) = (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{1+k})^n = (1-x) \frac{x^{1+k}}{1-x^{k+1}} = \frac{x^{1+k}}{1+x+\dots+x^k} \xrightarrow[x \to 1^-]{} \frac{1}{k+1} = \int_0^1 e_k(t)\,dt$$

Ainsi par linéarité, on a :

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n) = \int_0^1 q(t)\,dt \leq 5\varepsilon.$$

Quitte à diminuer λ, on peut donc supposer que $\forall x \in [\lambda, 1]$,

$$(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n q(x^n) \leq 6\varepsilon.$$

Ainsi on obtient que :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) \right| \leq \varepsilon + 6M\varepsilon = (1+6M)\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire on a $g = \mathbb{1}_{[1/2,1]} \in \overline{\Phi}$, d'où le résultat.

□

Application : Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $c_n(f) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{|n|}\right)$. Alors la série de Fourier de f converge simplement (et même uniformément) vers f.

Preuve :

Pour $r \in [0,1[$, on définit la fonction :

$$P_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx}.$$

Il s'agit du noyau de Poisson, en montrons que $(P_r)_{r\to 1^-}$ est une approximation de l'unité on obtient que :

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |P_r * f(x) - f(x)| \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$$

Ainsi la sommation d'Abel de la série de Fourier de f converge vers f. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on pose :

$$a_n(x) := c_n(f) e^{inx}$$

$$\sup |a_n(x)| = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{|n|}\right)$$

Ainsi par le théorème,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \text{ CV et a pour somme } f(x).$$

En reprenant la preuve la CV est même uniforme. □

Lemme : Existence des fonctions s_1 et s_2.

Preuve : On définit :

$$s_1(x) = \begin{cases} h(x) + \frac{\varepsilon}{4} & \text{si } x \in [0,1] \setminus [\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{16}, \frac{1}{2}] \\ \text{droite reliant } s_1(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{16}) = h(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{16}) + \frac{\varepsilon}{4} & \text{et } s_1(\frac{1}{2}) = h(\frac{1}{2}) + \frac{\varepsilon}{4} \end{cases}$$

De même :

$$s_2(x) = \begin{cases} h(x) - \frac{\varepsilon}{4} & \text{si } x \in [0,1] \setminus [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{16}] \\ \text{Droite affine} \end{cases}$$

On a alors $s_2(x) - s_1(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} & \text{sur } [0,1] \setminus [\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{16}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{16}] \\ 4 + \frac{\varepsilon}{2} & \text{affine} \end{cases}$

Дак $\int_0^1 |g_2(x) - g_1(x)| = \int_{[0,1]\setminus A_\varepsilon} |g_2 - g_1| + \int_{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{16}}^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{16}} |g_2 - g_1|$

$\leq \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right) + \left(4 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon.$

□