Théorème de Morgenstern

réf: Un max de Maths, Théorème Zavidovique p158 → Preuve.
Cours d'Analyse fonctionnelle, Daniel Li, p111 → Théorème de Baire
Analyse, X. Gourdon → résultats séries entières

Théorème (Morgenstern)
L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ nulle part analytique sur $[0,1]$ est dense dans $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ muni de la topologie de la convergence uniformes de toutes les dérivées.

On va utiliser le résultat suivant.

Proposition (Critère de Cauchy-Hadamard)
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, alors f est analytique en $a \in [0,1]$ si et seulement si

$$L := \limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \right)^{1/n} < +\infty$$

Dans ce cas le rayon de convergence de la série entière de f en a est $\frac{1}{L}$.

Preuve du théorème:

Etape 1: $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ muni de cette topologie est complet.

On munit $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ de la distance suivant suivante:

$$d : \mathcal{C}^\infty([0,1])^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f, g \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{k+1}} \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}$$

Ainsi pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ e^{-k-1} \frac{\|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty}{1 + \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty} \leq d(f,g) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{e^{i+1}} \frac{\|f^{(i)} - g^{(i)}\|_\infty}{1 + \|f^{(i)} - g^{(i)}\|_\infty} + \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

Donc si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ alors.

$$d(f_n, f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}, \ f_n^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f^{(k)}$$

La topologie est métrisable.

Montrons que $(\mathcal{C}^\infty([0,1]), d)$ est complet.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ une suite de Cauchy alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left(f_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ qui est un espace complet.

Donc il existe $g_k \in \mathcal{C}^0([0,1])$ tel que $f_m^{(k)} \xrightarrow{\|.\|_\infty} g_k$

Ainsi par un résultat classique $g_0 \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, $g_0^{(k)} = g_k$ et on a donc :

$$d(f_n, g_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $(\mathcal{C}^\infty([0,1]), d)$ est un espace complet.

Etape 2 : Caractériser les fonctions analytiques en un point.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$, si f est analytique en un point $a \in]0,1[$ alors par le critère de Cauchy-Hadamard on a :

$$\limsup_{k\to+\infty} \left(\left(\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!} \right)^{1/k} \right) < +\infty$$

De plus si f est analytique en a alors elle est dans un voisinage de a. Donc par densité de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ dans $[0,1]$, on peut seulement s'intéresser au point rationnelle où f est analytique.

On pose donc pour $a \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ et $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$T(a,\lambda) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty([0,1]) \;\middle|\; \forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{|f^{(k)}(a)|}{k!} \leq \lambda^k \right\}.$$

Par la discussion précédente on a l'équivalence suivante

$$f \in \bigcup_{a \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T(a,\lambda) \iff \exists a \in [0,1] \text{ tq } f \text{ est analytique en } a.$$

$$f \notin \bigcup_{a \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T(a,\lambda) \iff \forall a \in [0,1], \; f \text{ n'est pas analytique en } a.$$

Etape 3 : $T(a,n)$ est un fermé d'intérieur vide.

Soit $a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ et $\lambda \in \mathbb{N}$, montrons que $T(a,\lambda)$ est fermée d'intérieur vide.

$T(a,\lambda)$ fermée :

Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $T(a,\lambda)$ qui converge vers $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_m^{(k)} \xrightarrow{\|.\|_\infty} f^{(k)}$

Ainsi par passage à la limite, comme pour $k \in \mathbb{N}$:

$$|f_m^{(k)}(a)| \leq k!\,\lambda^k$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} |f^{(k)}(a)| \leq k!\,\lambda^k$$

Donc $f \in T(a,\lambda)$

$T(a,\lambda)$ d'intérieur vide :

Soit $f \in T(a,\lambda)$ et $\varepsilon > 0$. Le but est de trouver g tel que $d(f,g) < \varepsilon$ et $g \notin T(a,\lambda)$. Pour cela

on va perturber f avec un cosinus qui oscille très vite.
On définit donc

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2} b^{-k} \cos(b(x-a))$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $b \geq 2$ sont des paramètres.

On remarque que :

$$|g^{(2k)}(a) - f^{(2k)}(a)| = \frac{\varepsilon}{2} b^{k}.$$

Et on a :

$$\forall n \leq k, \quad \|g^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} b^{n-k}$$

Ainsi on peut estimer la distance entre f et g :

$$d(f,g) \leq \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\|g^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty}{1 + \|g^{(n)} - f^{(n)}\|_\infty} + \sum_{n=k}^{+\infty} 2^{-n+1}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\varepsilon}{2} b^{n-k} + 2^{-k}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} b^{-k} \frac{b^k - 1}{b-1} + 2^{-k+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-k}$$

On choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, on a alors $d(f,g) \leq \varepsilon$.
De plus si on choit b tel que :

$$\frac{\varepsilon}{2} b^k > 2(2k)! \lambda^{2k}$$

Alors on a par inégalité triangulaire :

$$|g^{(2k)}(a)| \geq |f^{(2k)}(a) - g^{(2k)}(a)| - |f^{(2k)}(a)| \geq \frac{\varepsilon}{2} b^k - (2k)! \lambda^{2k} > (2k)! \lambda^{2k}$$

Ainsi $g \notin T(a,\lambda)$.

Étape 4 : Conclusion

Pour $a \in \mathbb{Q}$ et $\lambda \in \mathbb{N}$, $T(a,\lambda)$ est un fermé d'intérieur vide. Ainsi par le théorème de Baire :

$$\bigcup_{a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T(a,\lambda) \right)$$

est d'intérieur vide. Son complémentaire est donc dense dans $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ et par la discussion du début il est constitué des fonctions nulle part analytiques.

Exemple : Fonction analytique nulle part.

Pour cela on construit la fonction C^∞ (par convergence normale) :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k!x)}{(k!)^k}$$

Car pour $n \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{k \geq 0} (k!)^{n-k}$ converge.

On va montrer que F est analytique nulle part sur $\mathbb{R}$.

1. F n'est pas analytique en 0, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$F^{(2m)}(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k!)^{2m-k} \geq (m!)^m$$

Ainsi, $\left(\frac{|F^{(2m)}(0)|}{(2m)!} \right)^{\frac{1}{2m}} \geqslant \frac{\sqrt{m!}}{((2m)!)^{\frac{1}{2m}}} \sim \frac{e\sqrt{m!}}{2m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$

Ce qui donne : $\limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = +\infty$.

2. Pour tous $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F\left(x + \frac{2\pi p}{q}\right) - f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^k} \left(\cos\left(k!x + k! \cdot \frac{2\pi p}{q}\right) - \cos(k!x) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{(k!)^k} \left[\cos\left(k!x + k! \cdot \frac{2\pi p}{q}\right) - \cos(k!x) \right]$$

Donc $x \longmapsto f\left(x + \frac{2\pi p}{q}\right) - F(x)$ est analytique sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0. Ainsi, f ne peut pas être analytique en $\frac{2\pi p}{q}$. Donc par densité de $2\pi\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a que F est nulle part analytique.

□