# Théorème central limite

réf: Barnis Barnis, 209

Zuily-Queffelec, 548 + 544

**Définition**: Convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires alors on dit que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^0,\quad \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

**Lemme**: On a l'équivalence suivante:

1) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

2) $\forall f \in \mathcal{C}_c^0,\quad \mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$.

**Preuve**: 1) $\Rightarrow$ 2): Immédiat.

2) $\Rightarrow$ 1): Soit $f \in \mathcal{C}_b^0$ et $\varepsilon > 0$.

On note $A > 0$ tel que $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}\setminus A) \leq \varepsilon$ et on pose $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ tq:

1) $\varphi = 1$ sur $[-A, A]$

2) $\varphi = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus[-2A, 2A]$.

3) $0 \leq \varphi \leq 1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi on a:

$$\mathbb{E}[1-\varphi(X)] \leq \mathbb{P}_X(\mathbb{R}\setminus[-A,A]) < \varepsilon.$$

On a donc:

$$\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}\left[f(X_n)(1-\varphi(X_n))\right] + \mathbb{E}[f(X_n)\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)\varphi(X)]$$
$$+ \mathbb{E}[f(X)(1-\varphi(X))]$$

Or

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\mathbb{E}[f(X_n)(1-\varphi(X_n))]\right| \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \|f\|_\infty \left(1 - \mathbb{E}[\varphi(X_n)]\right) = \|f\|_\infty \mathbb{E}[1-\varphi(X)] \leq \varepsilon \|f\|_\infty.$$

Rt $\left|\mathbb{E}[f(X)(1-\varphi(X))]\right| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$.

De plus, $f\varphi \in \mathcal{C}_c^0$ donc $\mathbb{E}[f(X_n)\varphi(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)\varphi(X)]$.

Conclusion: $\forall \varepsilon > 0$, $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| \mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)] \right| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$.

On a donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. ■

## Théorème : de Levy.

On a l'équivalence suivante :

1) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

2) $\varphi_{X_n} \longrightarrow \varphi_X$ simplement sur $\mathbb{R}$.

## Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2) : Clair car les fonctions $x \longmapsto e^{itx}$ sont continues bornées.

2) $\Rightarrow$ 1) :

Comme on a vu par le lemme, il suffit de montrer que pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty$ on a :

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)].$$

Cas 1 : Supposons $f \in \mathcal{C}_c^\infty$, en particulier $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Par surjectivité de la transformée de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{itx}\, dt.$$

Ainsi on a : $\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} g(t) e^{itX_n} dt\right]$.

Or $g$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et les constantes sont intégrables par rapport à $\mathbb{P}_{X_n}$, on a par le théorème de Fubini :

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, \mathbb{E}[e^{itX_n}]\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} g(t)\, \mathbb{E}[e^{itX}]\, dt = \mathbb{E}[f(X)]$$

On a le passage à la limite par CVD car : $g(t)\, \mathbb{E}[e^{itX_n}] \xrightarrow{\text{C.V.S}} g(t)\, \mathbb{E}[e^{itX}]$.

et $|g(t)\, \mathbb{E}[e^{itX_n}]| \leq |g(t)| \in L^1$ car $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Cas 2 : $f \in \mathcal{C}_c^0$.

On fixe $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$.

Ainsi :

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq |\mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n)] - \mathbb{E}[f_\varepsilon(X)]| + |\mathbb{E}[f(X_n) - f_\varepsilon(X_n)]| + |\mathbb{E}[f(X)] - \mathbb{E}[f_\varepsilon(X)]|$$

$$\leq \left| \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n)] - \mathbb{E}[f_\varepsilon(X)] \right| + 2\varepsilon .$$

Donc comme $f_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim \left| \mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)] \right| \leq 2\varepsilon$.

D'où le résultat.

∎

**Théorème central limite :**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires réelles, indépendantes, identiquement distribuées, et éléments de $L^2$. On suppose que $\mathrm{Var}(X_1) = 0$, alors on a :

$$\sqrt{n}\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}[X_1] \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$$

**Preuve :** Quitte à remplacer $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$Y_n = \frac{X_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}}$$

Ops que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_1) = 1$.

Par le théorème de Levy il suffit de montrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ des fonctions caractéristiques $\left( \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ (où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$) vers :

$$\varphi_{\mathcal{N}(0,1)} : t \longmapsto \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

On fixe $t \in \mathbb{R}$.

Or comme les $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d on a pour :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left[ e^{i \frac{t}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k} \right]$$

$$= \overbrace{\prod_{k=1}^{n}}^{n} \mathbb{E}\left[ e^{it \frac{X_k}{\sqrt{n}}} \right]$$

$$= \overbrace{\prod_{k=1}^{n}}^{n} \left( \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) = \left( \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n .$$

Or comme $X_1 \in L^2$, $\varphi_{X_1} \in \mathcal{C}^2$ et on a par la formule de Taylor :

$$\varphi_{X_1}(h) = \varphi_{X_1}(0) + \varphi'_{X_1}(0)\, h + \varphi''_{X_1}(0) \frac{h^2}{2} + \underset{h \to +\infty}{o}(h^2)$$

Or on sait que :

$$\varphi_{X_1}(0) = 1, \quad \varphi'_{X_1}(0) = i\,\mathbb{E}[X_1] = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''_{X_1}(0) = -\mathrm{Var}(X_1) - \mathbb{E}[X_1]^2 = -1 .$$

Ce qui donne : $\varphi_{X_1}(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2)$

Or $\frac{t}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc à partir d'un certain rang,

$$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \in D(1, \tfrac{1}{2}).$$

En notant Log la détermination principale du logarithme, on a :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$= \exp\left(n \operatorname{Log}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right).$$

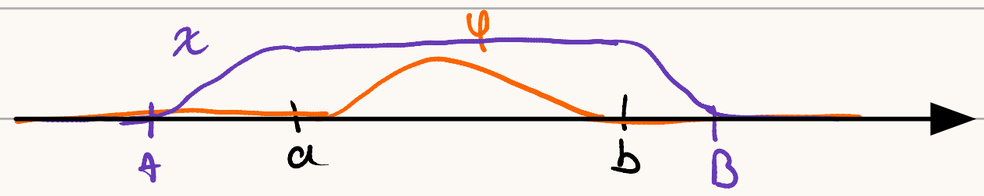
Or Log est holomorphe donc analytique sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et a le même développement que ln, ainsi :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \underset{n\to\infty}{o}(1)\right).$$

Par continuité de l'exponentielle on a bien : $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{C.V.S} \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}$. ∎

**Lemme :** $\mathcal{C}_c^\infty$ dense dans $\mathcal{C}_c^0$ pour $\|.\|_\infty$.

**Preuve :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^0$ et $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [a,b]$.




Soit $\chi$ une fonction plateau i.e $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\chi = 1$ sur $[a,b]$

$\operatorname{supp}(\chi) \subseteq [A,B]$

$0 \le \chi \le 1$.

Alors soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P_n \xrightarrow{\|.\|_{\infty,K}} \varphi$ sur $[A,B] =: K$

On a bien

$$|[(\chi P_n - \varphi)(t)| \le \begin{cases} |P_n(t) - \varphi(t)| & \text{si } t\in[a,b] \\ |P_n(t)| & \text{si } t\in[A,B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \le \|P_n - \varphi\|_{\infty,K}$$

donc $\|\chi P_n - \varphi\|_\infty \le \|P_n - \varphi\|_{\infty,K} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ∎

Application : Equivalent de Stirling. Ref : Garet Kurtzmann, De l'intégration aux probabilités.

## Application : Intervalle de confiance asymptotique.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$. Pour $\alpha \in ]0,1[$,

$$\left[ \bar{X}_n - t_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}, \bar{X}_n + t_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique pour $p$ de probabilité $1-\alpha$.

($t_\alpha > 0$ et tel que $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \in [-t_\alpha, t_\alpha]) = 1-\alpha$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$)

**Preuve** : Par la loi faible des grands nombres, on a :

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} p$$

Comme on compose par des fonctions continues, on a :

$$\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \sqrt{p(1-p)}$$

De plus le TCL nous donne : $\sqrt{n}\,\frac{(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Donc par le Lemme de Slutsky, on a :

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}$ et $N \sim \mathcal{N}(0,1)$.

On a alors :

$$\mathbb{P}(Y_n \in [-t_\alpha, t_\alpha]) \longrightarrow \mathbb{P}(N \in [-t_\alpha, t_\alpha]) = 1-\alpha.$$

donc $\mathbb{P}\left(\bar{X}_n - t_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}} \le p \le \bar{X}_n + t_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n}}\right) \longrightarrow 1-\alpha$.

∎

**Remarque** : Dérivée de $\varphi_X$.

On a :

$\forall t$, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ donc $\varphi_X'(t) = \mathbb{E}[iX e^{itX}]$ donc $\varphi_X'(0) = i\,\mathbb{E}[X]$

donc $\varphi_X''(t) = -\mathbb{E}[X^2 e^{itX}]$ donc $\varphi_X''(0) = -\mathbb{E}[X^2] = -(\mathbb{E}[X])^2 - \mathrm{Var}(X)$.

car $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$