Théorème de Stabilité de Lyapounov

réf: Berthelin, Equations différentielles p 254.
Zuily-Queffelec, Analyse pour l'agreg p. 384.

Théorème: Stabilité par linéarisation.

Soit $f: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ tq $f(0)=0$.
On pose $A = d_0 f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose que toutes les valeurs propres λ_j de A vérifie: $Re(\lambda_j) < 0$.
Alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y_1 \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\|y_1\| \leq \alpha$ la solution $t \longmapsto y_{0,y_1}(t)$ de

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_1 \end{cases}$$

existe pour $t \geq 0$ et $y_{0,y_1}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ i.e 0 est un point asymptotiquement stable de l'équa diff.

Preuve: On définit la fonction g comme:

$$\forall y \in \mathbb{C}^n, \quad g(y) = f(y) - Ay.$$

Alors on sait que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ et $g(z) = \underset{z\to 0}{o}(\|z\|)$.

Soit y_{y_1} solution maximale de: $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) = Ay(t) + g(y(t)) \\ y(0) = y_1 \end{cases}$

On note I son intervalle d'existence et $[0, T^*_{y_1}[= I \cap \mathbb{R}^+$. Par la formule de Duhamel on sait que y vérifie:

$$\forall t \in [0, T^*_{y_1}[, \quad y_{y_1}(t) = e^{At} y_1 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(y_{y_1}(s))\, ds$$

Or les sp de A sont de parties réelles strictement négative donc il existe $a, C_1 > 0$ tel que:

$$\forall t \geq 0, \quad \|e^{At}\| \leq C_1 e^{-at}$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\varepsilon > \delta > 0$ tel que $\forall z \in \overline{B(0,\delta)}$:

$$\|f(z) - Az\| = \|g(z)\| \leq \frac{a}{\varepsilon C_1} \|z\|$$

On suppose $y_1 \in B\left(0, \min\left(\delta, \frac{\delta}{\varepsilon C_1}\right)\right)$ et on note:

$$\mathcal{T} = \left\{ T \in [0, T^*_{y_1}[\;\middle|\; |y_{y_1}(t)| \leq \delta, \forall t \in [0,T] \right\}.$$

On sait que $0 \in \mathcal{T}$ et que $\mathcal{T}$ est un intervalle car si $T_0 \in \mathcal{T}$ alors pour $T_1 \leq T_0$, $T_1 \in \mathcal{T}$.
On note $\alpha = \sup \mathcal{T}$, **Mq: $\alpha = T^*_{y_1}$.**
Par l'absurde on suppose $\alpha < T^*$ alors comme pour tout $T < \alpha$ on a $|y_{y_1}(T)| \leq \delta$, par continuité de

y sur $[0,\alpha]$, $\quad |y(\alpha)| \leq \delta < \varepsilon$

Or on sait que :

$$\forall t \in [0,\alpha], \quad y_{y_1}(t) = e^{tA} y_1 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(y_{y_1}(s))\, ds$$

Et $\forall t \in [0,\alpha]$, $\| y_{y_1}(t) \| < \delta$, donc on a :

$$\| g(y_{y_1}(t)) \| \leq \frac{a}{2C_1} \| y_{y_1}(t) \|$$

Ainsi on a donc :

$$\| y_{y_1}(t) \| \leq \| e^{tA} \| \, \| y_1 \| + \int_0^t \frac{a}{2C_1} \| e^{(t-s)A} \| \, \| y_{y_1}(s) \| \, ds$$

$$\leq C_1 e^{-at} \| y_1 \| + \int_0^t \frac{a}{2} e^{-a(t-s)} \| y_{y_1}(s) \| ds$$

En notant $\varphi(t) = e^{at} \| y_{y_1}(t) \|$ on obtient : $\varphi(t) \leq C_1 \| y_1 \| + \frac{a}{2} \int_0^t \varphi(s)\, ds$

Par le Lemme de Gronwall, comme $\varphi \geq 0$, on a :

$$\forall t \in [0,\alpha], \quad \varphi(t) \leq C_1 \| y_1 \| e^{\frac{a}{2} t}$$

Ainsi on obtient donc :

$$\forall t \in [0,\alpha], \quad \| y(t) \| \leq C_1 \| y_1 \| e^{-\frac{a}{2} t} \leq \frac{\delta}{2} e^{-\frac{a}{2} t} < \frac{\delta}{2}$$

Or y est continue sur $[0, T^\alpha_{y_1}[$ et $\alpha < T^\alpha$ donc il existe $\eta_0 > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0, \alpha + \varepsilon_0[, \quad \| y_{y_1}(t) \| \leq \delta$$

Absurde.

Ainsi $\alpha = T^\alpha_{y_1}$.

Conclusion : Pour $y_1 \in B(0, \min(\delta, \frac{\delta}{2C_1}))$, on a

. $\forall t \in [0, T^\alpha_{y_1}[$, $\| y_{y_1}(t) \| \leq \delta < \varepsilon$ ainsi par le théorème des bouts, $T^\alpha_{y_1} = +\infty$.

La solution est donc globale en temps positif, et $\forall t$, $\| y_{y_1}(t) \| \leq \varepsilon \Rightarrow 0$ est un point d'équilibre stable

De plus comme,

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \| y_{y_1}(t) \| \leq \delta$$

On a d'après les calculs précédents :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \| y_{y_1}(t) \| \leq C_1 \| y_1 \| e^{-\frac{a}{2} t}$$

Donc $y(t) \xrightarrow[t \to T^\alpha]{} 0$ la solution est asymptotiquement stable $\Rightarrow 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable

FZ

Lemme: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $a > 0$ tq $\max_j \mathrm{Re}(\lambda_j) < -a < 0$ alors il existe une constante $C > 0$ tel que:

$$\|e^{At}\| \leq Ce^{-at}$$

Preuve:

Méthode 1: On note $\chi_A = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_j)^{m_j}$ alors

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} E_j \quad \text{où } E_j = \mathrm{Ker}((A - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j})$$

Pour $x \in \mathbb{C}^n$, il s'écrit de manière unique:

$$x = x_1 + \dots + x_k \quad \text{avec } x_j = \mathrm{Ker}((A - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j}).$$

Chaque sous-espace est stable par A et:

$$\exp(tA)\, x_j = e^{t\lambda_j} e^{t(A - \lambda_j \mathrm{Id})} x_j = e^{t\lambda_j} \left(\sum_{0 \leq p < m_j} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j \mathrm{Id})^p \right) x_j$$

Il existe donc $C_j > 0$ une constante tel que

$$\|e^{tA} x_j\| \leq e^{t\mathrm{Re}(\lambda_j)} C_j (1 + |t|)^{n-1} \|x_j\|$$

Ainsi pour $x \in \mathbb{C}^n$ avec $C = \sup C_j$ on a:

$$\|e^{tA} x\| \leq C(1 + |t|)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\mathrm{Re}\lambda_j} \right) \|x\|$$

↳ par équivalence des normes.

Or pour $\max_j \mathrm{Re}(\lambda_j) < -a < 0$ on a:

$$(1 + |t|^{n-1})\, e^{t\mathrm{Re}\lambda_j}\, e^{at} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

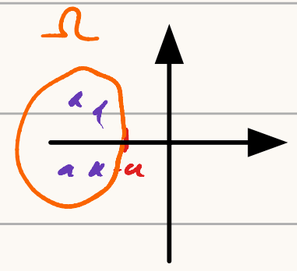
Donc il existe une constante C' tel que: $\forall x \in \mathbb{C}^n$,

$$\|e^{tA} x\| \leq C' e^{-at} \|x\|$$

Ainsi on a: $\|e^{tA}\| \leq C' e^{-at}$. ∎

Méthode 2: On note Ω un ouvert borné tel que $\mathrm{spec}(A) \subseteq \Omega$ et $\forall z \in \overline{\Omega}$, $\mathrm{Re}(z) \leq -a$.

① $$\exp(tA) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} (z\mathrm{Id} - A)^{-1} e^{tz}\, dz.$$



Ainsi on a: $\|\exp(tA)\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \|(z\mathrm{Id} - A)^{-1}\|\, e^{t\mathrm{Re}(z)}\, dz$ or $z \longmapsto \|(z\mathrm{Id} - A)^{-1}\|$ est donc bornée sur le compact $\partial\Omega$ et $\mathrm{Re}(z) \leq -a$ dans $\overline{\Omega}$.

$$\leq \frac{M}{2\pi} L(\partial\Omega)\, e^{-at}$$

Il reste à montrer ①, pour cela on remarque:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} e^{tz}(zId-A)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{z}e^{tz}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{z^n}\right)dz.$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{e^{tz}}{z^{n+1}}\,dz\,A^n$$ ↘ par cv normale

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} z^{k-n+1}\,dz\,A^n$$

$\int_{\partial\Omega} z^{k-n+1}\,dz = 0$ si $k\neq n$ et 1 sinon

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(tA)^n}{n!}$$

$$= \exp(tA).$$

∎