Représentation de Lipschitziens

réf: Site de Thomas Cavallazzi

Brézis, Analyse fonctionnelle p. 124 - 126

Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnels p. 294.

Théorème: Une application $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si il existe une fonction $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(y) = \int_y^x g(t)\,dt.$$

Preuve: L'implication $\Leftarrow$ est claire.

$\Rightarrow$: Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne.

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ et on considère la dérivée distributionnelle T de f i.e:

$$T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto \langle f', \varphi \rangle := -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

Étape 1: Prolongement de T à L^1.

On commence par montrer que T est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1})$ Pour cela montrons que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}\,dx.$$

Soit $M > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [-M, M]$, on a:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f(x)\varphi'(x)$.

b) Par l'inégalité des accroissement finis, on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall |h| \leq 1, \quad \left| f(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \right| \leq |f(x)|\,\|\varphi'\|_\infty \mathbb{1}_{[-M-1, M+1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

car $f \in \mathcal{C}^\infty$.

On conclut par convergence dominée, de plus par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on déduit que:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T, \varphi \rangle = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \varphi(x)\,dx$$

Or f est L-lipschitzienne, on obtient donc, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $|\langle T, \varphi \rangle| \leq L\|\varphi\|_{L^1}$.

Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense, T admet un unique prolongement, toujours noté T:

$$T : L^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui est une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$ i.e $T \in L^1(\mathbb{R})'$, de plus $\|T\|_{L^1(\mathbb{R})'} \leq L$.

Etape 2 : Montrons que $L^1(\mathbb{R})' = L^\infty(\mathbb{R})$.

On se donne $n \geq 1$. On considère les inclusions continues :

$$L^2(]-n,n[) \hookrightarrow L^1(]-n,n[) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$$

$$\phi \longmapsto \phi \longmapsto \tilde{\phi}$$

continue par Cauchy-Schwartz ; continue

où $\tilde{\phi} = \begin{cases} \phi \text{ sur }]-n,n[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On peut ainsi définir la forme linéaire continue suivante :

$$T_n : L^2(]-n,n[) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$$

D'après le théorème de Riesz, il existe une unique fonction $g_n \in L^2(-n,n)$ telle que :

$$\forall \varphi \in L^2(-n,n), \quad \langle T, \tilde{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\varphi(x)\,dx.$$

De plus si $k \geq n$, par unicité du théorème de Riesz on a $g_k|_{[-n,n]} = g_n$ presque partout. On peut donc définir $g = \liminf g_n$ qui est une fonction mesurable et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g|_{[-n,n]} = g_n$.

Montrons que $g \in L^\infty$.

Par l'absurde, supposons que $A = \{x \in \mathbb{R}, |g(x)| > L\}$ n'est pas négligeable.

On a l'union croissante suivante :

$$A = \bigcup_n A_n = \bigcup_n A \cap [-n,n]$$

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(A_N) > 0$. On pose :

$$u = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \circ g - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*} \circ g.$$

Ainsi on a : $|g| = ug$ et on pose $\varphi = u\,\mathbb{1}_{A_N} \in L^1(-N,N)$. On a alors :

$$\langle T, \tilde{\varphi} \rangle = \int_{-N}^{N} g(x)u(x)\mathbb{1}_{A_N}(x)\,dx = \int_{A_N} |g(x)|\,dx > L\,\lambda(A_n) = L\|\varphi\|_{L^1}.$$

Le qui contredit $|\langle T,\varphi\rangle| \leq \langle \|\varphi\|_{L^1}$.

Ainsi on a : $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx = \langle T,\varphi\rangle$ donc $f' = g \in C^\infty$.

De plus comme $\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx\right| \leq \|g\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^1}$, on a $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx = \langle T,\varphi\rangle$.

Etape 3 : Conclusion.

On définit, $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue par convergence dominée et $g \in L^\infty$.

$$x \longmapsto \int_0^x g(t)\,dt.$$

Le théorème de Fubini nous permet de montrer que $G' = g$ au sens des distributions. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

On a :

$$\langle G',\varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0}\left(\int_x^0 g(t)\,dt\right)\varphi'(x)\,dx - \int_0^{+\infty}\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)\varphi'(x)\,dx$$

Soit $M > 0$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [-M,M]$. Pour presque tout (t,x), on a :

$$|g(t)\varphi'(x)|\,\mathbb{1}_{[x\leq t\leq 0]} \leq \|g\|_{L^\infty}\|\varphi'\|_{L^\infty}\,\mathbb{1}_{[-M\leq x\leq t\leq 0]} \in L^1(\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^-).$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini au premier terme. On peut également faire de même pour le deuxième terme ce qui donne :

$$\langle G',\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{t} g(t)\varphi'(x)\,dx\,dt - \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} g(t)\varphi'(x)\,dx\,dt.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= \langle T,\varphi\rangle$$

On a donc $G' = f'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Ainsi il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $f - G = C$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. ✱

Or $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ s'injecte dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ainsi pour presque tout $x \in \mathbb{R}$: ✱✱

$$f(x) - G(x) = C.$$

Or f et G sont continues, on a donc le résultat pour tout $x \in \mathbb{R}$ ainsi :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\quad f(x) - f(y) = G(x) - G(y) = \int_y^x g(t)\,dt.$$

□

Résultats utiles :

Lemme : Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ nulle au sens des distributions. Alors $f = 0$ presque partout.

Preuve : Soit $n > 0$.

On dispose de $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ valant 1 sur $[-n, n]$ et de $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.

Puisque $f\chi_n \in L^1(\mathbb{R})$ on sait que :

$$f\chi_n * \rho_h \xrightarrow[h\to+\infty]{L^1} f\chi_n .$$

Or si on fixe $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f\chi_n * \rho_h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \chi_n(t) \underbrace{\rho_h(x-t)}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R})}\, dt = 0 \quad \text{car } f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

ainsi $\forall h$, $f\chi_n * \rho_h = 0$

Donc pour tout n, $f\chi_n = 0$ dans L^1 donc $f = 0$ p.p sur $[-n, n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc $f = 0$ p.p

Lemme : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $T' = 0$ alors T est constante i.e $T = C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Preuve :

On dispose d'une application $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\, dx = 1 .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on considère :

$$\psi = \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx\right)\chi .$$

Ainsi $\int \psi = 0$ donc on en déduit que :

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$
$$x \longmapsto \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\, dt$$

On a donc $0 = \langle T', \phi\rangle = -\langle T, \phi'\rangle = -\langle T, \psi\rangle = -\langle 1, \varphi\rangle + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \langle T, \chi\rangle .$

On a donc :

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \chi\rangle \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$$

d'où le résultat.