Propriétés des opérateurs compacts

Réf: Daniel Li, Cours d'Analyse fonctionnelle p. 177
Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle p. 186
Brézis, Analyse fonctionnelle p. 89

Définition Opérateur compact.
Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compact i.e $\overline{T(B_E)}$ compact.

Exemples:
1) Si $\dim T(E) < +\infty$ (T de rang fini), alors T est compact.
2) Si $K \in L^2([0,1]^2)$, alors $T_K : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ défini par
$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$

Définition: Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$
- L'ensemble résolvant : $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,;\, (T - \lambda Id) \text{ est bijectif}\}$
- Spectre : $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,;\, (T - \lambda Id) \text{ n'est pas bijectif}\} = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$
- On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T si :
$$\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) \neq \{0\}.$$

On note $Vp(T)$ et on a $Vp(T) \subseteq \sigma(T)$.

Rmq: ① Par le théorème d'isomorphisme de Banach, si $\lambda \in \rho(T)$, $(T - \lambda Id)^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

② L'inclusion $Vp(T) \subseteq \sigma(T)$ est stricte en général

ex: $E = \ell^2$ et $Tu = (0, u_1, u_2, \dots)$
Alors $0 \in \sigma(T)$ mais $\mathrm{Ker}(u) = 0$ donc $0 \notin Vp(T)$

- $T : \mathcal{C}^0([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}^0([0,1])$ injectif mais pas surjectif $0 \in \sigma(T) \setminus Vp(T)$.
$$x \longmapsto \int_0^{\cdot} x(s)\, ds$$
- $E = \ell^2$ et $Tu = (u_2, u_3, \dots)$ surjectif mais pas injectif.

Théorème: Alternative de Fredholm. Brézis, p82.

Soit T un opérateur compact on a alors :

a) $\ker(Id-T)$ est de dimension finie

b) $\mathrm{Im}(Id-T)$ est fermée (et $\mathrm{Im}(Id-T)=\ker(Id-T^*)^\perp$)

c) $\ker(Id-T)=\{0\} \iff \mathrm{Im}(Id-T)=E$ (admis pendant le dupt).

d) $\dim(\ker(Id-T)) = \dim(\ker(Id-T^*))$

Rmq: La proposition nous donne que si T est un opé compact et que l'on veut résoudre :

$$u-Tu=f.$$

Alors on a 2 options :

1) $u-Tu=f$ admet une unique solution $\forall f\in E$.

2) $u-Tu=f$ admet n solutions linéairement indépendante et $u-Tu=f$ est résoluble ssi f vérifie n conditions d'orthogonalité ($f\in\ker(Id-T^*)^\perp$).

Preuve:

a) Soit $E_1=\ker(Id-T)$ alors $B_{E_1}\subseteq T(B_{E_1})$.

En effet si $x\in B_{E_1}$ alors $x=Tx$ donc $x\in T(B_{E_1})$.

Or $\overline{T(B_{E_1})}$ est compact i.e $\overline{B_{E_1}}$ compact (fermée d'un compact) donc E_1 de dim finie par Riesz.

b) Soit $f_n=u_n-Tu_n \longrightarrow f\in E$

Montrons que $f\in\mathrm{Im}(Id-T)$.

On pose $d_n=d(u_n,\ker(Id-T))$ or $\ker(Id-T)$ est de dimension finie donc il existe $v_n\in\ker(Id-T)$ tel que : $d_n=\|u_n-v_n\|$.

> En effet soit $v^k\in\ker(Id-T)$ tq $\|u_n-v^k\|\longrightarrow d_n$.
>
> Alors après, $\|v^k\|\le\|v^k-u_n\|+\|u_n\|\le d_n+\frac{1}{2}+\|u_n\|$.
>
> La suite est bornée donc il existe $M>0$ tq $\forall k\in\mathbb{N}$, $v^k\in\overline{B(0,M)}\cap\ker(Id-T)$ compact car de dim finie ainsi quitte à considérer une ss-suite il existe $v_n\in\ker(Id-T)$ tq :
>
> $$v^k\xrightarrow[k\to\infty]{} v_n$$
>
> et on a donc par passage à la limite $\|u_n-v_n\|=d_n$.

On a donc $f_n=u_n-Tu_n=u_n-Tu_n-v_n+Tv_n=(u_n-v_n)-T(u_n-v_n)$ $(v_n=Tv_n)$

Montrons par l'absurde que $u_n - v_n$ est bornée.

Ainsi soit ψ une extractrice tel que $\|u_{\psi(n)} - v_{\psi(n)}\| \longrightarrow +\infty$. On pose alors $w_n = \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$, Ainsi :

$$w_{\psi(n)} - T_{\psi(n)} = \frac{(u_{\psi(n)} - v_{\psi(n)}) - T(u_{\psi(n)} - v_{\psi(n)})}{\|u_{\psi(n)} - v_{\psi(n)}\|} = \frac{f_{\psi(n)}}{\|u_{\psi(n)} - v_{\psi(n)}\|} \longrightarrow 0$$

Bornée car cv

Or $w_n \in B_\ell$ et $\overline{T(B_\ell)}$ est compact donc quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $z \in E$ tq $Tw_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} z$ donc $w_{\psi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} z$.

Ainsi $z \in \mathrm{Ker}(Id - T)$ donc

$$0 = d(z, \mathrm{Ker}(Id-T)) \longleftarrow d(w_{\psi(n)}, \mathrm{Ker}(Id-T)) = \frac{d(u_n, \mathrm{Ker}(Id-T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

Ce qui est absurde.

Ainsi $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $R>0$ et T étant compact,

$$(T(u_n - v_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{T(B(0,R))} \text{ compact.}$$

Donc quitte à extraire une sous-suite (avec Γ une extractrice) il existe $\ell \in E$ tel que :

$$T(u_{\Gamma(n)} - v_{\Gamma(n)}) \longrightarrow \ell.$$

On a donc $u_{\Gamma(n)} - v_{\Gamma(n)} = u_{\Gamma(n)} - v_{\Gamma(n)} - T(u_{\Gamma(n)} - v_{\Gamma(n)}) + T(u_{\Gamma(n)} - v_{\Gamma(n)})$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} f + \ell$$

Donc si on pose $g = f + \ell$ on a :

$$g - Tg = f.$$

En effet,

$$f \longleftarrow f_n = u_n - Tu_n = u_n - v_n - T(u_n - v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g - Tg.$$

On a bien :

$$f = Tg - g.$$

Donc $\mathrm{Im}(Id - T)$ est fermée, en appliquant le théorème II.18 (p.29 du Brézis) on a que :

$$\mathrm{Im}(Id - T) = \mathrm{Ker}(Id - T^*)^\perp \text{ et } \mathrm{Im}(Id - T^*) = \mathrm{Ker}(Id - T)^\perp$$

c) $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\mathrm{Ker}(Id - T) = \{0\}$

On raisonne par l'absurde et supposons que :

$$E_1 = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T) \neq E.$$

E_1 est un Banach car $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T)$ est fermé dans E

De plus pour $y \in E_1$, en notant $z = y - Ty \in E_1$ on a :

$$Ty = \underbrace{y}_{\in E_1} - \underbrace{z}_{\in E_1} \in E_1, \text{ d'où } T(E_1) \subset E_1.$$

Donc $T|_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1)$ est un opérateur compacte.

On pose maintenant $E_2 = (\mathrm{Id} - T)(E_1)$ qui est un sev fermé de E_1. De plus $(\mathrm{Id}-T)$ étant injectif $E_2 \neq E_1$.

> En effet si $E_2 = E_1$ pour $z \in E \setminus E_1$ alors
>
> $z - Tz \in E_1 = E_2$ donc $\exists z' \in E_1$ tel que
>
> $$z - Tz = z' - Tz'$$
>
> or $\mathrm{Id} - T$ injectif donc $z = z'$ Absurde.

Ainsi en posant $E_n = (\mathrm{Id}-T)(E_{n-1}) = (\mathrm{Id}-T)(E_n)$ on obtient par récurrence une suite strictement décroissante de S.e.V de E.

On applique le Lemme de Riesz, ainsi il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tq :

$$u_n \in E_n, \ \|u_n\| = 1, \ d(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Or on a pour $(n,m) \in \mathbb{N}^2$:

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m)$$

Or si $n > m$, $E_{n+1} \subseteq E_n \subseteq E_{m+1} \subseteq E_m$ et donc

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \subseteq E_{m+1}.$$

Donc $\|Tu_n - Tu_m\| = \|\underbrace{-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n}_{\subseteq E_{m+1}} - u_m\|$

$$\geq d(u_m, E_{m+1}) = \frac{1}{2}.$$

Or par compacité de T, $\overline{T(B_E)}$ est compact et comme $u_n \in B_E$ il existe ψ une extractrice et $z \in E$ tel que $Tu_{\psi(n)} \longrightarrow z$ donc $\frac{1}{2} \leq \|Tu_{\psi(n)} - Tu_{\psi(n)}\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Absurde

On a donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T) = E$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T) = E$. On utilise le corollaire 8.17 p28 du Brézis qui donne que :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T^*) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T)^{\perp} = \{0\}$$

or T^* est un opérateur compact par le théorème de Schauder par ce qui précède $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-T^*) = E'$ donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-T) = \{0\}$ (le même corollaire).

d) Voir Brézis.

FI

Lemme: Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels distincts tel que :

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in \mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}$, alors $\lambda = 0$.
(i.e tous les points de $\mathrm{Vp}(T)\setminus\{0\}$ sont isolés).

Preuve:

Soit $e_n \neq 0$ tel que $(T-\lambda_n \mathrm{Id})e_n = 0$.

On pose $E_n = \mathrm{Vect}\{e_1,\dots,e_n\}$.

Maj $E_n \subsetneq E_{n+1}$:

Il suffit de montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, les $(e_1,\dots,e_n)$ sont libre. Par récurrence sur n, on suppose que

$$e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} e_i = \lambda_{n+1} e_{n+1} = Te_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Te_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i$.

Par HR, $\alpha_i(\lambda_{n+1}-\lambda_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$. Absurde.

Par le lemme de Riesz on a une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq:

$$u_n \in E_n,\ \|u_n\| = 1 \text{ et } d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2} \quad (\forall n \geq 2).$$

Soient $2 \leq m < n$ on a donc:

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n.$$

Ainsi:

$$\left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| = \| \underbrace{\left(\frac{Tu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n}\right)}_{\subset E_{n-1}} - \underbrace{\left(\frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m}\right)}_{\subset E_{n-1}} - \underbrace{u_m}_{\subset E_n} + u_n \|.$$

$\subset E$

En effet, $(T-\lambda_k)F_k \subset F_{k-1}$ $(\forall k \geq 2)$ donc $Tu_n - \lambda_n u_n \in F_{n-1}$ et u_n

$Tu_m - \lambda_m u_m \in F_{m-1}$

Ainsi $\left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| \geq d(u_n, F_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$.

Or $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée donc $(Tu_n)_{n\geq 0}$ admet une sous-suite convergente vers $y \in E$.

Si $\lambda \neq 0$, alors on a :

$$\left\| \frac{Tu_{\varphi(n)}}{\lambda_{\varphi(n)}} - \frac{Tu_{\varphi(m)}}{\lambda_{\varphi(m)}} \right\| \geq \frac{1}{2}$$

$$0 = \left\| \frac{y}{\lambda} - \frac{y}{\lambda} \right\| \geq \frac{1}{2}$$

Ce qui est absurde, $\lambda = 0$. ☐

Théorème : Soit $T \in \mathcal{K}(E)$ avec $\dim E = +\infty$.

Alors on a :

a) $0 \in \sigma(T)$

b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = Vp(T) \setminus \{0\}$.

c) On a une des situations suivantes :

- $\sigma(T) = \{0\}$
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est finie
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Preuve : a) Supposons $0 \notin \sigma(T)$ alors T est bijectif donc $Id = \underbrace{T}_{\text{compact}} \circ \underbrace{T^{-1}}_{\text{continue}}$ donc Id compact donc E compact donc E de dim finie. Absurde

b) Soit $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$.

Vq $\lambda \in Vp(T)$ i.e $\ker(T-\lambda Id) \neq \{0\}$.

Par l'absurde si $\ker(T-\lambda Id) = \{0\}$ par le théorème $\mathrm{Im}[T-\lambda Id] = E$.

Donc $\lambda \in \rho(T)$. Absurde.

c) Soit $n \geq 1$ on pose : $S_n = \sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} ; |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$.

S_n est vide ou finie.

En effet si il contenait une infinité de point distinct, par compacité de $\sigma(T)$, il y aurait un point d'accumulation non nulle, ce qui est absurde par le lemme.

Ainsi $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est infinie on peut ranger en une suite qui tend vers 0 (seul valeur d'adhérence).

□

Remarque: Si (α_n) une suite qui tend vers 0, on considère $E = \ell^2$ et

$$T : u=(u_n) \longmapsto (\alpha_n u_n)$$

Alors $Vp(T) = \{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\} = \sigma(T)$

(T est compact comme limite d'opérateur de rang finie)

Une liste de resultat important que l'on utilise à mettre dans le plan.

Lemme de Riesz: Soit E un e.v.n et $M \subset E$ un s.e.v tq $M \neq E$.

Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$.

Théorème de Riesz:

Soit E un s.e.v tq B_E est compacte alors E de dim finie.

Lemme: $K(E)$ (opé compact) est fermé dans $\mathcal{L}(E)$.

C'est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition: Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ alors $\sigma(T)$ est un ensemble compact et

$$\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|].$$

Preuve: Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > \|T\|$ montrons que $T - \lambda Id$ est bijectif ainsi $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]$.

Soit $f \in E$, montrons qu'il existe un unique $u \in E$ tel que:

$$Tu - \lambda u = f \iff u = \frac{1}{\lambda}(Tu - f).$$

On pose $f_\lambda : E \longrightarrow E$

$$u \longmapsto \frac{1}{\lambda}(Tu - f).$$

Alors f_λ est contractante car

$$\|f_\lambda(u) - f_\lambda(v)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|Tu - Tv\| \leq \underbrace{\frac{\|T\|}{|\lambda|}}_{<1}\|u - v\|$$

f_λ est contractante donc par le théorème de point fixe de Banach $f_\lambda(u)=u$ admet une unique solution donc $\lambda Id - T$ est bijective.

$\Rightarrow \sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

Montrons que $\rho(T)$ est ouvert.

Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|(Id - \lambda_0 T)^{-1}\|}$

Soit $f \in E$, montrons qu'il existe un unique $u \in E$ tq

$$Tu - \lambda u = f.$$

$$\text{i.e} \quad Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0) u.$$

$$\text{i.e} \quad u = (T - \lambda_0 Id)^{-1} [f + (\lambda - \lambda_0) u].$$

Soit $G_\lambda : E \longrightarrow E$

$$u \longmapsto (T - \lambda_0 Id)^{-1} [f + (\lambda - \lambda_0) u].$$

On a :

$$\|G_\lambda(u) - G_\lambda(v)\| = \|(T - \lambda_0 Id^{-1})(u - v)\| \, |\lambda - \lambda_0|$$

$$\leq \underbrace{\|(T - \lambda_0 Id^{-1})\| \, |\lambda - \lambda_0|}_{<1} \, \|u - v\|$$

Par le point fixe de Banach, existence et unicité de la sol, $\lambda \in \rho(T)$ qui est ouvert.

$\Rightarrow \sigma(T)$ fermée bornée donc compact.

$\boxed{2}$

Résultats important des opérateurs compacts en plus :

II - Opérateur adjoint Daniel Li.

Prop/Def : Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ tel que :

$$\forall x \in E, \forall \varphi \in F^*, \quad \langle \varphi, Tx \rangle_{F^*, F} = \langle T^* \varphi, x \rangle_{E^*, E}.$$

De plus $\|T\| = \|T^*\|$.

Preuve : Pour tout $\varphi \in F^*$, l'application $x \longmapsto \langle \varphi, Tx \rangle$ est une forme linéaire continue sur E

i.e un élément $T^* \varphi \in E^*$.

On définit donc $T^* : F^* \longrightarrow E^*$

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi, T. \rangle : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto \langle \varphi, Tx \rangle.$$

Il est clair que T^* est linéaire.

Soit $\varphi \in F^*$ on a :

$$\|T^*\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*\varphi, x\rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \varphi, Tx\rangle| \leq \|\varphi\| \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|\varphi\| \|T\|.$$

d'où $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$

De plus on a :

$$\|Tx\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle \varphi, Tx\rangle| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle T^*\varphi, x\rangle| \leq \|x\| \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|T^*\varphi\| = \|T^*\| \|x\|.$$

Ce qui donne $\|T\| = \|T^*\|$.

□

Théorème de Schauder : Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

T compact ssi T^* est compact.

Preuve : On va utiliser le théorème d'Ascoli.

$\Rightarrow$: Supposons T compact, on veut montrer que $T^*(B_{F^*})$ est relativement compacte.

C'est à dire on se donne une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1} \in B_{F^*}^{\mathbb{N}^*}$, montrons qu'on peut extraire une sous-suite convergente de $(T^*\varphi_n)_{n \geq 1}$.

On pose $X = \overline{T(B_E)}$ qui est un espace métrique compact par hypothèse.

Posons, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$

$$y \longmapsto f_n(y) = \langle \varphi_n, y \rangle_{F^*, F}$$

alors f_n est continue et on pose $\mathcal{F} = \{f_n, n \geq 1\} \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$.

$\mathcal{F}$ est bornée car :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{y \in \overline{T(B_E)}} |\langle \varphi_n, y\rangle| = \sup_{x \in B_E} |\langle \varphi_n, Tx\rangle| \leq \|\varphi_n\| \|T\| \leq \|T\|.$$

($\uparrow$ continuité)

$\mathcal{F}$ est équicontinue car :

$$|f_n(y) - f_n(y')| = |\langle \varphi_n, y - y'\rangle| \leq \|\varphi_n\| \|y - y'\| \leq \|y - y'\|.$$

Par le théorème d'Ascoli il existe $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ et Γ une extractrice telle que :

$$f_{\Gamma(n)} \xrightarrow{\| \cdot \|_\infty} f$$

Ainsi pour tout $x \in B_E$ on a :

$$\langle T^* \varphi_{\Gamma(n)}, x \rangle = f_{\Gamma(n)}(Tx) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(Tx)$$

Pour tout $x \in E$, $\psi(x) = \lim_{n \to +\infty} \langle T^* \varphi_{\Gamma(n)}, x \rangle = \lim_{n \to +\infty} (\|x\|+1) \langle T^* \varphi_{\Gamma(n)}, \frac{x}{(\|x\|+1)} \rangle = (\|x\|+1) f(T \frac{x}{(\|x\|+1)})$.
existe.

On définit donc une application linéaire

$$\psi : E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

De plus $\psi_{|B_E} = f \circ T$.

Montrons que ψ est continue.

$$\|\psi(x)\| = \lim_{n \to +\infty} \|\langle T^* \varphi_{\Gamma(n)}, x \rangle\| \leq \|T^* \varphi_{\Gamma(n)}\| \|x\| = \|T\| \|x\|.$$

Donc $\psi \in E^*$. De plus :

$$\|T \varphi_{\Gamma(n)} - \psi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T \varphi_{\Gamma(n)} - \psi, x \rangle| = \|f_{\Gamma(n)} - f\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Donc $T^*(B_{E^*})$ est relativement compact.

$\Leftarrow$: Si T^* est compact alors $T^{**} : E^{**} \longrightarrow F^{**}$ est compact or E est s.e.v fermé de E^{**} stable par T^{**} et $T^{**}_{|E} = T$ donc

$$\overline{T(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$$

est donc compact i.e T compact.

III - Décomposition spectrale des opérateurs compacts Brézis

On se place dans un Hilbert H, comme on identifie H^* et H on considère que $T^* \in \mathcal{L}(H)$.

Définition : On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est autoadjoint si $T^* = T$, i.e

$$\forall u, v \in H, \quad \langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle.$$

Proposition : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint. On pose :

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Tu, u \rangle \quad \text{et} \quad M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Tu, u \rangle.$$

Alors $\sigma(T) \subseteq [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$.

Preuve : Soit $\lambda > M$, montrons que $\lambda \in \rho(T)$. On a :

$$\forall u \in H, \quad \langle Tu, u \rangle \leq M \|u\|^2$$

On pose $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique

$$u, v \longmapsto \langle \lambda u - Tu, v \rangle \qquad a(u,v) = \lambda \langle u, v \rangle - \langle Tu, v \rangle.$$

$$= \langle u, \lambda v \rangle - \langle u, Tv \rangle$$

alors a continue car $\qquad = \langle u, \lambda v - Tv \rangle = a(v, u).$

$$|a(u,v)| \leq \|\lambda \mathrm{Id} - T\| \|u\| \|v\|.$$

Et a coercive car

$$\forall u \in H, \quad a(u,u) = \langle \lambda u - Tu, u \rangle \geqslant \underbrace{(\lambda - M)}_{>0} \|u\|^2$$

Par le théorème de Riesz pour tout $f \in H$ il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \langle f, v \rangle$$

donc $\langle \lambda u - Tu - f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in H.$

Donc $\lambda u - Tu - f$ admet une unique solution.

$\lambda \mathrm{Id} - T$ est bijectif.

Montrons que $M \in \sigma(T)$.

On considère $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique et

$$u, v \longmapsto (Mu - Tu, v)$$

$a(v,v) \geqslant 0 \ (\forall v \in H)$ et $a(v,v) = 0 \Rightarrow M\langle v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle.$

On applique Cauchy-Schwarz à la forme $a(u,v)$ il vient :

$$\forall u, v \in H. \quad |a(u,v)| = |\langle Mu - Tu, v \rangle| \leq \langle Mu - Tu, u \rangle^{\frac{1}{2}} \langle Mv - Tv, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Or $\|Mu - Tu\| = \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|=1}} |\langle Mu - Tu, v \rangle|$ donc

$$\forall u \in H, \quad \|Mu - Tu\| \leq \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|=1}} |\langle Mv - Tv, v \rangle|^{1/2} \langle Mu - Tu, u \rangle^{1/2} \leq \|M\mathrm{Id} - T\|^{1/2} \langle Mu - Tu, u \rangle^{1/2}$$

Soit (u_n) une suite telle que $\|u_n\|=1$ et $\langle Tu_n, u_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$

On a donc $\|Mu_n - Tu_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $M \in \sigma(T)$.

En effet si $M \in \rho(T)$, $u_n = (M\mathrm{Id} - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\langle Tu_n, u_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $M=0$ absurde.

Les propriétés sur m s'obtiennent en remplaçant T par $-T$. □

Corollaire : Soit $T \subset \mathcal{B}(H)$ auto-adjoint tel que $\sigma(T)=\{0\}$, alors $T=0$

Preuve : On a donc par la prop

$$\forall u \in H,\ \langle Tu, u\rangle = 0$$

Ainsi $\mathcal{E}\langle Tu, v\rangle = \langle T(u+v), u+v\rangle - \langle Tu, u\rangle - \langle Tv, v\rangle = 0 \quad \forall u, v \in H$.

Donc $T=0$. □

Théorème : On suppose que H est séparable. Soit T un opérateur autoadjoint compact. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Preuve : Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de T, excepté 0. On note $\lambda_0 = 0$.

On pose $E_0 = \ker(T)$ et $E_n = \ker(T - \lambda_n \mathrm{Id})$. On sait que

$$0 \leq \dim(E_0) \leq +\infty \quad \text{et} \quad 0 < \dim(E_n) < +\infty$$

Montrons d'abord que H est la somme hilbertienne des $(E_n)_{n\geq 0}$.

i) Les $(E_n)_{n\geq 0}$ sont deux à deux orthogonaux. En effet si $u \in E_m$ et $v \in E_n$ avec $m \neq n$.

alors $\quad Tu = \lambda_m u \quad$ et $\quad Tv = \lambda_n v$.

et $\quad \lambda_m \langle u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \lambda_n \langle u, v\rangle$.

Si $\langle u, v\rangle \neq 0$ alors $\lambda_n = \lambda_m$. Absurde.

ii) Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(E_n)_{n\geq 0}$. Vérifions que F est dense dans H.

Il est clair que $T(F) \subseteq F$ car $T(E_n) \subseteq E_n$.

T étant auto-adjoint $T(F^\perp) \subseteq F^\perp$, en effet si $u \in F^\perp$ et $v \in F$ alors.

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, \underbrace{Tv}_{\in F}\rangle = 0 \quad \text{donc } Tu \in F^\perp.$$

Ainsi $T_0 = T_{F^\perp}$ est autoadjoint compact d'autre part $\sigma(T_0) = \{0\}$ en effet si

$$\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\}, \quad \lambda \in Vp(T_0)$$

(T_0 compact)

Ainsi il existe $u \in F^\perp$, $u \neq 0$ tel que $T_0 u = \lambda u$ i.e $Tu = \lambda u$.

Ainsi $\lambda \in \{\lambda_n, n \geq 1\} = Vp(T) \setminus \{0\}$ et donc $u \in F^\perp \cap E_n \Rightarrow u = 0$. Absurde

Donc $T_0 = 0$ ainsi $F^\perp \subseteq \ker(T) \subseteq F$ donc $F^\perp = \{0\}$.

Donc F est dense dans H.

Enfin on choisit une base hilbertienne de $(E_n)_{n \geq 1}$ (possible car H séparable donc admet une BH) La concaténation forme une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.

autoadjoint

Rmq: On retrouve que tout opérateur compact ^{V} sur un Hilbert est limite d'opérateur de rangs finis. Ce qui est vrai pour tout opé compact sur un Hilbert.