Méthode de la sécante

Réf: Demailly, Analyse numérique et équa diff p. 102

Schatzman, Analyse numérique p. 350

L'objectif est de trouver une méthode qui permet de résoudre $f(x)=0$ lorsque l'on ne connaît pas f'.

Pour cela on adopte la méthode de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En approchant la dérivée de f par sa tangente.

On se donne x_0, x_1 et on pose

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\tau_n} \quad \text{où} \quad \tau_n = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

On a le dessin suivant:



L'objectif est de montrer le théorème suivant:

Théorème: Soit f de classe $\mathcal{C}^2$, $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a)=0$ et $f'(a) \neq 0$. On pose $\mathcal{I} = [a-\eta, a+\eta]$ un intervalle où f' ne s'annule pas et on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0, x_1 \in \mathcal{I}$ et

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\tau_n} \quad \text{où} \quad \tau_n = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Alors il existe $h>0$ tel que pour $x_0, x_1 \in [a-h, a+h]$ il existe une constante $C>0$ et $r<1$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - a| \leq C\, r^{e^n} \quad \text{où} \quad e = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$$

Preuve: Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{I}$ compact on note donc pour $i=1$ ou $i=2$:

$$M_i = \max_{x\in\mathcal{I}} |f^{(i)}(x)| \text{ et } m_i = \min_{x\in\mathcal{I}} |f^{(i)}|$$

De plus on pose : $\tau : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que par Taylor on peut écrire :

$$\tau(x,y) = \int_0^1 f'(x+t(y-x))\,dt.$$

Comme $[0,1]$ est compact et f', f'' sont continues on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrales ainsi pour $(x,y) \in I^2$:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 (1-t) f''(x+t(y-x))\,dt$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 t\, f''(x+t(y-x))\,dt.$$

Comme f' ne s'annule pas sur I, f' est de signe constant et $\int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}$, on en déduit :

$$|\tau(x,y)| \geq m_1 > 0 \quad , \quad \left|\frac{\partial \tau}{\partial x}\right| \leq \frac{1}{2} M_2, \left|\frac{\partial \tau}{\partial y}\right| \leq \frac{1}{2} M_2.$$

($m_1 = \min_I |f'| > 0$ car $f' > 0$ sur I.)

Il en résulte en particulier

$$|\tau(x,y) - f'(x)| = |\tau(x,y) - \tau(x,x)| = \left| \int_x^y \frac{\partial \tau}{\partial y}(x,y)\,dt \right| \leq \frac{1}{2} M_2 |y-x|$$

On définit maintenant la fonction Ψ de classe $\mathcal{C}^1$ tq :

$$\Psi(x,y) = x - \frac{f(x)}{\tau(x,y)}$$

Soit $p \geq 1$, on suppose x_p et x_{p-1} sont bien définit et $(x_p, x_{p-1}) \in I^2$. On a donc x_{p+1} est bien définie par :

$$x_{p+1} = x_p - \frac{f(x_p)}{\tau(x_p, x_{p-1})} = \Psi(x_p, x_{p-1}).$$

On pose $h_{p+1} = x_{p+1} - a$, $h_p = x_p - a$ et $h_{p-1} = x_{p-1} - a$.
On a alors

$$h_{p+1} = \Psi(x_p, x_{p-1}) - a = \Psi(a+h_p, a+h_{p-1}) - \Psi(a,a).$$

Ainsi comme Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$, par la formule de Taylor :

$$h_{p+1} = \int_0^1 \left[h_p \frac{\partial \Psi}{\partial x}(a+th_p, a+th_{p-1}) + h_{p-1} \frac{\partial \Psi}{\partial y}(a+th_p, a+th_{p-1}) \right] dt.$$

Or on sait que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 1 - \frac{f'(x)\,\sigma(x,y) - f(x)\frac{\partial \sigma}{\partial x}}{\sigma(x,y)^2} = \frac{\sigma(x,y) - f'(x)}{\sigma(x,y)} + f(x)\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{1}{\sigma(x,y)^2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = f(x)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{1}{\sigma(x,y)^2}.$$

Or on a $|f(x)| = |f(x) - f(a)| \leq M_1 |x-a|$ ainsi:

$$\left|\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right| \leq \frac{M_2 |y-x|}{2m_1} + M_1 |x-a| \frac{M_2}{2m_1^2}$$

$$\left|\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right| \leq M_1 |x-a| \frac{M_2}{2m_1^2}.$$

Ainsi en l'appliquant à $(x,y) = (a+th_p, a+th_{p-1})$ pour $t \in [0,1]$ on a:

$$\left|\frac{\partial \Psi}{\partial x}(a+th_p, a+th_{p-1})\right| \leq \left[\frac{M_2}{2m_1}(|h_p| + |h_{p-1}|) + \frac{M_1 M_2}{2m_1^2}|h_p|\right] t$$

$$\left|\frac{\partial \Psi}{\partial y}(a+th_p + a th_{p-1})\right| \leq \frac{M_1 M_2}{2m_1^2}|h_p|\, t$$

Ce qui nous donne que:

$$|h_{p+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}(|h_p| + |h_{p-1}|)\frac{|h_p|}{2} + \frac{M_1 M_2}{2m_1^2}\frac{|h_p|^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{M_1 M_2}{2m_1^2}|h_p||h_{p-1}|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M_2}{2m_1} + \frac{M_1 M_2}{2m_1^2}\right)|h_p|(|h_p| + |h_{p-1}|).$$

On pose donc $K = \frac{M_2}{2m_1} + \frac{M_1 M_2}{2m_1^2}$ et on obtient:

$$|h_{p+1}| \leq K |h_p| \max(|h_p|, |h_{p-1}|).$$

On pose $h = \min(\eta, \frac{1}{K})$ alors pour $x_0, x_1 \in [a-h, a+h] \subset I$, x_2 est bien définie et:

$$|x_2 - a| = |h_2| \leq K |h_1| \max(|h_1|, |h_0|) \quad \text{par ce qui précède}$$

or $|h_1| \leq h \leq \frac{1}{K}$ donc $\quad |h_2| \leq \max(|h_1|, |h_0|) \leq h$.

Ainsi $x_2 \in [a-h, a+h]$, par récurrence on peut donc définir par récurrence la suite $(x)_{p \in \mathbb{N}}$ et pour tout $p \geq 2$, $x_p \in [a-h, a+h]$, $|h_{p+1}| \leq K |h_p| \max(|h_p|, |h_{p-1}|) \leq |h_p|$.

La suite est donc décroissante et vérifie pour $p \geq 2$:

$$|h_{p+1}| \leq K |h_p| |h_{p-1}|.$$

On utilise maintenant le lemme suivant :

Lemme : Soit une suite de réels positifs r_n tel que :

$$r_{n+1} \leq r_n r_{n-1}$$

alors si $r_0 < 1$ et $r_1 < 1$, r_n est bornée par 1 et converge vers 0. De plus il existe une constante $C(r_0, r_1)$ telle que :

$$r_n \leq C r^{\varphi^n} \quad \text{où } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618.$$

et $r < 1$.

On applique le lemme à la suite $r_p = K|h_p|$.
Ainsi il existe $C(h_0, h_1)$ et $r < 1$ tel que :

$$|x_n - a| \leq C r^{\varphi^n}.$$

D'où le résultat. □

Preuve du Lemme : (Schatzman)

Si $r_n < 1$ et $r_{n-1} < 1$ il est clair que $r_{n+1} < 1$.

On définit la suite, $s_0 = r_0$, $s_1 = r_1$ et $s_{n+1} = s_n s_{n-1}$.

Par récurrence comme $s_0 = r_0$, $s_1 = r_1$ il est clair que :

$$r_{n+1} \leq r_n r_{n-1} \leq s_n s_{n-1} = s_{n+1}.$$

On suppose $s_0 \neq 0$ et $s_1 \neq 0$ (sinon résultats triviaux).

On pose donc $\ell_n = -\ln(s_n)$ alors ℓ_n vérifie :

$$\ell_{n+1} = \ell_n + \ell_{n-1}.$$

L'équation caractéristique est donc

$$X^2 - X - 1 = 0$$

qui a 2 solutions réelles $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{1}{\varphi}$.

On sait donc que pour $n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = a\varphi^n + b(-\varphi)^{-n}$ avec $\begin{cases} \ell_0 = a+b \\ \ell_1 = a\varphi - \frac{b}{\varphi} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{\ell_0 + \varphi \ell_1}{1+\varphi^2}$, $b = \frac{\varphi(\varphi \ell_0 - \ell_1)}{1+\varphi^2}$.

Or par hypothèses $l_0 > 0, l_1 > 0$ donc $a > 0$.

Ainsi on a la majoration :

$$l_n \geq a e^n - |b|.$$

Ce qui nous donne :

$$r_n \leq \exp(-a e^n) \exp(|b|).$$

Avec $r = e^{-a} < 1$ car $a > 0$ on a le résultat voulue. ☐

Rmq : On peut aussi montrer que :

$$|h_p| \leq \frac{1}{k} [k \max(|x_0 - a|, |x_1 - a|)]^{S_p}.$$

où S_p suite de fibonacci.

- Méthode d'ordre $\varphi \sim 1,618$.