Lemme de Morse :

réf : Rouvière, petit guide du calcul diff p. 354 et p 109.
Bonnis Brezis, Analyse pour l'agrég p. 171.

Lemme de Morse :

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que $0 \in U$, $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe deux voisinages V, W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : V \longrightarrow W$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

où $(u_1, \dots, u_n) = \varphi(x)$.

Rmq :
- Si $df(0) \neq 0$ alors on regarde $g(x) = f(x) - f(0) - Df(0)x$
- Si $df(t) = 0$ alors on regarde $g = f(\cdot - t)$.
- hypothèses minimales : $f \in \mathcal{C}^1$, $df(0) = 0$ et existence de $d^2f(0)$ non dégénérée.

Preuve : On applique la formule de Taylor à l'ordre 1 pour f. Comme $df(0) = 0$, on a :

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)\, d^2f(tx)(x,x)\, dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)\, {}^t x\, D^2f(tx)\, x\, dt$$

$$= {}^t x\, \varphi(x)\, x$$

où $\varphi : U \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$, $x \longmapsto \int_0^1 (1-t) D^2f(tx)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$, f étant de classe $\mathcal{C}^3$.

On utilise le lemme suivant.

Lemme : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe un voisinage V de A_0 dans S_n et $\Psi : V \longrightarrow GL_n$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

$$\begin{array}{ccc} A & \longmapsto & M \end{array}$$

$$\forall A \in V, \quad A = {}^t\Psi(A) A_0 \Psi(A).$$

On a $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ qui est symétrique non dégénérée donc inversible.
Par le lemme il existe V un voisinage de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\Psi : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :

$$\forall A \in V, \quad A = {}^t\Psi(A) Q(0) \Psi(A)$$

Or Q est une application de classe $\mathcal{C}^1$ donc il existe $U_Q \subset V$ un voisinage de 0 telle que
$\forall x \in U_Q, Q(x) \in V$.
On a donc,

$$\forall x \in U_Q, \quad Q(x) = {}^t\Psi(Q(x)) Q(0) \Psi(Q(x))$$

En posant $M : U_Q \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, M est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \Psi(Q(x)) \end{array}$$

$$\forall x \in U_Q, \quad Q(x) = {}^tM(x) Q(0) M(x).$$

On a donc $f(x) - f(0) = {}^t(M(x)x) Q(0) (M(x)x) \qquad (\forall x \in U_Q)$

Or $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$. Donc il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$${}^tA Q(0) A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \} n-p \end{matrix}$$

On pose donc $\varphi : U_Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & A^{-1} M(x) x \end{array}$$

Et on a pour $x \in U_Q$:

$$f(x) - f(0) = {}^t(M(x)x) Q(0) (M(x)x) = {}^t(A^{-1}M(x)x)\, {}^tA Q(0) A\, (A^{-1}M(x)x)$$
$$= {}^t\varphi(x) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \varphi(x) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$
où $\varphi(x) = (u_1, \dots, u_n)$.

Il nous reste à montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre 2 voisinages de l'origine.

On remarque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de plus:

$$\forall x \in V_0, \quad d\varphi(x) = A^{-1} M(x)\, h + A^{-1}\left(d_x M \cdot h \,\middle|\, x\right)$$

On a donc $d\varphi(0) = A^{-1} M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$.

Par le théorème d'inversion locale φ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféo.

□

Lemme: Soit $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe V un voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\mathcal{C}^1$:

$$\Psi : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto M$$

tel que pour tout $A \in V$, $\quad A = {}^t\Psi(A)\, A_0\, \Psi(A)$.

Preuve:

On pose $\Psi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$

$$M \longmapsto {}^t M A_0 M.$$

On commence par calculer $\ker(d\Psi(\mathrm{Id}))$. L'application $A, B \longmapsto {}^t A A_0 B$ étant bilinéaire on a:

$$d_\varphi(\mathrm{Id})(H) = {}^t H A_0 + A_0 H$$
$$= {}^t(H A_0) + A_0 H.$$

Ainsi $\ker d\Psi(\mathrm{Id}) = \{H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ {}^t(HA_0) = -A_0 H\}$.

Or A_0 est inversible et toute matrice s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et antisymétrique ainsi:

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \ker d\Psi(\mathrm{Id}) \oplus F$$

où $F = \{H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t(A_0 H) = A_0 H\}$

De plus A_0 est symétrique donc $\mathrm{Id} \in F$ et on note Ψ la restriction de Ψ au sev F i.e

$$\Psi : F \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto {}^t M A_0 M$$

Or on a $\ker d\Psi(\mathrm{Id}) = \ker d\varphi(\mathrm{Id}) \cap F = \{0\}$.

Par le théorème d'inversion locale il existe U un voisinage ouvert de Id dans $F \cap GL_n(\mathbb{R})$ ($GL_n(\mathbb{R})$ ouvert) tel que Ψ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $V = \Psi(U)$.

Ainsi V est un voisinage ouvert de $A_0 = \Psi(\mathrm{Id}) = \varphi(\mathrm{Id})$ et pour tout $A \in V$, il existe une unique

matrice inversible $M \in U$ telle que :

$$A = {}^tM A_0 M .$$

et $M = \Psi^{-1}(A)$ qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Application : Point d'équilibre d'une EDO.

On considère $U : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On suppose que $d_0 U = 0$

$$d_0^2 U \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = Y \\ \dfrac{dY}{dt} = -\nabla U(X) \end{cases}$$

L'application $F : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Y \\ -\nabla U(X) \end{pmatrix}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc localement Lipschitz. Donc par Cauchy-Lipschitz le système admet une unique solution maximale (X, Y) pour des données initiales (X_0, Y_0).

De plus $F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 0 est un point d'équilibre du système.

Théorème :

Il existe Ω un voisinage de $(0,0)$ inclus dans $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$, tel que pour tout élément (X_0, Y_0) de Ω, la solution maximale de (1), vérifiant la condition initiale $(X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0)$., soit définie sur $\mathbb{R}$.

De plus $(0,0)$ est un point stable, non asymptotiquement stable.

Preuve : Le résultat résulte du fait qu'une énergie est conservée au cours du temps :

$$\mathcal{E} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \longmapsto \frac{1}{2}\|Y\|^2 + U(X).$$

On peut supposer $U(0) = 0$ quitte à translater U ce qui ne change pas le système. Le Lemme de Morse fournit l'existence d'un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme

$$\varphi : W \subset U \longrightarrow V.$$

qui conserve l'origine et tel que pour tout $X \in W$.

$$U(X) = \frac{1}{2}\left(u_1^2 + \ldots + u_n^2\right) \text{ où } (u_1, \ldots, u_n) = \varphi(X) \text{ car } d_0^2 U \in S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

On peut donc définir un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$J : W \times \mathbb{R}^n \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n$$
$$(X, Y) \longmapsto (\varphi(X), Y)$$

Et pour tout élément (X, Y) de $W \times \mathbb{R}^n$ on a :

$$R(X,Y) = \frac{1}{2}\|Y\|^2 + \frac{1}{2}{}^t\varphi(X)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}\varphi(X).$$

A on remarque, $q : (z, Y) \longmapsto \frac{1}{2}(\|X\|^2 + {}^t z z)$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui est définie positive.

On note $\mathcal{N}$ la norme associée alors on a :

$$R = \mathcal{N}^2 \circ J.$$

Comme le voisinage $V \times \mathbb{R}^n$ est ouvert, il contient une boule ouverte pour la norme $\mathcal{N}$ de $(0,0)$ de rayon r, notée $B_{r,\mathcal{N}}$.

On pose $\Omega = J^{-1}(B_{r,\mathcal{N}})$, ainsi si $(X, Y) \in \Omega$, $R(X,Y) \in [0, r[$.

Quelques notations, pour tout $\rho \in]0, r[$,

$$\mathcal{E}_\rho = \{(X,Y) \in \Omega \mid R(X,Y) = \rho^2\} \; ; \; \mathcal{E}_{<\rho} = \{(X,Y) \in \Omega \mid R(X,Y) < \rho^2\}.$$

De même on note $S_{\mathcal{N}}(\rho)$ et $B_{\mathcal{N}}(\rho)$ la sphère et boule pour $\mathcal{N}$, ainsi :

$$\mathcal{E}_\rho = J^{-1}(S_{\mathcal{N}}(\rho)) \; , \; \mathcal{E}_{<\rho} = J^{-1}(B_{\mathcal{N}}(\rho))$$

On peut maintenant mener le théorème.

Soit $(X_0, Y_0) \in \Omega$ distinct de $(0,0)$ et (X,Y) la solution maximale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y \\ \frac{dY}{dt} = -\nabla U(X) \\ (X(0), Y(0)) = (X_0, Y_0) \end{cases}$$

On note I son intervalle de définition et $\varepsilon(t) = R(X(t), Y(t))$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I, \; \varepsilon'(t) = \langle X, X' \rangle - \langle \nabla U \circ X, X' \rangle$$
$$= \langle Y', X' \rangle - \langle Y', X' \rangle \qquad \text{faut dire que } (X,Y) \text{ reste dans } \Omega.$$
$$= 0$$

Donc ε est constant, on note ρ_0 sa valeur et $\rho_0 = \sqrt{R(X_0, Y_0)}$ donc $R(X(t), Y(t)) \in \mathcal{E}_{=\rho_0}$ $(\forall t \in I)$

Or $\mathcal{E}_{=\rho_0} = \delta^{-1}(S_{\rho_0})$, S_{ρ_0} est compact et δ^{-1} continue donc $\mathcal{E}_{=\rho_0}$ est compact.
Par le théorème de sortie de tout compact $I = \mathbb{R}$, la solution est globale.

Comme $(B_\rho)_{\rho \in]0,r[}$ est une base de voisinages de $(0,0)$ et $\mathcal{E}_{<\rho} = \delta^{-1}(B_\rho)$ donc $(\mathcal{E}_{<\rho})_{\rho \in]0,r[}$ est aussi une base de voisinages de $(0,0)$.
De plus si on a $(X_0, Y_0) \in \mathcal{E}_{<\rho}$ pour $\rho \in]0,r[$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$(X(t), Y(t)) \in \mathcal{E}_{<\rho}.$$

Donc $(0,0)$ est stable.

De plus $(0,0)$ n'est pas asymptotiquement stable puisque la conservation de E interdit que (X,Y) tende vers $(0,0)$.

□

Dessin :

