Méthode de Laplace et de la phase stationnaire

I- Méthode de Laplace ref: Candelpergher, Calcul d'intégral. + poly de Hugo-Purlog

On s'intéresse au comportement quand $t \to +\infty$ de fonctions de la forme :

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx$$

Théorème : Méthode de Laplace.

Soient $a < b \leq +\infty$, $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b[, \mathbb{R})$ et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$. On suppose f continue en a et qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x \longmapsto e^{-t_0\varphi(x)} f(x) \text{ est intégrable sur }]a,b[.$$

On suppose de plus que :

$$\varphi'(a) = 0,\ \varphi'(x) > 0 \text{ pour } x > a,\ \varphi''(a) > 0 \text{ et } f(a) \neq 0.$$

Alors on a l'équivalent suivant pour $t \to +\infty$:

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx \xrightarrow[t\to+\infty]{} e^{-t\varphi(a)} f(a) \sqrt{\frac{\pi}{t\varphi''(a)}}$$

Preuve : Dans un premier temps, on s'assure que l'intégrale fait sens pour t assez grand. En effet si $t > t_0$ on a :

$$\left|e^{-t\varphi(x)} f(x)\right| = e^{-(t-t_0)\varphi(x)}\, e^{-t_0\varphi(x)} |f(x)| \leq e^{-(t-t_0)\varphi(a)}\, e^{-t_0\varphi(x)} |f(x)|$$ qui est intégrable par hypothèse.

Cas 1 : $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$.

Or f est continue en 0 donc : $\forall \delta > 0, \exists M > 0, |f(x)| \leq M\ (\forall x \in [0,b])$

On fixe $\delta > 0$ et on a :

$$\int_0^b e^{-tx^2} f(x)\,dx = \int_0^\delta e^{-tx^2} f(x)\,dx + \int_\delta^b e^{-tx^2} f(x)\,dx.$$

Par la première intégrale, le changement de variable $y = \sqrt{t}\,x$ donne :

$$\int_0^\delta e^{-tx^2} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{t}\delta} e^{-y^2} f\left(t^{-\frac{1}{2}} y\right) dy.$$

L'hypothèse en 0 sur f assure par convergence dominée, que :

$$\int_0^{\sqrt{t}b} e^{-y^2} f(t^{-1/2}y)\,dy \xrightarrow[t\to+\infty]{} f(0)\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0).$$

Ce qui nous donne :

$$\int_0^b e^{-tx^2} f(x)\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} f(0)$$

De plus pour l'autre terme on a :

$$\left| \int_0^b e^{-tx^2} f(x)\,dx \right| \leq e^{-(t-t_0)b^2} \int_0^b e^{-t_0 x^2} |f(x)|\,dx = \underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Ainsi on a bien :

$$\int_0^b e^{-tx^2} f(x)\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} f(0) = \sqrt{\frac{\pi}{4t}} f(0)$$

$\hookrightarrow \varphi''(0) = 2$.

Cas général : On a $\varphi(a) = 0$, $\forall x > a$, $\varphi'(x) > 0$ et $\varphi''(a) > 0$. Ainsi φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme croissant de $\varphi :]a, b[\longrightarrow]\varphi(a), \varphi(b)[$.

On pose donc pour $x \in]a,b[$:

$$\psi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)} \quad \text{qui est } \mathcal{C}^1.$$

Et on a :

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)-\varphi(a)}} = \frac{\varphi'(x)}{2\psi(x)} > 0$$

donc $\psi'(x) = \dfrac{\varphi'(a) + \varphi''(a)(x-a) + o(x-a)}{2\sqrt{\varphi'(a)(x-a) + \frac{1}{2}\varphi''(a)(x-a)^2 + o(x-a)^2}}$

$$= \frac{\varphi''(a)(x-a) + o(x-a)}{2\sqrt{\frac{1}{2}\varphi''(a)(x-a)^2 + o(x-a)^2}} \qquad \downarrow \varphi'(a) = 0$$

or $2\sqrt{\frac{1}{2}\varphi''(a)(x-a)^2 + o(x-a)^2} \underset{x\to a^+}{\sim} 2\sqrt{\frac{1}{2}\varphi''(a)}(x-a)$ et $\varphi''(a)(x-a) + o(x-a) \underset{x\to a^+}{\sim} \varphi''(a)(x-a)$.

donc

$$\psi'(x) \underset{x\to a}{\sim} \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}$$

Ainsi $\psi :]a,b[\longrightarrow]\varphi(a), \varphi(b)[$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant et se prolonge par continuité en a. Ainsi par changement de variable.

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{\varphi(b)-\varphi(a)}} e^{-t(y^2+\varphi(a))} f(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)))\,\frac{\varepsilon y\,dy}{\varphi'[\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a))]}$$

$$y = \sqrt{\varphi(x)-\varphi(a)}$$
$$dy = \frac{\varphi'(x)}{\varepsilon\sqrt{\varphi(x)-\varphi(a)}}\,dx$$

$$= \varepsilon e^{-t\varphi(a)} \int_0^{\sqrt{\varphi(b)-\varphi(a)}} e^{-ty^2} f(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)))\,\frac{y\,dy}{\varphi'(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)))}$$

On pose $g(y) := f(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)))\,\frac{y}{\varphi'(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)))}$ ainsi $g :]0, \sqrt{\varphi(b)-\varphi(a)}[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Et en 0 on a :

$$g(y) = f(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)))\,\frac{y\,\varphi'(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$$

$$= \frac{f(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)))}{\varepsilon\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$$

or $\varphi^{-1}(y) \xrightarrow[y\to 0]{} a$ et φ continue en a.

$\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)) \xrightarrow[y\to 0]{} a$ et f continue en a.

$$\underset{y\to 0}{\sim} \frac{f(a)}{\varepsilon\varphi'(a)} = \frac{f(a)}{\sqrt{\varepsilon^2\varphi''(a)}} \neq 0$$

Ainsi d'après le cas précédent :

$$\int_0^{\sqrt{\varphi(b)-\varphi(a)}} e^{-ty^2} g(y)\,dy \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} = \frac{f(a)}{\varepsilon}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2\varphi''(a)}}\sqrt{\pi}$$

Ce qui nous donne l'équivalent voulue :

$$\int_a^b e^{-t\varphi(a)} f(x)\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t\varphi(a)} f(a)\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon^2\varphi''(a)}}$$

∎

Rmq : . La démonstration est la même si φ admet un max en b.

. Si l'extremum est atteint à l'intérieur de l'intégrale on utilise la relation de Chasles et on obtient que :

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t\varphi(x_0)} f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{t\varphi''(x_0)}}$$

Application : Formule de Stirling.

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\,t^t e^{-t}$$

Preuve :

On sait que la fonction Γ est définie comme :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

On cherche un équivalent de $\Gamma(t+1)$, on fait donc le chgt de variable $x = t(u+1)$ on a :

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dx \quad \text{or} \quad x = t(u+1) \text{ donc } dx = t\,du.$$

$$u = \frac{x}{t} - 1$$

$$= \int_{-1}^{+\infty} e^{-t(u+1)} (t(u+1))^t t\,du$$

$$= t^{t+1} \int_{-1}^{0} e^{-t(u+1)} (u+1)^t du + t^{t+1} \int_0^{+\infty} e^{-t(u+1)} (u+1)^t du.$$

$$= t^{t+1} \int_{-1}^{0} e^{-t(u+1-\ln(u+1))} du + t^{t+1} \int_0^{+\infty} \exp(-t(u+1-\ln(u+1)))\, du$$

On pose $\varphi(u) = u+1-\ln(u+1)$ et $f = 1$ qui vérifie les conditions du théorème de sorte que :

$$\int_{-1}^{0} e^{-t(u+1)} (u+1)^t du \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(u+1)} (u+1)^t du \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$$

Ce qui nous donne :

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{t+1} 2 e^{-t} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$$

$$= \sqrt{2\pi t}\, t^t e^{-t}.$$

II - Méthode de la phase stationnaire :

On regarde le comportement $t \to +\infty$ de :

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x)\, dx$$

Lemme : (Phase non stationnaire) Soient $a < b$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi' \neq 0$ sur $[a,b]$ et $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$. Alors

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x)\, dx = \underset{t\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Preuve: On fait une simple IPP:

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x)\,dx = \int_a^b \varphi'(x) e^{it\varphi(x)} \frac{f(x)}{\varphi'(x)}\,dx = \left[\frac{1}{it} e^{it\varphi(x)} \frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right]_a^b - \frac{1}{it}\int_a^b e^{it\varphi(x)} \left(\frac{f}{\varphi'}\right)'(x)\,dx$$

Or $\left| e^{it\varphi(x)} \left(\frac{f}{\varphi'}\right)'(x) \right| \leq \left| \left(\frac{f}{\varphi'}\right)'(x) \right| dx = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$

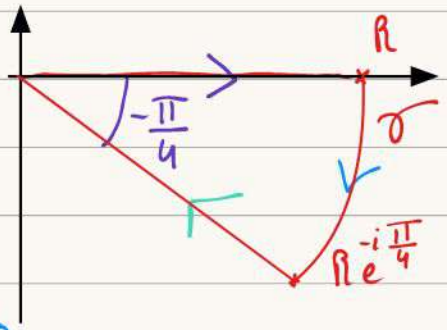
Remarque: Si f s'annule au bord et est plus régulière, on peut itérer le processus et on obtient $O\left(\frac{1}{t^N}\right)$ où N la régularité de f.

Lemme: (Intégrale de Fresnel)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ix^2}\,dx = \sqrt{\pi}\, e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

Preuve: On fait $+$, $-$ étant pareil.

Pour $R>0$, on note γ le contour suivant. La f° $z \mapsto e^{-z^2}$ étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, ainsi :



$$0 = \int_\gamma e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(Re^{-i\theta})^2} (-iRe^{-i\theta})\,d\theta + \int_R^0 e^{-(xe^{i\frac{\pi}{4}})^2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\,dx$$

On pour la première intégrale on sait que:

$$\int_0^R e^{-x^2} dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pour la troisième on a:

$$\int_R^0 e^{-(xe^{-i\frac{\pi}{4}})^2} e^{-i\frac{\pi}{4}} dx = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{ix^2} dx$$

Et pour la deuxième on a:

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{-i2\theta}} (-iRe^{-i\theta})\,d\theta \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} R \exp(-R^2\cos(2\theta))\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (R^2\cos(2\theta))^{1/2} e^{-R^2\cos(2\theta)} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\,d\theta$$

Or $x \mapsto x^{1/k} e^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$ est intégrable donc par convergence dominée

On a:

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{-i\theta}} (-iRe^{-i\theta}) d\theta \right| \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

D'où le résultat:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^R e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Et on conclut par parité de $x \mapsto e^{ix^2}$. ∎

On peut démontrer le théorème de la phase stationnaire. Rmq: Zuilly-Queffélec ⇒ dupt à tous les ordres.

Théorème: (Méthode de la phase stationnaire). Soient $a<b$ et $f, \varphi \in \mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que φ' s'annule en un unique $x_0 \in]a,b[$ et $\varphi''(x_0) \neq 0$, alors:

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx = f(x_0) e^{it\varphi(x_0)} e^{i \operatorname{sgn}(\varphi''(x_0))\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\varphi''(x_0)|}} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Preuve: Soit $\delta > 0$ suffisamment petit, on sait par le lemme de la phase non stationnaire:

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{it\varphi(x)} f(x) dx + \int_a^{x_0-\delta} e^{it\varphi(x)} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx$$

$$= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{it\varphi(x)} f(x) dx + O_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\varphi'(x_0) = 0$, il existe une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\rho(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ et que:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2(1+\rho(x))$$

On pose alors le changement de variable $y = \Psi(x)$ où:

$$\Psi(x) = \sqrt{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|} = \sqrt{\frac{|\varphi''(x_0)|}{2}} (x-x_0)\sqrt{1+\rho(x)}$$

On a:

$$\Psi(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \sqrt{\frac{|\varphi''(x_0)|}{2}}(x-x_0) \text{ et } \Psi'(x_0) = \sqrt{\frac{|\varphi''(x_0)|}{2}} > 0.$$

Ainsi si δ est assez petit, $\Psi : [x_0-\delta, x_0+\delta] \to [A,B]$ est un $\mathcal{C}^1$ difféo croissant où $[A,B] = \Psi([x_0-\delta, x_0+\delta])$ car $\Psi' > 0$.

et $0 \in [A,B]$ car $\psi(x_0)=0$. On a alors par changement de variable $\begin{cases} y=\psi(x) & dy=\psi'(x)dx \\ x=\psi^{-1}(y) & \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))}dy=dx \end{cases}$

$$\int_{x_0-b}^{x_0+b} e^{it\varphi(x)} f(x)dx = \int_A^B e^{it\varphi(\psi^{-1}(y))} f[\psi^{-1}(y)] \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))} dy.$$

Comme précédement on pose:

$$g(y) = f[\psi^{-1}(y)] \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))} \text{ sur } [A,B].$$

Et comme $x_0 = \psi^{-1}(0)$ et par continuité de f, ψ' on a:

$$g(0) = f(x_0)\frac{1}{\psi'(x_0)} = f(x_0)\sqrt{\frac{2}{|\psi''(x_0)|}}.$$

Or dans un voisinage de x_0 on a:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2(1+\rho(x)) \\ &= \varphi(x_0) + \operatorname{sgn}(\varphi''(x_0))\,\psi(x)^2\end{aligned}$$

Ainsi ceci nous donne:

$$\begin{aligned}\int_{x_0-b}^{x_0+b} e^{it\varphi(x)} f(x)dx &= \int_A^B e^{it\varphi(\psi^{-1}(y))} g(y)\,dy \\ &= e^{it\varphi(x_0)} \int_A^B e^{it\operatorname{sgn}(\varphi''(x_0))y^2} g(y)\,dy.\end{aligned}$$

Or g est $\mathcal{C}^\infty$ donc il existe $h \in \mathcal{C}^\infty$ telle que:

$$g(y) = g(0) + yh(y), \quad \forall y \in [A,B]$$

Ainsi

$$\int_A^B e^{\pm ity^2} g(y)\,dy = g(0)\int_A^B e^{\pm ity^2}dy + \int_A^B y\,e^{\pm ity^2}h(y)\,dy.$$

On pose $u = \sqrt{t}y$ dans la première intégrale:

$$\int_A^B e^{\pm ity^2}dy = \int_{\sqrt{t}A}^{\sqrt{t}B} e^{\pm iu^2}\frac{1}{\sqrt{t}}du \underset{\substack{A<0<B \\ t\to+\infty}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iu^2}du = \frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{\pi}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

(intégrale de Fresnel)

Par la deuxième intégrale on fait simplement une IPP qui donne:

$$\int_A^B y\,e^{\pm ity^2}h(y)\,dy = \left[\frac{1}{\pm 2it}e^{\pm ity^2}h(y)\right]_A^B - \frac{1}{\pm 2it}\int_A^B e^{\pm ity^2}h'(y)\,dy \text{ or } h' \text{ étant borné sur } [A,B]$$

Ainsi on a bien:

$$\int_{x_0-b}^{x_0+b} e^{it\varphi(x)} f(x)\,dx = e^{it\varphi(x_0)}\, g(0)\sqrt{\pi}\, e^{i\,\mathrm{sgn}(\varphi''(x_0))\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{t}} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= f(x_0)\, e^{it\varphi(x_0)}\, e^{i\,\mathrm{sgn}(\varphi''(x_0))\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\varphi''(x_0)|}} + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ce résultat reste vrai en toute dimension.

Lemme: Soient $\varphi, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, f à support compact. On suppose que $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur le support de f. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\varphi(x)} f(x)\,dx = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^N}\right)$$

Théorème: Soient $\varphi, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, f à support compact. On suppose que $\nabla\varphi$ ne s'annule en un unique point x_0 sur $\mathrm{supp}(f)$ et que:

$$\det(\nabla^2\varphi(x_0)) \neq 0$$

Alors:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\varphi(x)} f(x)\,dx = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{e^{it\varphi(x_0)}}{\sqrt{|\det(\nabla^2\varphi(x_0))|}}\, e^{i\,\mathrm{sgn}(\det(\nabla^2\varphi(x_0)))\frac{\pi}{4}} f(x_0) + \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{d}{2}+1}}\right)$$

Application: Equation des ondes

Soient $c, \varepsilon > 0$, $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on regarde le comportement de la solution de l'équation d'ondes:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u_\varepsilon = \partial_x^2 u_\varepsilon \\ u_\varepsilon(0,x) = u_{0,\varepsilon}(x) = e^{\frac{i\varphi(x)}{\varepsilon}} a(x) \\ \partial_t u_\varepsilon(0,x) = 0 \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

Montrons d'abord que le problème est bien posé pour cela on prend sa transformée de Fourier en x on obtient: $\begin{cases} \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \hat{u}_\varepsilon = -\xi^2 \hat{u}_\varepsilon \\ \hat{u}_\varepsilon(0,\xi) = \hat{u}_{0,\varepsilon}(\xi) \text{ et } \partial_t \hat{u}_\varepsilon(0,\xi) = 0. \end{cases}$

A ξ fixé, cela devient une edo selon t dont la solution est donnée par.

$$\hat{u}_\varepsilon(t,\xi) = \cos(c\xi t)\,\hat{u}_{0,\varepsilon}(\xi)$$

Comme $u_{0,\varepsilon} \in \mathcal{C}^\infty$ et à support compact elle est dans la classe de Schwartz, on peut donc prendre sa transformée de fourier inverse, ainsi :

$$u_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{c\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\cos(c\xi t)\,\widehat{u_{0,\varepsilon}}(\xi)\,d\xi$$

Puis on montre par analyse-synthèse que u_ε est l'unique solution du problème. On veut écrire u_ε sous la forme d'une intégrale oscillante pour cela on écrit le cos sous forme exponentielle, et on sépare la solution en deux :

$$u_\varepsilon^{\pm}(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\, e^{\pm ic\xi t}\,\hat{u}_{0,\varepsilon}(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi(x-y)\pm ic\xi t}\, e^{ic^{-1}\varphi(y)}\,v(y)\,dy\,d\xi.$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ic^{-1}(\xi(x-y\pm ct)+\varphi(y))}\,v(y)\,dy\,d\xi$$

On identifie donc la phase :

$$\psi_\pm(\xi,y) = \xi(x-y\pm ct)+\varphi(y).$$

et :

$$\nabla\psi_\pm(\xi,y) = \begin{pmatrix} x\pm ct - y \\ \varphi'(y)-\xi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2\psi_\pm(\xi,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \varphi''(y)\end{pmatrix}$$

Les points stationnaires sont donc : $(\varphi'(x\pm t),\, x\pm ct) = (\xi_0, y_0)$

Pour lesquels on a :

$$\psi_\pm(\xi_0,y_0) = \varphi(x\pm ct) \quad \text{et} \quad \nabla^2\psi_\pm(\xi_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \varphi''(x\pm ct)\end{pmatrix}$$

La phase stationnaire nous donne :

$$u_\varepsilon^{\pm}(t,x) = \frac{1}{2\pi}\; e^{i\frac{\varphi(x\pm ct)}{\varepsilon}}\; e^{-i\frac{\pi}{4}}\, v(x\pm ct) + \underset{\varepsilon\to 0}{O}(\varepsilon)$$

$\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon.$

$e^{i\varphi}$

Ainsi $u_\varepsilon(t,x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\pi}\left[\frac{e^{i\varphi(x+ct)}\,v(x+ct) - e^{i\varphi(x-ct)}\,v(x-ct)}{\varepsilon}\right] + \underset{\varepsilon\to 0}{O}(\varepsilon).$

Application: Fonction d'Airy. réf: Zuily-Queffélec, p352 ou Candelbergher (méthode du col+)

La fonction de Airy est définie comme:

$$Ai(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}}\, dx$$

(Elle a été introduite historiquement pour étudier les arcs-en-ciels)

On montre que:

1) Pour $t \to +\infty$, $Ai(t)$ est à décroissance rapide ie $\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0,\ |F(t)| \leq C_N t^{-N}$ pour $t \geq 1$.

2) Pour $t \to -\infty$ on a:

$$Ai(t) = 2\sqrt{\pi}\,|t|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(|t|^{-7/4}).$$

Preuve: On admet ici que Ai est bien définie et continue.

1) On a:

$$Ai(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx + i\frac{x^3}{3}}\, dx.$$

Soit $t > 0$, on fait le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ ainsi $\sqrt{t}\,dy = dx$. ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme).

Alors,

$$Ai(t) = \sqrt{t}\int_{\mathbb{R}} e^{it^{3/2}\left(y + \frac{y^3}{3}\right)}\, dy.$$

On note $\varphi(y) = y + \frac{y^3}{3}$ on a: $\varphi'(y) = 1 + y^2 > 0\ \forall y \in \mathbb{R}$.

Ainsi par le lemme de la phase non stationnaire, (+∞ et -∞ ???)

$$Ai(t) = \sqrt{t}\left(\frac{1}{t^{\frac{3N}{2}}}\right) = O\left(\frac{1}{t^N}\right).\ \forall N \in \mathbb{N} \text{ car } f = 1 \in \mathcal{C}^\infty.$$

2) Soit $t < 0$, on fait le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{-t}}$ donc $\sqrt{-t}\,dy = dx$:

$$Ai(t) = \sqrt{-t}\int_{\mathbb{R}} e^{i(-t)^{3/2}\left(\frac{y^3}{3} - y\right)}\, dy.$$

On pose $\varphi(y) = \frac{y^3}{3} - y$

$\varphi'(y) = y^2 - 1$ qui s'annule en $y = \pm 1$.

$\varphi''(y) = 2y$ qui ne s'annule pas en $y = \pm 1$. donc $\varphi''(-1) = -2$ et $\varphi''(1) = 2$.

Par chasles on donc:

$$Ai(t) = \sqrt{-t}\int_{-\infty}^{-2} e^{i(-t)^{3/2}\left(\frac{y^3}{3}-y\right)}\,dy + \int_{-2}^{0}\sqrt{-t}\,e^{i(-t)^{3/2}\varphi(y)}\,dy + \int_{0}^{2}\sqrt{-t}\,e^{i(-t)^{3/2}\varphi(y)}\,dy$$
$$+\sqrt{-t}\int_{2}^{+\infty} e^{i(-t)^{3/2}\varphi(y)}\,dy.$$

En appliquant la phase non stationnaire :

$$\sqrt{-t}\int_{-\infty}^{-2} e^{i(-t)^{3/2}\varphi(y)}\,dy = \sqrt{-t}\;O\left(\frac{1}{(-t)^{3/2}}\right) = O\left(\frac{1}{-t}\right) = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

de même, $\sqrt{-t}\displaystyle\int_{2}^{+\infty} e^{i(-t)^{3/2}\varphi(y)}\,dy = O\left(\frac{1}{t}\right)$. $\quad -\frac{1}{3}+1 =$

Par la phase stationnaire,

$$\sqrt{-t}\int_{-2}^{0} e^{i(-t)^{3/2}\varphi(x)}\,dx = \sqrt{\pi}\,(-t)^{1/2}\,(-t)^{-3/4}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,e^{i(-t)^{3/2}\frac{2}{3}} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

$$\sqrt{-t}\int_{0}^{2} e^{i(-t)^{3/2}\varphi(x)}\,dx = \sqrt{\pi}\,(-t)^{-1/4}\,e^{-i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi, on a :

$$Ai(t) = 2\sqrt{\pi}\,|t|^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}|t|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|t|}\right) \text{ quand } t \to -\infty.$$

□

Rmq : 1) Ai est bien définie et même continue pour $t \in \mathbb{R}$.

Il suffit de regarder la convergence sur $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ et a tel que $a^2 + t > 0$.

Soit $|R| > |a|$ alors

$$\int_a^R e^{i\left(\frac{x^3}{3}+tx\right)}\,dx = \frac{1}{i}\int_a^R \underbrace{e^{i\left(\frac{x^3}{3}+xt\right)}\,i(x^2+t)}_{u'}\;\underbrace{\frac{1}{x^2+t}}_{v}\,dx$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{1}{x^2+t}\,e^{i\left(\frac{x^3}{3}+xt\right)}\right]_a^R - \frac{1}{i}\int_a^R e^{i\left(\frac{x^3}{3}+xt\right)}\,\frac{-2x}{(x^2+t)^2}\,dx$$

Or $\left|\frac{1}{i}\frac{1}{R^2+t}\,e^{i\left(\frac{R^3}{3}+Rt\right)}\right| \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

et $\left|e^{i\left(\frac{x^3}{3}+xt\right)}\,\frac{-2x}{(x^2+t)^2}\right| = \frac{2|x|}{|(x^2+t)^2|} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc intégrable.

Ainsi $\int_a^{+\infty} e^{i(\frac{x^3}{3}+xt)}\,dx < +\infty$.

Et de même par $\int_{-\infty}^{a} e^{i(\frac{x^3}{3}+xt)}\,dx < +\infty$.

2) De plus Ai est même de classe $\mathcal{C}^\infty$ (on faisant des IPP ($\mathcal{C}^2$ en faisant des IPP) + sol de (1)).
Et solutions de l'équation différentielle :

(1) $y'' - ty = 0$.

Lemmes utiles dans le dvpt.

Lemme : Soit $g \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$, il existe $h \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ tel que :

$$\forall y,\ g(y) = g(0) + yh(y) \qquad (0 \in [a,b]).$$

Preuve : Soit $y \in [a,b]$ on a :

$y \neq 0$. $\quad g(y) = g(0) + \int_0^y g'(t)\,dt$

$= g(0) + y\int_0^1 g'(uy)\,du$. $\quad \Big\downarrow$ $t = yu \Rightarrow dt = y\,du$. (ok $y > 0$ ou en 0).

On pose $h(y) = \int_0^1 g'(uy)\,du$.

Vq $h \in \mathcal{C}^\infty$, on a : $f : (u,y) \in [0,1]\times[a,b] \longrightarrow g'(uy)$ est $\mathcal{C}^\infty$ intégrable.

$$\frac{\partial^k f}{\partial y^k} : (u,y) \longrightarrow u^k g^{(k+1)}(uy).$$

Et $\left|\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(u,y)\right| \leq \|g^{k+1}\|_\infty u^k$ donc intégrable sur $[0,1]$.

Lemme : Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ tel que $\varphi'(x_0) = 0$. Alors il existe $\rho \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ tel que :

$$\forall x,\ \varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2(1+\rho(x)).$$

Preuve : Soit $h \in \mathcal{C}^\infty$ définie comme :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) - \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2 = h(x).$$

Alors par dvpt de taylor de φ, $\frac{h(x)}{(x-x_0)^2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ donc $h(x_0) = 0$

On sait qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty$ tel que:

$$h(x) = (x-x_0)g(x).$$

Or on a aussi,

$$g(x) = g(x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$$

Ce qui donne: $h(x) = (x-x_0)g(x_0) + (x-x_0)^2\varepsilon(x)$ or $\frac{h(x)}{(x-x_0)^2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

donc $g(x_0)$ et $\varepsilon(x_0) = 0$.

Ainsi $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x_0)$.

Par l'intégrale de Fresnel.

Lemme: On a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta)}}\, d\theta < +\infty.$$

Preuve:

On a: $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(\theta) > 0$ et cos bijectif $\cos :]0, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]0, 1[$.

On pose $u = \cos(\theta)$ donc $\theta = \arccos(u)$

$$d\theta = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta)}}\, d\theta = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u-u^3}}\, du < +\infty \quad \text{car } \left(\sqrt{u-u^3}\right)^{-1} \underset{u \to 0}{\sim} \left(\sqrt{u}\right)^{-1} \text{ positif et intégrable.}$$