Théorème de Hadamard Levy

ref: Hugo-Hurley, Zuily-Queffélec p.404, Un max de maths p130.

Définition: Soit E, F deux RVN et $f: E \to F$ on dit que f est propre si pour tout $K \subset F$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact.

Exemple: - Soit f un homéomorphisme alors f^{-1} continue donc f est propre
- cos n'est pas propre car $\cos([-1,1]) = \mathbb{R}$.

Lemme: Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ continue alors

$$f \text{ propre} \iff \lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$$

Preuve: $\Rightarrow$: Par l'absurde supposons $\forall A > 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists x_p \in \mathbb{R}^n$, $\|x_p\| > p$, $\|f(x_p)\| \leq A$

Alors $\{x_p, p \in \mathbb{N}\} \subset f^{-1}(\overline{B(0,A)})$ $\Rightarrow$ compact

(compact)

donc $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ bornée ce qui est absurde

$\Leftarrow$: Soit K un compact alors $f^{-1}(K)$ est bornée.

En effet sinon il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $\|x_n\| \longrightarrow +\infty$

donc $\|f(x_n)\| \longrightarrow +\infty$

Or $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ bornée.

De plus f étant continue $f^{-1}(K)$ est fermée donc compact. ☐

Rmq: $\mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R} \subseteq \{\text{fraction propre}\}$.

Théorème: (Hadamard-Lévy).

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ alors on a équivalences entre:

i) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

ii) f est propre et vérifie, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n$, $Jac(f)(x) \neq 0$.

Rmq :
- Vraie avec f seulement $\mathcal{C}^1$ mais preuve différente et plus dure.
- Faux en dimension infinie.
- Inversion globale vraie en dimension infinie.

Preuve :

i) $\Rightarrow$ ii) : Soit f un difféomorphisme donc c'est un homéomorphisme donc f^{-1} est continue donc f propre.

De plus, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f^{-1} \circ f = Id \quad \text{donc} \quad d(f^{-1})(f(x)) \circ df(x) = Id$$
$$f \circ f^{-1} = Id \quad \text{donc} \quad df(f^{-1}(y)) \circ d(f^{-1})(y) = Id$$

Donc $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$.

ii) $\Rightarrow$ i) On suppose $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Par le théorème d'inversion globale il suffit de montrer que f est bijective.

Mq f est surjective.

On raisonne par connexité en montrant que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$.

$f(\mathbb{R}^n)$ fermée :

Soient y un point de $\mathbb{R}^n$ et $y_n = f(x_n)$ tel que $f(x_n) = y_n \to y$.

Ainsi $B = \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est compact

donc $f^{-1}(B)$ est compact.

Or $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq f^{-1}(B)$ donc il existe une extractrice ψ et $x \in f^{-1}(B)$ tel que :

$$x_{\psi(n)} \longrightarrow x$$

Or par continuité de f, $f(x_{\psi(n)}) \longrightarrow f(x)$ d'où $f(x) = y$.

$f(\mathbb{R}^n)$ ouvert :

Soit $y \in f(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.

Or $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ donc par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $f|_V$ est un homéomorphisme sur son image et tel que $f(V)$ est ouvert ainsi $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert.

Ainsi f est surjective.

Mq f est injective :

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^N$, on va montrer que $f^{-1}(\{y_0\})$ contient exactement un point, quitte à effectuer une translation $x \mapsto f(x) - y_0$ on peut supposer que $y_0 = 0$.

On note donc $\Omega = f^{-1}(\{y_0\})$ et l'on montre que Ω est un singleton.

On pose : $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ par hypothèse donc localement lipschitzienne.

$x \longmapsto -(d_x f)^{-1}(f(x))$

Soit $x \in \mathbb{R}^N$ fixé.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une unique solution maximale γ_x définit sur $\mathcal{D}_x$ de

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_x(t) = F(\gamma_x(t)) \\ \gamma(0) = x \end{cases}$$

On pose $T_x^* > 0$ tel que $[0, T_x^*[= I_x \cap \mathbb{R}^+$ alors si on pose :

$$g_x : [0, T_x^*[\longrightarrow \mathbb{R}^n.$$
$$t \longmapsto f(\gamma_x(t))$$

Alors g_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T_x^*[$ et :

$$g_x'(t) = d_{\gamma_x(t)} f(\dot{\gamma}_x(t)) = -d_{\gamma_x(t)} f \circ (d_{\gamma_x(t)} f)^{-1}(f(\gamma_x(t))) = -g_x(t).$$

Ainsi on a $\forall t \in [0, T_x^*[$, $g_x(t) = e^{-t} g_x(0) = e^{-t} f(x)$

donc $\forall t \in [0, T_x^*[$, $f(\gamma_x(t)) = e^{-t} f(x)$

Donc $\forall t \in [0, T_x^*[$, $\gamma_x(t) \in f^{-1}(\overline{B(0, \|f(x)\|)})$ compact.

compact

La solution est bornée donc par le théorème de sortie de tout compact,

$$T^* = +\infty.$$

Donc γ_x est définit sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $(\gamma_x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ inclus dans un compact donc admet une valeur d'adhérence. Ainsi il existe

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice et $y^* \in \mathbb{R}^N$ tel que $\gamma_x(\varphi(n)) \longrightarrow y^*$ et par continuité de f :

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(\gamma_x(\varphi(n))) = e^{-\varphi(n)} f(x)$ on a : $f(y^*) = 0$

D'où $y^* \in \Omega$.

Soit $y^* \in \Omega$, par le TIL, il existe $\delta_{y^*} > 0$ et $\exists\, U_{y^*,\varepsilon}$ un ouvert de y^* dans $\mathbb{R}^n$ tel que :

$f : U_{y^*} \longrightarrow B(0, \delta_{y^*})$ est un C^1-difféomorphisme

Soit $x \in \mathbb{R}^N$, on suppose $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $\gamma_x(t_0) \in U_{y^*}$ alors $\forall t \geq t_0$, $\gamma_x(t_0) \in U_{y^*}$

En effet,

$$t_0 \in \{ t \geq t_0,\ \gamma_x(t) \in U_{y^*} \} = \gamma_x^{-1}\left(U_{y^*}\right) \cap [t_0, +\infty[\text{ donc ouvert}$$

ouvert

$$= \{ t \geq t_0,\ \gamma_x(t) = (f|_{V_{y^*}})^{-1}\left(e^{-t} f(x)\right) \} \text{ donc fermée}$$

Par connexité on a $\{ t \geq t_0,\ \gamma_x(t) \in U_{y^*,\varepsilon} \} = [t_0, +\infty[$ ainsi $\forall t \geq t_0$, $\gamma_x(t) = (f|_{V_{y^*}})^{-1}(\underbrace{e^{-t} f(x)}_{\to 0,\ t \to +\infty}) \longrightarrow y^*$

Donc par ce qui précède pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ il existe $y^* \in \Omega$ tel que $\gamma_x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y^*$

On pose :

$$\forall y^* \in \Omega,\ W_{y^*} = \{ x \in \mathbb{R}^n,\ \gamma_x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y^* \} \text{ alors } \mathbb{R}^n = \bigsqcup_{y^* \in \Omega} W_{y^*}$$

Or W_{y^*} est non vide car $y^* \in W_{y^*}$ $\Rightarrow$ unique solution de $\begin{cases} \dot{\gamma}_{y^*}(t) = f(\gamma_{y^*}(t)) \\ \gamma(0) = y^* \end{cases}$ car $f(y^*) = 0$

- disjoints (unicité de la limite)
- Ouverts (à montrer)

Par connexité de $\mathbb{R}^n$ il existe $y^* \in \Omega$ tq $\mathbb{R}^n = W_{y^*}$ donc $\Omega = \{y^*\}$.

Mq W_{y^*} est ouvert :

Soit $x \in W_{y^*}$, on fixe $r_{y^*} > 0$ tel que $B(y^*, 2r_{y^*}) \subset U_{y^*}$

De plus il existe $T > 0$ tq :

$$\forall t \geq T,\ \| \gamma_x(t) - y^* \| \leq r_{y^*}$$

Or par continuité du flot il existe $\delta > 0$ tq $\forall y \in \mathbb{R}^N$, $\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \| \gamma_x(T) - \gamma_y(T) \| \leq r_{y^*}$

donc

$$\| \gamma_y(T) - y^* \| \leq 2r_{y^*} \text{ donc } \gamma_y(T) \in U_{y^*} \text{ donc } \forall t \geq T,\ \gamma_y(t) \in U_{y^*,\varepsilon} \text{ donc } \gamma_y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y^*.$$

donc $g \in W_{g^*}$ ainsi $B(x,\delta) \subseteq W_{g^*}$ d'où le résultat.

Application : Il existe $\varepsilon > 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $L \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\|a\| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|L - Id\| \leq \varepsilon$$

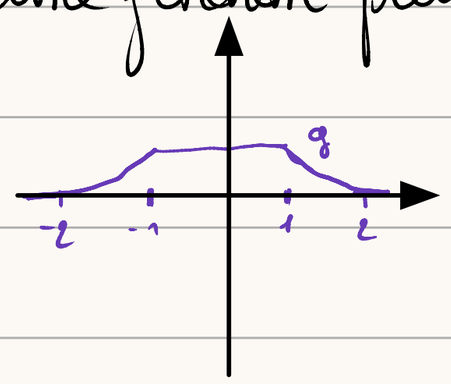
Alors il existe un difféo de f de $\mathbb{R}^n$ tel que :

- $\forall \|x\| < 1$, $f(x) = Lx + a$
- $\forall \|x\| > 2$, $f(x) = x$.

Preuve :

On note $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. On considère une fonction plateau $g \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-1,1]$

0 sur $[-2,2]^c$



On définit, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = x + g(\|x\|^2)(Lx + a - x)$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ est propre.

La différentielle de f est clairement inversible en x si $\|x\| < 1$ ou si $\|x\| > 2$

Soit maintenant $1 \leq \|x\| \leq 2$, alors pour $h \in \mathbb{R}^n$:

$$df_x . h = h + g(\|x\|^2)(Lh - h) + g'(\|x\|^2) 2 \langle x, h \rangle (Lx + a - x)$$

Avec $M = \|g'\|_\infty$ on a :

$$\|df_x - Id\| \leq (1 + 4M)\|L - Id\| + 4M\|a\|$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$\|df_x - Id\| < 1.$$

donc df_x inversible.

Hadamard-Levy conclut.