Poisson et Shannon

Réf: Bernis Bernis, Analyse pour l'agreg p.253
El Amrani, Fourier.

Proposition: Soit f un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, pour tout réel t on a la formule de Poisson

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t+2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \exp(ikt).$$

Preuve:

Pour commencer, observons que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n + .)$ et sa série dérivée convergent normalement sur tout compact.

En effet, soient K un compact de $\mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset [-N, N]$.

Par j on désigne aussi bien l'entier 0 que l'entier 1. Comme f est élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, on dispose, de $M_j \in \mathbb{R}_+^*$ tel que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f^{(j)}(t)| \leq \frac{M_j}{1+t^2}.$$

Pour tout réel $t \in K$ et tout entier relatif n tel que $|n| > N+1$, on a alors:

$$|f^{(j)}(t+2\pi n)| \leq \frac{M_j}{1+(t+2\pi n)^2} \leq \frac{M_j}{(2|n|\pi - N)^2}$$

Or la série $\sum_{|n|\geq N+1} \frac{1}{(2\pi(|n|-N))^2}$ converge, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f^{(j)}(2\pi n + .)$ converge normalement sur K.

On note g sa somme qui est donc pour ce qui précède de classe $\mathcal{C}^1$ (f l'étant). De plus il est facile de voir g est 2π-périodique.

On calcule les coefficients de Fourier de g:

On a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, par convergence normale de la série:

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n + t) \exp(-ikt)\, dt$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(2\pi n + t) \exp(-ikt)\, dt \qquad \left| \begin{array}{l} u = 2\pi n + t \\ du = dt. \end{array} \right.$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(u) \exp(-iku)\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \exp(-iku)\,du \quad \text{à un sens car } f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Or g est de la classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique, elle est donc égale à sa série de Fourier qui converge normalement,

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n + t) = g(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-inu}\,du \right) e^{int} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on suppose que $\mathrm{supp}(\hat{f}) \subseteq [-\Omega, \Omega]$ avec $\Omega \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $0 \leq \Omega < \pi$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin((n-t)\pi)}{(n-t)\pi}$$

1. Echantillonage de Shannon

Preuve :

Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on sait que $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on peut donc l'appliquer la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\hat{f}}(n) e^{in\xi}$$

Or, on sait que par inversion de Fourier, $\hat{\hat{f}}(n) = 2\pi f(-n)$, ce qui donne

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2k\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n) e^{in\xi}$$

Car pour $t \in [-\pi, \pi]$,
si $k \geq 1$, $2k\pi + t \geq (2k-1)\pi \geq \pi > \Omega$
si $k \leq -1$, $2k\pi + t \leq (2k+1)\pi \leq -\pi < -\Omega$.

De plus on a la condition $\Omega \leq \pi$, on a pour tout k non nul $\hat{f}(2k\pi + .)$ est nul sur $[-\pi, \pi]$.

Ainsi on a :

$$f = \hat{f} \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]} = \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2k\pi + .) = \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n) e^{in.}$$

On applique la formule d'inversion de Fourier, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(\xi) \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-n) e^{in\xi} \right) e^{i\xi t}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{i(n+t)\xi}\,d\xi.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, e^{i(t-n)\varphi}\, dt$$

Or la série converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ car

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \| f(n) e^{i(t-n)\cdot} \|_\infty = |f(n)| \text{ et } \sum |f(n)| \text{ converge.}$$

D'où si $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(t-n)}\, d\varphi$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i\varphi(t-n)}}{i(t-n)} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(t-n))$$

Si $t \in \mathbb{Z}$ alors pour $n = t$ et $n \in \mathbb{Z}$ $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(t-n)}\, d\varphi = 1 = \mathrm{sinc}(0)$.

La formule reste donc vraie.

□

Application: Equation fonctionnelle de Θ. ref: Gourdon Analyse.

On définit la fonction de Jacobi définit par

$$\Theta :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 x}$$

On a alors :

$$\forall x > 0, \quad \Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \Theta\left(\frac{1}{x}\right).$$

Preuve:

Θ est bien définit car on a une convergence uniforme sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$.

En appliquant la formule sommatoire de Poisson à $f : t \longmapsto e^{-\alpha t^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $(\alpha > 0)$ qui a comme transformée de Fourier $\hat{f} : \varphi \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{4\alpha}\right)$.

On a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-\alpha(t + 2k\pi)^2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\alpha}\right) e^{int}$$

Donc en évaluant en 0, $\quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-4k^2\pi^2\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\alpha}\right)$

Pour $x>0$ en appliquant le résultat pour $\alpha = \frac{x}{2\pi}$ on obtient :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi k^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi k^2}{x}}$$

Ainsi, $\forall x>0$, $\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right)$.

□