Formules des compléments

réf: Barnis Barnes Analyse pour l'agreg p 74.

Proposition:

1 - Pour tout $x \in]0,1[$, on a:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

2 - Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \in]0,1[$, on a:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Rmq: On note Log la détermination principale du logarithme i.e pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ s'écrit de manière unique

$$z = r\exp(i\theta).$$

On pose alors: $\mathrm{Log}(z) = \ln(r) + i\theta$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in]0, 2\pi[$.

Preuve:

1) Soit $x \in]0,1[$, on note $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

bien définit car $0 \leq \frac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{1+x}}$

On note $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ qui est un ouvert de $\mathbb{C}$.

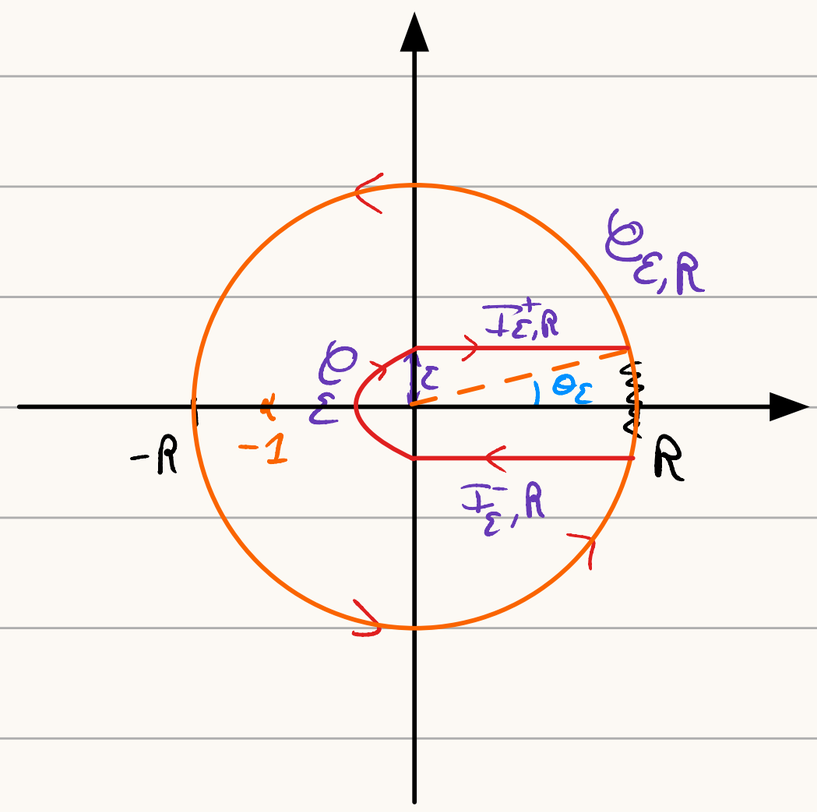
On définit $f : \Omega \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto \frac{1}{z^x(1+z)}$$

Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{-1\})$ car $\mathrm{Log} \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Pour $\varepsilon \in]0,1[$ et $R \in]1,+\infty[$, on considère le lacet C1 par morceaux, orienté positivement:

$$\Gamma_{\varepsilon,R} = \mathcal{C}_\varepsilon \cup \mathcal{I}_{\varepsilon,R}^+ \cup \mathcal{C}_{\varepsilon,R} \cup \mathcal{I}_{\varepsilon,R}^-$$



De plus d'après pythagore, $\theta_{\varepsilon,R} = \arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}\right)$

Pour tout $z \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on a :

$$(z+1)f(z) = \frac{1}{z^x} \xrightarrow[z \to -1]{} \exp(-i\pi x)$$

Donc la valeur du résidue de f en $z=-1$ est $\exp(-i\pi x)$.
D'après le théorème des résidus appliqué à f, on a alors :

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 2i\pi\, e^{-i\pi x}.$$

<u>L'arc de cercle $\mathcal{C}_{\varepsilon,R}$</u> :

On le paramétrise par l'application $\gamma_1 : [\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto Re^{it}$$

On a donc,

$$\int_{\mathcal{C}_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{iR^{1-x}\, e^{i(1-x)t}}{1+Re^{it}}\,dt$$

Or on a $\lim_{\varepsilon \to 0} \theta_{\varepsilon,R} = 0$.
Et on a la majoration suivante :

$$\left| \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{iR^{1-x}\, e^{i(1-x)t}}{1+Re^{it}}\,dt \right| \leq \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{R^{1-x}}{R-1}\,dt \leq (2\pi - 2\theta_{\varepsilon,R}) \frac{R^{1-x}}{R-1} \leq 2\pi \frac{R^{1-x}}{R-1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{R \to +\infty} 0$$

car $x \in]0,1[$

Ainsi

$$\int_{\mathcal{C}_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz \xrightarrow[\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}]{} 0.$$

<u>Pour l'arc $\mathcal{C}_\varepsilon$</u> : on paramétrise par

$$\gamma_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto \varepsilon e^{it}$$

On a alors

$$\left| \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \frac{i\varepsilon^{1-x} e^{i(1-x)t}}{1+\varepsilon e^{it}}\,dt \right| \leq \pi \frac{\varepsilon^{1-x}}{1-\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

<u>Le segment $I_{\varepsilon,R}^-$</u> : On le paramétrise par :

$$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}\,(1-t)$$

On a donc :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}^-} f(z)\,dz = \int_0^1 \frac{\gamma_\varepsilon'(t)}{\gamma_\varepsilon(t)^x\,(1+\gamma_\varepsilon(t))}\,dt$$

Or pour tout $t\in[0,1]$, on a :

$$\frac{\gamma_\varepsilon'(t)}{\gamma_\varepsilon^x(t)\,(1+\gamma_\varepsilon(t))} = \frac{-\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}{(-i\varepsilon+\sqrt{R^2-\varepsilon^2}(1-t))^x\,(-i\varepsilon+\sqrt{R^2-\varepsilon^2}(1-t)+1)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\Re(1-t)\neq 1} \frac{-R\,e^{-i\pi x}}{(R-Rt)^x\,(1+R(1-t))}$$

Car on a :

$$(-i\varepsilon+\sqrt{R^2-\varepsilon^2}(1-t))^x = \exp\left[x\log(-i\varepsilon+\sqrt{R^2-\varepsilon^2}(1-t))\right]$$
$$= \exp\left(x\left[\frac{1}{i}\ln\left[(R^2-\varepsilon^2)(1-t)^2+\varepsilon^2\right]+i\varphi_{\varepsilon,R}\right]\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (R-tR)^x\,e^{i\pi x}$$

Car $\varphi_{\varepsilon,R} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \pi$ car Im est <0 et tend vers un réel strictement positif.

Et on a la domination

$$\left|\frac{\gamma_\varepsilon'(t)}{\gamma_\varepsilon^x(t)\,(1+\gamma_\varepsilon(t))}\right| \le \frac{R}{(R-Rt)^x\,(1+R-Rt)}$$ qui est intégrable

Ainsi par CVD,

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}^-} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^1 \frac{-Re^{-i\pi x}}{(R-Rt)^x\,(1+R-Rt)}\,dt = \int_0^R \frac{-e^{-i\pi x}}{u^x\,(1+u)}\,du$$

$u = R(1-t)$
$du = -R\,dt$

Le segment $\gamma_{\varepsilon,R}^+$:

De la même manière on obtient :

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}^+} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^R \frac{1}{t^x(1+t)}\,dt.$$

Ainsi en faisant tendre $\varepsilon\to 0$ puis $R\to+\infty$ on obtient :

$$2i\pi e^{-i\pi x} = (1-e^{-2i\pi x})\,I(x).$$

Ce qui donne : $I(x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

2) Soit $x\in]0,1[$, d'après Fubini-Tonelli :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \int_0^{+\infty} s^{-x}e^{-s}\,ds$$

$$= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{1}{t} e^{-(t+s)}\,dt\,ds$$

On fait le changement de variable avec le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2$$
$$(s,t) \longmapsto (s+t, \frac{t}{s}).$$

Qui est de classe $\mathcal{C}^1$ d'inverse aussi $\mathcal{C}^1$:

$$\varphi^{-1} : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2$$
$$(u,v) \longmapsto \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}\right)$$

De plus son Jacobien et pour $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\det(J_{\varphi^{-1}}(u,v)) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{v}{1+v} \\ \frac{-u}{(1+v)^2} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{bmatrix}\right) = \frac{u}{(1+v)^2} > 0.$$

On a donc par changement de variable :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} v^x e^{-u} \frac{1+v}{uv} \frac{u}{(1+v)^2}\,du\,dv$$

$$= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} v^x e^{-u} \frac{1}{v(1+v)}\,du\,dv$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du}_{=1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{1-x}(1+v)}\,dv \quad \text{(Fubini-Tonelli)}.$$

$$= \mathcal{I}(1-x)$$

Or on a : $\mathcal{I}(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-x))} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, ce qui donne :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

De plus $\mathcal{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in]0,1[\}$ est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$. De plus $z \longmapsto \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ est holomorphe sur $\mathcal{U}$, de même pour $z \longmapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Or $]0,1[$ admet un point d'accumulation, ainsi par le théorème des zéros isolés, on a :

$$\forall z \in \mathcal{U}, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

∎