Espaces de Bergman

réf: Queffelec, Queffelec, Analyses complexes d'applications p. 121
Bernis, Bernis, Analyse pour l'agreg p. 307

On désigne $\mathbb{D}_1$ le disque ouvert unité de $\mathbb{C}$. On notera $\mathcal{H}(\mathbb{D}_1)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_1$ et $L^2(\mathbb{D}_1, \lambda)$ l'ensemble des fonctions de carrés intégrables pour la mesure de lebesgue λ de $\mathbb{R}^2$.
On définit l'espace de Bergman:

$$L^2_a(\mathbb{D}_1) = L^2(\mathbb{D}_1, \lambda) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D}_1).$$

Que l'on munit du p.s de $L^2(\mathbb{D}_1, \lambda)$ définit par:

$$\forall f, g \in L^2_a(\mathbb{D}_1) = \int_{\mathbb{D}_1} f(z)\,\overline{g(z)}\,dz.$$

Rmq: En particulier pour $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n : \mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \in L^2_a(\mathbb{D}_1).$$
$$z \longmapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$$

Théorème:

1- $(L^2_a(\mathbb{D}_1), \langle .,. \rangle)$ est un espace de Hilbert.
2- La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2_a(\mathbb{D}_1)$
3- $L^2_a(\mathbb{D}_1)$ admet un noyau reproduisant K (noyau de Bergman) i.e:

$$\forall f \in L^2_a(\mathbb{D}_1), \qquad f = \int_{\mathbb{D}_1} f(w) K(\cdot, w)\, dw$$

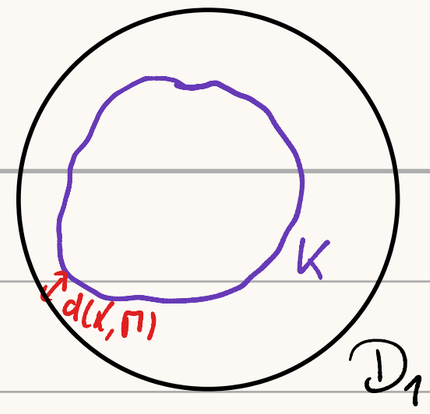
où $K : \mathbb{D}_1^2 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(z, w) \longmapsto \frac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}$$

On commence par montrer le lemme suivant qui nous dit que la topologie liée à la norme $\|\cdot\|_2$ est plus forte sur $L^2_a(\mathbb{D}_1)$ est plus forte que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact induite par $\mathcal{H}(\mathbb{D}_1)$ sur $L^2_a(\mathbb{D}_1)$.

Lemme: Soit $f \in L^2_a(\mathbb{D}_1)$ et K un compact inclus dans $\mathbb{D}_1$, alors:

$$\max_{z\in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K,\Gamma)} \|f\|_2$$



où $d(K,\Gamma)$ désigne la distance de K au cercle unité Γ frontière de D_1.

Preuve: Soient $a \in K$ et un réel r, tels que $0 \leq r < 1 - |a|$, de sorte que $\overline{D(a,r)}$ soit inclus dans D_1.

Or on sait par la formule de Cauchy que:

$$\forall \rho \in [0,r], \quad f(a) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) \rho \, d\theta.$$

$\Rightarrow$ f en a est la valeur moyenne de f sur $\mathcal{C}(a,\rho)$.

On a plus en effet par changement de variable polaire:

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{D(a,r)}} f(z)\, dz = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})\, d\theta \right) \rho \, d\rho$$

$$= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi f(a) \rho \, d\rho$$

$$= f(a)$$

$\Rightarrow$ f en a est la valeur moyenne de f sur $\overline{D(a,r)}$.

On applique donc Cauchy-Schwartz qui donne:

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \left(\int_{\overline{D(a,r)}} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\overline{D(a,r)}} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r} \|f\|_2$$

Or r est un élément quelconque de $[0, 1-|a|[$ donc par passage à la limite:

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-|a|)} \|f\|_2$$

Mais $a \in K$ donc $d(K,\Gamma) \leq d(a,\Gamma) = 1 - |a|$, d'où:

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K,\Gamma)} \|f\|_2.$$

Et a étant quelconque dans K et la majoration étant uniforme on a: $\max_{z\in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\, d(K,\Gamma)} \|f\|_2$. □

Preuve :

1) On a $(L^2_a(D_1), \langle .,. \rangle) \subseteq (L^2(D_1), \langle .,. \rangle)$ qui est un Hilbert.

Ainsi $\langle .,. \rangle$ est bien un produit scalaire sur $L^2_a(D_1)$ et donc il suffit de montrer que $L^2_a(D_1)$ est fermée dans $L^2(D_1)$ pour $\|.\|_2$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2_a(D_1)$ tel que $f_n \xrightarrow{\|.\|_2} f$ alors $f \in L^2(D_1)$ il suffit de montrer que $f \in \mathcal{H}(D_1)$.

Or pour tout compact K de D_1, on a :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \max_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K,\Gamma)} \|f_n - f_m\|_2 .$$

Or $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(D_1)$ donc est une suite de Cauchy.

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}(D_1)$ donc d'après le théorème de Weierstrass, il existe $g \in \mathcal{H}(D_1)$ tel que $f_n \xrightarrow{\mathcal{H}(D_1)} g$.

Or $f_n \xrightarrow{L^2} f$ donc il existe une extractrice ψ telque :

$$f_{\psi(n)} \xrightarrow{CVS} f$$

Or par unicité de la convergence simple sur D_1 on a : $g = f$ presque partout

donc $g = f$ dans L^2.

Ainsi $f \in \mathcal{H}(D_1) \cap L^2(D_1)$ d'où $f \in L^2_a(D_1)$.

Donc $(L^2_a(D_1), \langle .,. \rangle)$ est un Hilbert.

2) Montrons que la famille est orthonormée.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_{D_1} z^p \bar{z}^q dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r e^{ip\theta} r^q e^{-iq\theta} d\theta \right) r\, dr$$

$$= 2\pi \delta_{p,q} \int_0^1 r^{p+q+1} dr$$

$$= \frac{2\pi}{p+q+2} \delta_{p,q}.$$

Donc si $p \neq q$, $\langle e_p, e_q \rangle = 0$ et $\langle e_p, e_p \rangle = \frac{p+1}{\pi} \int_{D_1} z^p \bar{z}^p dz = \frac{p+1}{\pi} \frac{2\pi}{2(p+1)} = 1$.

Montrons que cette famille est totale.

Soit $f \in L^2_a(D_1)$ orthogonal à $\mathrm{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

On sait que f est holomorphe sur D_1 donc développable en série entière ainsi :

$$\forall r\in[0,1[,\ \forall z\in\overline{D(0,r)},\ f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad \text{où } a_k = \frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\,d\theta = \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$$

indépendant de r.

Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$0 = \langle f, e_n\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_{D_1} f(z)\bar{z}^n\,dz$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_0^1 r^n\left(\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\right)r\,dr$$

$$= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\int_0^1 (2\pi r^n a_n)\,r^{n+1}\,dr$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\,a_n.$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}, a_n = 0$ donc $f=0$.

Ainsi $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\perp} = \{0\}$ donc la famille est totale, c'est une base hilbertienne de $L^2_a(D_1)$.

3) Pour tout $z\in D_1$, la forme linéaire :

$$\ell_z : L^2_a(D_1) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longmapsto f(z).$$

est continue d'après le Lemme

Par le théorème de Riesz, il existe un et un seul $h_z\in L^2_a(D_1)$ tel que :

$$\ell_z = \langle \cdot, h_z\rangle.$$

On pose $K : D_1^2 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(z,w) \longmapsto \overline{h_z(w)}$$

Alors on a bien :

$$\forall z\in D_1,\quad f(z) = \int_{D_1} f(w)\,\overline{K(z,w)}\,dw.$$

De plus pour $z\in D_1$, $K(z,\cdot) = \overline{h_z} \in L^2_a(D_1)$ donc par le point 2) on a :

$$K(z,\cdot) = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle h_z, e_n \rangle e_n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, h_z \rangle \overline{e_n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z)\overline{e_n} \quad \text{dans } (L^2_a(D_1), \|.\|_2).$$

D'après le lemme ces séries convergent aussi uniformément sur tout compact de D_1, en particulier :

$$\forall (z,w) \in D_1^2, K(z,w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi} (z\bar{w})^n = \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}$$

Car la série, $\sum_{n\geq 0} (n+1)z^n$ est la série dérivée de $\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Enfin, topologie sur $\mathcal{H}(\Omega)$ où Ω est un ouvert.

Théorème de Weierstrass :

Soit (f_n) une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers f ($f_n \xrightarrow{uc} f$)
Alors :

1) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ 2) $f_n' \xrightarrow{uc} f'$

Preuve :

Comme on a convergence uniforme sur tout compact, f est continue sur Ω.
Soit K un compact de Ω et Γ un cycle dans Ω qui entoure K. On a alors :

$$\forall z \in K, \quad f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f_n(w)}{w-z} dw.$$

Or on a, $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ et $f_n(w) \xrightarrow{\text{unif sur } \Gamma} f(w)$ donc par passage à la limite :

$$\forall z \in K, \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Alors on sait que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Enfin on a aussi, pour $z \in K$:

$$\forall z \in K,\ f_n'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

et $\forall z \in K,\ f'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$

Ce qui donne,

$$|f_n'(z) - f'(z)| = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

Donc en notant $\varepsilon_n = \sup_{w\in\Gamma} |f_n(w) - f(w)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\delta = d(K,\Gamma) > 0$ alors

$$\sup_{z\in K} |f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\,\varepsilon_n\,\frac{\ell(\Gamma)}{\delta^2}.$$

Donc $f_n' \xrightarrow{CC} f'$ d'où par récurrence $f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)}$. ∎

On veut mettre une métrique pour cette topologie.

Définition : Une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts de Ω est dite exhaustive (pour Ω) si :

- $\forall n \geq 1,\ K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.
- $\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n = \Omega$.

Exemple : La suite :

$$K_n = \left\{ z\in\Omega,\ d(z,\Omega^c) \geq \frac{1}{n} \text{ et } |z| \leq n \right\}.$$

Proposition : Soit $(K_m)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω. Pour tout compact K de Ω il existe un entier m tel que : $K \subset K_m$.

Preuve :

Soit K un compact de Ω, comme $\bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n = \Omega$, K est recouvert par les K_n, donc par les ouverts $\overset{\circ}{K}_{n+1}$. Donc on a un recouvrement fini de K :

$$K \subset \overset{\circ}{K}_{n_1} \cup \overset{\circ}{K}_{n_2} \cup \dots \cup \overset{\circ}{K}_{n_q}$$

Ainsi $K \subset K_{\sup n_q + 1}$ d'où le résultat. ∎

Topologie sur $\mathcal{H}(\Omega)$:

Soit $(K_m)_{m\geq 1}$ une suite exhaustive de compacts de Ω. On pose pour $f\in\mathcal{H}(\Omega)$:

$$p_m(f)=\sup_{z\in K_m}|f(z)| \quad \text{et} \quad d(f,g)=\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\,\frac{p_m(f-g)}{1+p_m(f-g)}$$

Théorème :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, alors d est une métrique sur $\mathcal{H}(\Omega)$, invariante par translation au sens où $d(f,g)=d(f-g,0)$.

De plus si (f_j) est une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ et $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, on a équivalence entre les deux conditions suivantes :

1) $f_j \xrightarrow{uc} f$
2) $d(f_j,f)\longrightarrow 0$.

En conséquence $(\mathcal{H}(\Omega),d)$ est un espace métrique complet.

Preuve :

Il est clair que d soit une distance invariante par translation de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Soit N un entier et $f,g\in\mathcal{H}(\Omega)$ on a :

$$2^{-N}\,\frac{p_N(f,g)}{1+p_N(f,g)}\leq d(f,g)=\sum_{n=1}^{+\infty}2^{-n}\,\frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$$

De plus les p_N sont croissants et $\frac{p_n}{1+p_n}\leq 1$ donc :

$$d(f,g)\leq p_N(f-g)\sum_{n=1}^{N}2^{-n}+\sum_{n>N}2^{-n}\leq p_N(f-g)+2^{-N}$$

Ainsi on a : $\quad 2^{-N}\,\dfrac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)}\leq d(f,g)\leq p_N(f-g)+2^{-N}$.

Si maintenant $f_j\xrightarrow{u.c} f$, alors

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad \lim_{j\to+\infty}\sup\, d(f_j,f)\leq 2^{-N}$$

donc $d(f_j,f)\longrightarrow 0$.

Et par l'inégalité de gauche si $d(f_j,f)\longrightarrow 0$ alors $p_N(f_j-f)\longrightarrow 0$.

Par la proposition, $f_j\xrightarrow{uc} f$.

Montrons que $(\mathcal{H}(\Omega),d)$ est complet.

Soit (f_j) une suite de Cauchy de $\mathcal{H}(\Omega)$ pour d.
Alors (f_j) satisfait le critère de Cauchy pour chaque semi-norme donc CVU sur tout compact vers f.

Par le théorème de Weierstrass $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\forall n$, $p_n(f_j - f) \to 0$
Donc $d(f_j, f) \to 0$.
On obtient le résultat. ☑