Equation de la chaleur

réf: Chevaux X-ENS, Analyse 4 p.49
Harvey Dean, Henry McKean, Séries et intégrales de Fourier p.67.

On veut résoudre pour u_0 donné 2π-périodique l'équation de la chaleur:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = f(x) \\ u(t,.)\ 2\pi\text{-périodique} \end{cases}$$

Théorème: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, continue, 2π-périodique. Alors il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique par rapport à x, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}. \\ u(0,x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De plus u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Preuve: Etape 1: Unicité.
Etape 2: Existence sans la continuité en 0.
Etape 3: Continuité en 0 pour $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.
Etape 4: Principe du max.
Etape 5: Etude du noyau de la chaleur.
Etape 6: Continuité en 0 pour $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Etape 1: Soit u une telle solution.
Pour $t > 0$, $u(t,.)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique, elle est donc somme de sa série de Fourier, ainsi on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx} \quad \text{avec} \quad c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t,x) e^{-inx} \, dx.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$, étudions $c_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$. On a par le théorème de dérivation sous l'intégrale c_n est de

classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet soit $0<a<b$, on a :

1) $\forall x \in [0,2\pi]$, $t \longmapsto u(t,x)e^{-inx}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2) $\forall t \in [a,b]$, $\forall x \in [0,2\pi]$,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-inx}\right| = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right| \qquad u \text{ solution}$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right| \quad \in L^1(0,2\pi)$$

$x \in \mathbb{R}$

qui est finie car u de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π-périodique en x.

Ainsi on a bien que c_n est de classe $\mathcal{C}^1$ d'où :

$$c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)e^{-inx}\,dx$$

$$= -n^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\,dx$$

$$= -n^2 c_n(t).$$

Ainsi on a, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $c_n(t) = c_n(0)e^{-n^2t} = c_n(f)e^{-n^2t}$ car c_n continue sur $\mathbb{R}_+$.

On a donc :

$$u(t,x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t = 0 \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{-n^2t}e^{inx} & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où l'unicité.

Étape 2 : Existence de la solution sans la continuité en 0.

Être rapide sur la dérivabilité/continuité sous le signe somme

On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\quad u(t,x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t \neq 0 \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{-n^2t}e^{inx} & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ étant bornée, la série de fonctions de termes générale :

$$(x,t) \longmapsto c_n(f)e^{-n^2t}e^{inx}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
De même pour toutes ses dérivées partielles donc u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et par dérivation sous la série somme on a:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)(-n^2)e^{-n^2t}e^{inx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x).$$

d'où le résultat.

Étape 3: Continuité en $t=0$, pour $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.
Supposons $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$ montrons que u est continue en 0.
f étant $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ elle est somme de sa série de Fourier donc on a pour $x \in \mathbb{R}$ et $t>0$:

Simplement dire que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$
Donc la série converge normalement sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ donc est continue en 0.

$$|u(t,x) - f(x)| = \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}e^{-n^2t} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} \right|$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |1 - e^{-n^2t}||c_n(f)|$$

Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(1-e^{-n^2t})|c_n(f)| \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

$\forall |1-e^{-n^2t}||c_n(f)| \leq |c_n(f)|$ or $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ car $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.

Donc u est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et même $\lim_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - f(x)| = 0$.

Étape 4: Principe du maximum.
Mq si $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$ tq $f \geq 0$ alors $u \geq 0$.

À admettre en dvpt

On a déjà,

$$\overline{u(t,x)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}e^{-inx}e^{-n^2t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}(f)e^{-inx}e^{-n^2t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}e^{-n^2t} = u(t,x).$$

Par l'absurde supposons qu'il existe $t_0, x_0 \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tq:

$$u(t_0,x_0) < 0$$

Soit $\beta < 0$ alors si on pose $v : [0,t_0] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, v admet un minimum globale
$(t,x) \longmapsto u(t,x)e^{\beta t}$

On $(t_1, x_1) \in]0, t_0] \times \mathbb{R}$. Or a donc $(v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}))$:

$$0 \geq \frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) = \beta v(t_1, x_1) + \frac{\partial u}{\partial t}(t_1, x_1) e^{\beta t_1} = \beta v(t_1, x_1) + e^{\beta t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_1, x_1).$$

$$= \beta v(t_1, x_1) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1)$$

$$\geq \beta v(t_1, x_1) > 0.$$

En effet $\begin{cases} v(t_1, x_1) \leq e^{\beta t_0} u(t_0, x_0) < 0 \\ \beta < 0 \end{cases}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1) \geq 0$ car minimum.

Ce qui est Absurde.

Ainsi $u \geq 0$.

Etape 5 : Etude du noyau de la chaleur.

On définit la solution fondamentale ou fonction de Green :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad p(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(-n^2 t) e^{inx}.$$

Par convergence normale sur tout compact on a $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ et pour $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on a :

$$\forall t, x \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad u(t, x) = p_t * f$$

↳ convolution en espace.

Notons $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le noyau de Fejer qui est positif de classe $\mathcal{C}^1$

Donc $p_t * K_n$ est la solution de l'équation de la chaleur avec en donnée initiale, $K_n \geq 0$ donc par le principe du maximum, $p_t * K_n \geq 0$ $(\forall t, x \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$.

De plus p_t étant continue on a par le théorème de Fejer que :

$$\| p_t * K_n - p_t \|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On en déduit donc que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $p_t \geq 0$.

De plus par convergence normale on obtient :

$$\| p_t \|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_t(x)\, dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx}\, dx}_{= 1 \text{ si } n = 0} = 1.$$

Ainsi on obtient la majoration suivante pour $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \|u(t,.)\|_\infty = \|\rho_t * f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|\rho_t\|_1 = \|f\|_\infty.$$

Qui est aussi vraie en $t=0$.

Etape 6: Continuité en $t=0$ pour $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$.

Grâce à l'inégalité on remarque que l'opérateur solution:

$$S : \mathcal{C}^0_{2\pi} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$$
$$f \longmapsto u$$

est une application linéaire, injective, continue de norme ≤ 1.

Or on a déjà montré que:

$$S(\mathcal{C}^1_{2\pi}) \subset \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}).$$

$\hookrightarrow$ sev formé de $\mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.

Puisque $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ est dense dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ pour $\|.\|_\infty$ et que S et continue on obtient:

$$S(\mathcal{C}^0_{2\pi}) = S(\overline{\mathcal{C}^1_{2\pi}}) \subset \overline{S(\mathcal{C}^1_{2\pi})} \subset \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$$

Ce qui achève la preuve. ☒

Lemme: Densité de $\mathcal{C}^\infty_{2\pi}$ dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ pour $\|.\|_\infty$ (même des polynômes trigo).

Preuve: Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, $\rightarrow$ polynômes trigo.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le noyau de Fejer alors $K_n * f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$ et $K_n * f \xrightarrow{\|.\|_\infty} f$. ☒

Lemme: Soit $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ continue.

Soit $F \subset \mathbb{R}$ alors $\Delta(\bar{F}) \subseteq \overline{\Delta(F)}$.

Preuve:

Soit $f \in \bar{F}$ et $f_n \to f$ alors $\Delta(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Delta(f)$ par continuité de Δ.

$f_n \in F$ donc $\Delta(f_n) \in \overline{\Delta(F)}$

Ainsi $\Delta(\bar{F}) \subseteq \overline{\Delta(F)}$. ☒