Equation de Schrodinger

réf: Jeffrey Rauch, Partial differential equation.

On veut résoudre l'équation de Schrodinger avec une donnée $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ i.e trouver $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tq:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = i \Delta u \quad , \forall t, x \in \mathbb{R}^2. \\ u(x,0) = f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Théorème:

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ tel que:

1) $\forall x, t \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = i \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$.

2) $u(x,0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $t \longmapsto u(.,t)$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ainsi pour tout $T > 0$,

$$\forall k, l \geq 0, \quad M_{k,l}^T := \sup_{|t| < T} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t) \right| < +\infty.$$

De plus la solution est donnée par:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} \, d\xi.$$

et $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Preuve: On raisonne par analyse synthèse.

Analyse:

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ une telle solution, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(.,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on peut donc considérer sa transformée de Fourier partielle en x:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-ix\xi} \, dx$$

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale à $\hat{u}(.,\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé.

On fixe $T>0$, et on raisonne sur $]-T,T[$, on a :

1) $\forall x\in\mathbb{R}$, $t\longmapsto u(x,t)e^{-ix\xi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-T,T[$.

2) $\forall t\in]-T,T[$, $x\longmapsto u(x,t)e^{-ix\xi}\in L^1(\mathbb{R})$ car $u(.,t)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall t\in]-T,T[$,

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-ix\xi}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x^2}(x,t)\right| \quad (u \text{ solution}).$$

$$= \frac{1}{1+|x|^2}\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| + \left|x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right|\right)$$

$$\leq \frac{M^T_{0,2}+M^T_{2,2}}{1+|x|^2} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ indépendant de } t.$$

On obtient que $\hat{u}(.,\xi)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et on a :

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-ix\xi}\,dx = i\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-ix\xi}\,dx$$

$$= i\left(\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\right)(\xi,t).$$

$$= -i\xi^2\hat{u}(\xi,t) \qquad \text{car } u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Ainsi à $\xi\in\mathbb{R}$ fixé, $\hat{u}(\xi,.)$ vérifie l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \partial_t\hat{u}(\xi,t) = -i\xi^2\hat{u}(\xi,t) \\ \hat{u}(\xi,0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \hat{f}(\xi). \end{cases}$$

On a donc

$$\forall(\xi,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-it\xi^2}$$

Or $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc $\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ainsi pour t fixé on a :

$$\xi\longmapsto\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-it\xi^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Donc par inversion de Fourier on a:

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2,\ u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{-it\xi^2}e^{ix\xi}\,d\xi$$

Synthèse:

On pose:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{-it\xi^2}e^{ix\xi}\,d\xi$$

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale, on montre que $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, et que u vérifie $\partial_t u=i\Delta u$. Pour cela il suffit de dominer sur $]-T,T[\times\mathbb{R}$, pour tout polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$ et $\ell\in\mathbb{N}$:

$$\left|P(\xi)\frac{\partial^\ell \hat{f}}{\partial\xi^\ell}(\xi)e^{-it\xi^2}e^{ix\xi}\right|\leq C_{\ell,\deg(P)}\frac{1}{1+|\xi|^2}\in L^1(\mathbb{R})$$

↳ car $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Et on a:

$$\partial_t u(x,t)=-\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^2\hat{f}(\xi)e^{-it\xi^2}e^{ix\xi}\,d\xi$$

$$\Delta u(x,t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^2\hat{f}(\xi)e^{-it\xi^2}e^{ix\xi}\,d\xi$$

d'où:

$$\partial_t u=i\Delta u.$$

De plus on a:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ u(x,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,dx=f(x)$$ par inversion de Fourier car $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Pour $t\in\mathbb{R}$, il est clair que $\xi\longmapsto\hat{f}(\xi)e^{-it\xi^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ainsi on a:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}&\longrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R})\\ t&\longmapsto u(\cdot,t)\end{aligned}$$ qui est bien définie.

Montrons que cette application est continue.

Il suffit de montrer que

$$u(.,t+h) \xrightarrow[h\to 0]{} u(.,t) \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Ce qui est équivalent à montrer que: $\hat{u}(.,t+h) \xrightarrow[h\to 0]{} \hat{u}(.,t)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{F}: u \longmapsto \hat{u}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

C'est à dire si on note $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\xi, t \longmapsto \hat{f}(\xi) e^{-it\xi^2}$$

Il suffit de montrer que:

$$g(.,t+h) \xrightarrow[h\to 0]{} g(.,t) \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Donc pour $k, l \geq 0$, il nous faut montrer que:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \xi^k \frac{\partial^l g}{\partial \xi^l}(\xi, t+h) - \xi^k \frac{\partial^l g}{\partial \xi^l}(\xi, t) \right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Or pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a:

$$\left| \xi^k \frac{\partial^l g}{\partial \xi^l}(\xi, t+h) - \xi^k \frac{\partial^l g}{\partial \xi^l}(\xi, t) \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{l} \left(P_\nu(t+h, \xi) e^{-i(t+h)\xi^2} - P_\nu(t, \xi) e^{-it\xi^2} \right) \frac{\partial^\nu \hat{f}}{\partial \xi^\nu}(\xi) \right|$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{l} \left| \left(P_\nu(t+h, \xi) e^{-i(t+h)\xi^2} - P_\nu(t, \xi) e^{-it\xi^2} \right) \frac{\partial^\nu \hat{f}(\xi)}{\partial \xi^\nu} \right|$$

où P_ν est un polynôme en 2 variable.

Soit $\nu \in [\![0, l]\!]$,

$$\frac{\partial^\nu \hat{f}(\xi)}{\partial \xi^\nu} \left| P_\nu(t+h, \xi) e^{-i(t+h)\xi^2} - P_\nu(t, \xi) e^{-it\xi^2} \right| \leq \frac{\partial^\nu \hat{f}}{\partial \xi^\nu} \left(\left| P_\nu(t+h, \xi) e^{-i(t+h)\xi^2} - P_\nu(t, \xi) e^{-i(t+h)\xi^2} \right| + |P_\nu(t, \xi)| \left| e^{-i(t+h)\xi^2} - e^{-it\xi^2} \right| \right)$$

$$\leq |P_\nu(t+h, \xi) - P_\nu(t, \xi)| \left| \frac{\partial^\nu \hat{f}}{\partial \xi^\nu}(\xi) \right| + \left| e^{-i(t+h)\xi^2} - e^{-it\xi^2} \right| \left| \frac{\partial^\nu \hat{f}}{\partial \xi^\nu}(\xi) P_\nu(t, \xi) \right|$$

Or P_ν est polynomiale en t donc en notant d_ν son degré en t on a:

$$P_\nu(t+h, \xi) - P_\nu(t, \xi) = \sum_{i=1}^{d_\nu} \frac{h^i}{i!} \frac{\partial^i P_\nu}{\partial t^i}(t, \xi).$$

Et par le théorème des accroissement finis on a:

$$\left| e^{-i(t+h)\xi^2} - e^{-it\xi^2} \right| \leq h \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| -i\xi^2 e^{-it\xi^2} \right| = h\xi^2.$$

Ainsi on a :

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left(\frac{\partial^\nu \hat{f}(\xi)}{\partial \xi^\nu}\left| P_\nu(t+h,\xi)e^{-i(t+h)\xi^2} - P_\nu(t,\xi)e^{-it\xi^2}\right|\right) \leq \sum_{i=1}^{d_\nu} \frac{1}{i!} h^i \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^i P_\nu}{\partial t^i}(t,\xi)\frac{\partial^\nu \hat{f}(\xi)}{\partial \xi^\nu}\right| < +\infty$$

$$+ h \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\xi^2 P_\nu(t,\xi)\frac{\partial^\nu \hat{f}}{\partial \xi^\nu}(\xi)\right| < +\infty$$

$\longrightarrow 0$ quand $h\to 0$

car P_ν polynomiale et $\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Ainsi $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| \xi^k \frac{\partial^l \hat{a}}{\partial \xi^l}(\xi,t+h) - \xi^k \frac{\partial^l \hat{a}}{\partial \xi^l}(\xi,t)\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

D'où le résultat. ∎

Remarque :

- Conservation de la norme L^2
- On a que $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est $\mathcal{C}^\infty$. $t \longmapsto u(\cdot,t)$
- Calcul explicite pour une gaussienne.