Banach-Alaoglu + Applications

Réf : - Cours de Karine Beauchard + site de Hugo Eurly + site de Laurent Monteiguet.
- Hirsch-Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle

Théorème : (Banach Alaoglu)

Soit H un Hilbert et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée alors il existe une sous-suite $(f_{\psi(n)})_{n\geq 0}$ qui converge faiblement i.e il existe $f \in H$ tel que :

$$\forall g \in H, \quad \langle f_{\psi(n)}, g \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle f, g \rangle$$

Proposition : Soit $J : H \to \mathbb{R}$ continue, convexe et coercive i.e :

$$J(h) \xrightarrow[\|h\|\to+\infty]{} +\infty \quad (\forall A>0, \exists R>0, \forall h\in H, \|h\|>R, J(h)\geq A).$$

Alors $\exists x_* \in H$ tq $J(x_*) = \inf_{x\in H} J(x)$

Théorème : Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p \geq 1$.

* Il existe une unique fonction $u \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$ telle que : $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$
* Si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et est une sol classique i.e :

$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(x) + |u|^{p-1}(x)u(x) = f(x)$$

Banach-Alaoglu

Preuve : On note $M>0$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|\leq M$.

Rq: $\exists\,\psi$ une extractrice, $f\in H$ tel que $\langle f_{\psi(n)}, g\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle$ $(\forall g\in H)$.

Cas 1: H séparable

Soit $D=\{h_k, k\in\mathbb{N}\}$ une partie dense et dénombrable de $(H,\|.\|)$. On note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tel que H est un $\mathbb{K}$-hilbert

Etape 1: Extraction diagonale sur D.

Par Cauchy-Schwartz, $(\langle f_n, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$ donc il existe une extractrice φ_0 tel que $(\langle f_{\varphi_0(n)}, h_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.

« De même $(\langle f_n, h_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{K}$ donc il existe une extractrice φ_1 tel que $(\langle f_{\varphi_1(n)}, h_1\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$

Par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$, pour tout $k\in\mathbb{N}$ il existe une extractrice φ_k tel que.

$$(\langle f_{\varphi_k(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{K}.$$

En prenant, l'extractrice $\psi(n)=\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_n(n)$ on a pour tout $k\in\mathbb{N}$ que:

$$(\langle f_{\psi(n)}, h_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{K}.$$

Etape 2: Montrons que pour tout $g\in H$, $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.

Soit $g\in H$, montrons que $(\langle f_{\psi(n)}, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ ce qui nous donnera ce qu'on veut.

Soit $\varepsilon>0$, par densité de D, il existe $h_{k_0}\in\mathbb{N}$ tq $\|g-h_{k_0}\|\leq\frac{\varepsilon}{2M}$

$(\langle f_{\psi(n)}, h_{k_0}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ ainsi soit $n_0\in\mathbb{N}$ tq:

$$\forall p>q\geq n_0,\ |\langle f_{\varphi(p)}-f_{\psi(q)}, h_{k_0}\rangle|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi pour $p\geq q\geq n_0$,

$$|\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, g\rangle|\leq|\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, h_{k_0}\rangle|+|\langle f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}, h_{k_0}-g\rangle|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\|f_{\psi(p)}-f_{\psi(q)}\|\,\|h_{k_0}-g\|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

d'où le résultat.

On note donc $L: H\longrightarrow\mathbb{K}$, $g\longmapsto\lim_{n\to+\infty}\langle f_{\psi(n)}, g\rangle$ qui est linéaire.

Etape 3: Montrons que L est continue et utilisons le théorème de Riesz.

On a pour $g \in V$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\langle f_{\psi(n)}, g\rangle| \leq \|f_{\psi(n)}\| \|g\| \leq M\|g\|.$$

Ainsi $|L(g)| \leq M\|g\|$.

Par le théorème de Riesz, il existe $f \in H$ telle que:

$$\forall g \in H, \quad \langle f, g\rangle = L(g) = \lim_{n \to +\infty} \langle f_{\psi(n)}, g\rangle.$$

d'où le résultat.

Cas 2: H non séparable.

On se place dans $F = \overline{\text{Vect}\{f_n ; n \in \mathbb{N}\}}$ qui est un sev fermé de H donc F est un Hilbert séparable.

De plus on a: $H = F \oplus F^\perp$.

Par le cas précédent $\exists \psi$ extractrice et $f \in F$ telle que pour tout $g \in F$:

$$\langle f_{\psi(n)}, g\rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle f, g\rangle$$

Soit $g \in H$ alors $g = \underbrace{g_F}_{\in F} + \underbrace{g_{F^\perp}}_{\in F^\perp}$ et on a:

$$\langle f_{\psi(n)}, g\rangle = \langle f_{\psi(n)}, g_F\rangle + \underbrace{\langle f_{\psi(n)}, g_{F^\perp}\rangle}_{=0} \longrightarrow \langle f, g_F\rangle = \langle f, g\rangle \quad \text{car } f \in F.$$

d'où le résultat

On va donc pouvoir démontrer la proposition qui nous sera utile.

Proposition: Soit $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, convexe et coercive i.e:

$$J(h) \xrightarrow[\|h\| \to +\infty]{} +\infty \quad (\forall A > 0, \exists R > 0, \forall h \in H, \|h\| > R, J(h) \geq A).$$

Alors $\exists x_* \in H$ tq $J(x_*) = \inf_{x \in H} J(x)$

Rmq: Cette proposition est l'équivalent dans le cas non linéaire du théorème de Lax-Milgram dans le cas linéaire. En effet dans le cas l'objectif est de minimiser une fonctionnelle sur H, ici et $x \longmapsto \frac{1}{2} a(x,x) - \varphi(x)$ pour Lax-Milgram. Pour plus de détail dans le Brézis on montre que

Lax-Milgram est un corollaire du théorème de Stampacchia qui est un théorème de minimisation sur un Hilbert.

Preuve: On considère une suite minimisante $(x_n)_{n\geq 1}$ tq

$$J(x_n) \longrightarrow \inf_{x\in H} J(x).$$

Montrons que cette suite est bornée.

Supposons l'inverse alors il existe ψ tel que, $\|x_{\psi(n)}\| \longrightarrow +\infty$ donc

$$J(x_{\psi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad J \text{ coercive.}$$

Ainsi $\inf_{x\in H} J(x) = +\infty$, Absurde

Ainsi d'après Banach Alaoglu, il existe une extractrice ψ tel que:

$$x_{\psi(n)} \longrightarrow x^* \in H.$$

Montrons que $J(x^*) = \inf_{x\in H} J(x)$:

On fixe $\alpha > \inf_{x\in H} J(x)$ et on pose:

$$C_\alpha = J^{-1}(]-\infty, \alpha])$$

C_α est non vide par choix de α et fermé car J continue. De plus par convexité de J, C_α est convexe, en effet:

$$\forall x, y \in C_\alpha, t\in[0,1], \quad J(x+t(x-y)) \leq tJ(x) + (1-t)J(y) \leq \alpha$$

Or à partir d'un certain rang N, $\forall n \geq N$, $x_{\psi(n)} \in C_\alpha$, montrons que $x^* \in C_\alpha$.

(i.e que C_α est faiblement séquentiellement fermé)

On note Π_α la projection sur C_α (bien def car C_α est fermé convexe non vide). D'après les propriétés des angles obtus, on a:

$$\forall n \geq N, \quad \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), x_{\psi(n)} - \Pi_\alpha(x^*)\rangle \leq 0$$

$$\forall n \geq N, \quad \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), x_{\psi(n)}\rangle - \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), \Pi_\alpha(x^*)\rangle \leq 0$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), x^*\rangle - \langle x^* - \Pi_\alpha(x^*), \Pi_\alpha(x^*)\rangle \leq 0$$

donc $\|x^* - \Pi_\alpha(x^*)\|^2 \leq 0$

Ainsi $x^* = \Pi_\alpha(x^*)$ donc $x^* \in C_\alpha$ ainsi pour tout $\alpha > \inf_{x\in H} J(x)$

$$\alpha \geq J(x^*) \geq \inf_{x\in H} J(x)$$

Ainsi on a $x^\alpha \in H$ tel que : $J(x^\alpha) = \inf_{x \in H} J(x)$.

Rmq : * Pour J la continuité intervient seulement pour montrer que $J^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est fermé fortement. Ainsi on peut appauvrir l'hypothèse sur J et ainsi supposer J seulement semi-continue inférieurement

i.e : $\forall a \in \mathbb{R}$, $J^{-1}(]a, +\infty[)$ est un ouvert (fort)

$\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$, $J^{-1}(]-\infty, a])$ est un fermé (fort)

(Je pense même que faiblement semi-continue inférieurement).

* On considère C_α un convexe fermé car on a un résultat général :

Soit C un convexe non vide d'un Hilbert alors C est fermé fortement (pour $\|.\|_H$) ssi il est fermé faiblement.

Ceci donne que C_α est fermé faiblement donc $x^\alpha \in C_\alpha$ $(\forall \alpha)$.

* Si J est supposé différentiable alors pour montrer que :

$$J(x^\alpha) = \inf_{x \in H} J(x).$$

On peut utiliser que :

$$J(x_{\psi(n)}) \geq J(x_\alpha) + \langle \nabla J(x^\alpha), x_{\psi(n)} - x_\alpha \rangle \quad \text{(J convexe + diff)}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_{x \in H} J(x) \geq J(x^\alpha).$$

Résolution d'une edp elliptique non linéaire

On considère le problème non linéaire suivant ($p \geq 1$) :

$$\begin{cases} -u'' + |u|^{p-1}u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Théorème : Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p \geq 1$.

* Il existe une unique fonction $u \in H^2 \cap H_0^1(0,1)$ telle que : $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$
* Si $f \in C^0([0,1])$ alors $u \in C^2([0,1])$ et est une sol classique i.e :

$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(x) + |u|^{p-1}(x)u(x) = f(x)$$

Preuve : On s'intéresse au problème faible, càd montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tq :

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \int_0^1 u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Etape 1 : Existence et unicité de $u \in H_0^1(0,1)$

On définit la fonctionnelle, $J : H_0^1(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$v \longmapsto \int_0^1 \left(\frac{1}{2}|v'(x)|^2 + \frac{|v(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)v(x) \right) dx.$$

1) J est bien définie et continue :

Soit $v \in H_0^1(0,1)$ alors $v, v' \in L^2(0,1)$ et $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$ donc :

- $\frac{1}{2}\int_0^1 |v'(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2}^2 < +\infty$
- $\frac{1}{p+1}\int_0^1 |v|^{p+1} \leq \frac{\|v\|_\infty^p}{p+1}\|v\|_{L^2} < +\infty$
- $\int_0^1 |f(x)v(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} < +\infty$

J est bien définie.

Montrons que J est continue, pour ce qu'on a montré :

$$|J(u-v)| \leq \frac{1}{2}\|u'-v'\|_{L^2} + \frac{1}{p+1}\|u-v\|_\infty^p \|u-v\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\|u-v\|_{L^2}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \|f\|_{L^2}\right)\|u-v\|_{H^1} + \frac{1}{p+1}\|u-v\|_{H^1}^{p+1}$$

Ainsi J est continue.

2) Montrons que J est strictement convexe.

Soit $\lambda \in]0,1[$ et $u, v \in H_0^1(0,1)$ alors :

$$J(\lambda u + (1-\lambda)v) = \int_0^1 \frac{1}{2}|\lambda u'(x) + (1-\lambda)v'(x)|^2 + \frac{|\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)|^{p+1}}{p+1} - \lambda f(x)u(x) - (1-\lambda)f(x)v(x)\,dx$$

Strict convexité de $|.|^2$ ($\forall k \geqslant 1$) :

$$< \int_0^1 \frac{\lambda}{2}|u'(x)|^2 + (1-\lambda)|v'(x)|^2 + \lambda\frac{|u(x)|^{p+1}}{p+1} + (1-\lambda)\frac{|v(x)|^{p+1}}{p+1} - \lambda f(x)u(x) + (1-\lambda)f(x)v(x)\,dx$$

$$< \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v).$$

3) Montrons que J est différentiable

J est introduite de manière à ce que u soit faible $\Leftrightarrow dJ(u) = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(0,1),\ dJ(u)v = 0$

Ainsi on veut montrer que pour $u \in H^1_0(0,1)$:

$$dJ(u) = L(u) : H^1_0(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$v \longmapsto \int_0^1 u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)v(x)\,dx$$

ainsi $L(u)$ est bien définie, continue car :

$$\forall v \in H^1_0(0,1),\ |L(u)v| \leq (\|u'\|_{L^2} + \|u\|_\infty^{p-1}\|u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2})\|u\|_{H^1}$$

On veut montrer que :

$$|J(u+v) - J(u) - L(u)v| = o(\|v\|_{H^1})$$

Or pour $u, v \in H^1_0(0,1)$:

$$J(u+v) = \int_0^1 \frac{|u'+v'|^2}{2} + \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - f(x)u(x) - f(x)v(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{|u'|^2}{2} + \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - fu + \frac{|v'|^2}{2} + u'v' + |u|^{p-1}uv - fv + \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv\,dx$$

$$= J(u) + L(u)v + \underbrace{\frac{1}{2}\|v'\|_{L^2}^2}_{o(\|v\|_{H^1})} + \int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv\,dx$$

Ainsi il nous suffit de montrer : $\int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv\,dx = o(\|v\|_{H^1})$

On fixe $u, v \in B$ et on pose $\varphi : t \in [0,1] \longmapsto \frac{|u+tv|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - t|u|^{p-1}uv$ qui est continue.

Nous on veut controller :

$$|\varphi(1)| = |\varphi(1) - \varphi(0)|.$$

On a tout d'abord, soit $t \in [0,1]$ telle que $u + tv \neq 0$ alors

$$\frac{d}{dt}([u+tv]^{p+1})(t) = (p+1)v|u+tv|^p \operatorname{sgn}(u+tv)$$

où sgn est la fonction signe, avec $\operatorname{sign}(0) = 0$. Ainsi ϕ dérivable presque partout et pour $t \in [0,1]$ tel que $u + tv \neq 0$:

$$\phi'(t) = v|u+tv|^p \operatorname{sgn}(u+tv) - |u|^{p-1}uv.$$

Ainsi par le théorème des accroissement finie alors :

$$|\phi(1)| \leq \sup_{t \leq 1} \left\{ |v| \,\middle|\, |u+tv|^p \operatorname{sgn}(u+tv) - |u|^{p-1}u \right\}$$

Ce qui donne :

$$\int \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv \Big| \leq |v| \sup_{|t|\leq|v|} \left\{ \Big| |u+t|^p \operatorname{sgn}(u+t) - |u|^{p-1}u \Big| \right\}$$

Ainsi pour $u, v \in H_0^1(0,1)$:

$$\left| \int_0^1 \frac{|u+v|^{p+1}}{p+1} - \frac{|u|^{p+1}}{p+1} - |u|^{p-1}uv \, dx \right| \leq \int_0^1 |v| \sup_{|t|\leq\|v\|_\infty} \left\{ \Big| |u+t|^p \operatorname{sgn}(u+t) - |u|^{p-1}u \Big| \right\} dx$$

CVS

$$\leq \|v\|_{H^1} \left(\int_0^1 \sup_{|t|\leq\|v\|_\infty} \left\{ \Big| |u+t|^p \operatorname{sgn}(u+t) - |u|^{p-1}u \Big| \right\}^2 dx \right)^{1/2} =: \phi(u,v)$$

Il nous reste à montrer que $\phi(u,v) \xrightarrow[\|v\|_{H^1}\to 0]{} 0$. Rmq : $|u|^{p-1}u = \operatorname{sgn}(u)|u|^p$

Pour cela on va utiliser le théorème de convergence dominée. Tout d'abord $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$ donc si on fixe $x \in [0,1]$, on a :

$$\gamma(t) := \operatorname{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p - \operatorname{sgn}(u(x))|u(x)|^p$$

Si $u(x) = 0$ alors

$$|\gamma(t)| = |\operatorname{sgn}(t)\,|t|^p| \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \underline{\text{uniformément}} \text{ en } t$$

Si $u(x) \neq 0$ alors pour t assez petit, $\operatorname{sgn}(u(x)+t) = \operatorname{sgn}(u(x))$ donc

$$|\gamma(t)| = |u(x)+t|^p - |u(x)|^p \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \underline{\text{uniformément}} \text{ en } t$$

Ainsi $\gamma(t)$ converge uniformément vers 0 quand $t \to 0$ et $\|v\|_\infty \leq \|v\|_{H^1}$, donc

$$\forall x \in [0,1], \quad \sup_{t\leq\|v\|_\infty} \left\{ |\operatorname{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p - \operatorname{sgn}(u(x))|u(x)|^p| \right\} \xrightarrow[\|v\|_{H^1}\to 0]{} 0$$

On a donc la convergence simple de l'intégrande.

Pour la domination, ops sans perte de généralité $\|v\|_\infty \leq 1$.

$$\sup_{t\leq\|v\|_\infty} \left\{ |\operatorname{sgn}(u(x)+t)|u(x)+t|^p - \operatorname{sgn}(u(x))|u(x)|^p| \right\} \leq |u(x)+1|^p + |u(x)|^p \in L^1(0,1)$$

car $u \in C([0,1])$.

Ainsi par le TCVD on a le résultat voulu.

4) Montrons que J est coercive.

Soit $u \in H_0^1(0,1)$ on a alors:

$$J(u) = \int_0^1 \frac{|u'(x)|^2}{2} + \frac{|u(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)u(x)\,dx$$

$$-\|u\|_{L^2} \geq -\|u\|_{H^1}$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$$

$$\geq \frac{C}{2}\|v\|_{H^1}^2 - \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} \xrightarrow[\|v\|_{H^1}\to+\infty]{} +\infty.$$

D'où le résultat.

D'après le théorème sur le min de J, il existe $u \in H_0^1(0,1)$ (Hilbert) tel que:

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v)$$

Or J est strictement convexe alors u est unique.

De plus par différentiabilité de J on a:

$$dJ(u) = 0 \iff \forall v \in H_0^1(0,1),\ dJ(u)v = 0$$

$$\iff \int_0^1 u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)v(x)\,dx = 0. \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \quad (1).$$

Etape 1: On montre que $u \in H^2(0,1)$ et $-u'' + |u|^{p-1}u = f$ dans $L^2(0,1)$:

La relation (1) nous donne, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$:

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x) = \int_0^1 \left(|u(x)|^{p-1}u(x) - f(x)\right)\varphi(x)\,dx$$

Et comme $x \mapsto |u(x)|^{p-1}u(x) - f(x) \in L^2(0,1)$, on a que $u' \in H^1(0,1)$ donc $u \in H^2(0,1)$ et que:

$$-u'' + |u|^{p-1}u = f \text{ dans } L^2(0,1).$$

Etape 3: Unicité de u

On considère $\hat{u} \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ telle que $-\hat{u} + |\hat{u}|^{p-1}\hat{u} = f$ dans $L^2(0,1)$.

Soit $v \in H_0^1(0,1)$ montrons que

$$\forall v \in H_0^1(0,1),\ \int_0^1 \hat{u}'v' + |u|^{p-1}\hat{u}v - fv = 0$$

Et l'unicité de l'étape 1 nous donne $\hat{u} = u$.

Soit $v \in H^1_0(0,1)$ alors comme $\hat{u} \in H^1(0,1)$ on a :

$$\int_0^1 -\hat{u}'' v + |\hat{u}|^{p-1}\hat{u} v - f v = 0$$

Or par IPP dans $H^1(0,1)$ (comme $H^1_0(0,1) \subset H^1(0,1)$] :

$$\int_0^1 -\hat{u}'' v = \hat{u}'(1)v(1) - \hat{u}'(0)v(0) + \int_0^1 \hat{u}' v' \quad \text{) Cela revient à faire Robbin.}$$

or $v \in H^1_0(0,1)$ donc $v(1) = v(0)$ d'où $\int_0^1 -u'' v = \int_0^1 \hat{u}' v'$ on a ainsi le résultat.

Étape 4 : Si f est continue alors $x \mapsto |u(x)|^{p-1}u(x) - f$ est continue et donc l'égalité.

$$p \cdot p \; u'' = |u|^{p-1}u - f.$$

devient $\forall x \in C([0,1]) \; u''(x) = |u(x)|^{p-1}u(x) - f(x)$

ainsi $u'' \in C^2$ et on a le résultat voulu.

∎