# Asymptotique nombre de zéros d'une équa diff.

réf: Zuily-Queffelec, Analyse pour l'agreg p 404 ou 411
Poly de Beaubenchon

**Problème:** Soit $q:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ on s'intéresse au solution de:

$$\begin{cases} y''+qy=0 \\ y(a)=y_0 \end{cases}.$$

**Lemme:** Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$, sans zéro commun et soit $w = y_1y_2' - y_2y_1'$ alors si

$$y_1(a)+iy_2(a) = r_0e^{i\theta_0}$$

Alors on peut écrire:

$$y_1(t)+iy_2(t) = re^{i\theta},$$

où $r, \theta \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R})$ et sont données par les formules:

$$r=\sqrt{y_1^2+y_2^2}, \quad \theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}\,dt.$$

Rmq: $w$ est le wronskien mixte.

**Preuve:**

Posons $\varphi = y_1+iy_2$ alors $\varphi$ est jamais nulle et

$$\psi(x) = \int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt + \log r_0 + i\theta_0 \text{ donc } \psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Alors $(\varphi e^{-\psi})' = (\varphi' - \varphi\psi')e^{-\psi} = 0$

Ainsi

$\varphi = Ce^{\psi}$ où $C$ est une constante.

Or $\varphi(a) = y_1(a)+iy_2(a) = r_0e^{i\theta_0}$ et $\psi(a) = \log r_0 + i\theta_0$ donc $C=1$ ainsi:

$\varphi = e^{\psi}$

Ainsi avec $\theta = \mathrm{Im}\,\psi$ alors $\varphi = re^{i\theta}$.

et $r = \sqrt{y_1^2+y_2^2}$

On a:

$$\varphi(x) = \log r_0 + i\theta_0 + \int_a^x \frac{g_1'(t)+ig_2'(t)}{g_1(t)+ig_2(t)}\,dt$$

$$= \log r_0 + i\theta_0 + \int_a^x \frac{(g_1'(t)+ig_2'(t))(g_1(t)-ig_2(t))}{r(t)^2}\,dt$$

$$= \log r_0 + i\theta_0 + \int_a^x \frac{g_1'(t)g_1(t)+g_2'(t)g_2(t)}{r(t)^2}\,dt + i\int_a^x \frac{g_1(t)g_2'(t)-g_2(t)g_1'(t)}{r(t)^2}\,dt.$$

Ce qui donne bien,

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_a^x \frac{\omega(t)}{r(t)^2}\,dt.$$

∎

**Théorème:** Soit $a\in\mathbb{R}$ et $q\in\mathcal{C}^1([a,+\infty[)$, $q>0$ telle que :

$$\int_a^{+\infty}\sqrt{q(u)}\,du = +\infty \text{ et } q'(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(q^{3/2}(x)\right)$$

Soit $y$ une solution réelle non nulle de $y''+qy=0$ sur $[a,+\infty[$ et soit $N(x)$ le nombre de zéros de $y$ sur $[a,x]$. Alors :

$$N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,du.$$

**Preuve:**

Étape 1: On fait un changement de variable :

$$\tau(x) = \int_a^x \sqrt{q(u)}\,du$$

car $\tau'(x) = \sqrt{q(x)} > 0$.

$\tau$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Ainsi $\tau^{-1}$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,+\infty[$ sur $[a,+\infty[$.

On pose donc $Y = y\circ\tau^{-1}$ donc $y(x) = Y(\tau(x))$ $(\forall x\in[a,+\infty[)$

Ainsi pour $x\in[a,+\infty[$,

$$y'(x) = \tau'(x)\,Y'(\tau(x)) = \sqrt{q(x)}\,Y'(\tau(x))$$

$$y''(x) = \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}\,Y'(\tau(x)) + q(x)\,Y''(\tau(x))$$

d'où $0 = y''+qy = q(x)\,Y''(\tau(x)) + \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}}\,Y'(\tau(x)) + q(x)\,Y(\tau(x)) = 0$

En posant $\varphi(t) = \dfrac{q'(\sigma^{-1}(t))}{t q^{3/4}(\sigma^{-1}(t))}$ alors on a $\forall t \geq 0$ :

$$Y''(t) + \varphi(t) Y'(t) + Y(t) = 0.$$

(On veut se ramener à $Y'' + Y = 0$ que l'on sait résoudre et ici cela va marcher car $\varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$).

Étape 2 : On veut utiliser le Lemme, par cela montrons que $Y$ et $Y'$ n'ont pas de zéros communs.
Par l'absurde, alors $Y$ serait solution de :

$$\begin{cases} Y'' + \varphi Y' + Y = 0 \\ Y(t_0) = 0 \\ Y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Or par unicité de la solution on $Y = 0$ donc $q = 0$ ce qui est absurde.

Étape 3 : Passage en coordonnées polaire.
Il existe $r, \theta \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ tel que :

$$Y = r \sin\theta \text{ et } Y' = r\cos\theta$$

On sait de plus que $Y'' + \varphi Y' + Y = 0$ donc

$$Y'' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = -\varphi r\cos\theta - r\sin\theta$$
$$Y' = r\theta'\cos\theta + r'\sin\theta = r\cos\theta$$

On multiplie la première par $-\sin\theta$ et la 2 par $\cos\theta$ ainsi :

$$r\theta'(\cos\theta)^2 + r'\sin\theta\cos\theta - r'\cos\theta\sin\theta + r\theta'(\sin\theta)^2 = r(\cos\theta)^2 + \varphi r\cos\theta\sin\theta + r(\sin\theta)^2$$

$$\text{donc} \quad r\theta' = r + \varphi r\cos\theta\sin\theta$$

$$\text{or } r > 0 \text{ donc } \theta' = 1 + \varphi\cos\theta\sin\theta$$

Ainsi ceci donne que :

$$|\theta'(t) - 1| \leq |\varphi(t)| \text{ et } \varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \text{ donc}$$

$$\theta'(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} 1$$

Or $\theta(t) = \int_0^t \theta'(x)\,dx + \theta(0)$ et $\int_0^{+\infty} 1\,dx = +\infty$ donc

$$\theta(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \int_0^t 1\,dx = t.$$

Ainsi il existe $t_0 \geq 0$ tel que $t \geq t_0$ alors $\theta'(t) > 0$ et $\theta(t) \geq 0$.

Etape 4: Equivalent.

On note $N(t) = \#\{s \in [0,t],\ Y(s)=0\} \left(= \#Z(y)\right)$

Soit $t_1 \geq 0$, montrons que $N(t_1) < +\infty$.

Par l'absurde supposons de $N(t_1) = +\infty$ alors $\{s \in [0,t_1],\ y(s)=0\}$ admet un point d'accumulation $u$ (par dichotomie) et on a : $Y(u)=0$

et $v_n \in Z(y)$ tq $u_n \neq v$ et $v_n \to u$ ainsi

$$0 = \frac{Y(u_n)-Y(u)}{u_n-u} \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y'(u).$$

Donc $Y=0$, absurde.

En particulier $N(t_0) < +\infty$ et on a :

$$\begin{aligned} N(t) &= N(t_0) + \#\{u \in [t_0,t],\ Y(u)=0\} \\ &= N(t_0) + \#\{u \in [t_0,t],\ \sin\theta(u)=0\} \quad \text{avec } Y(u) = \underbrace{r(u)}_{>0}\sin(\theta(u)) \\ &= N(t_0) + \#\{v \in [\theta(t_0),\theta(t)],\ \sin(v)=0\} \quad \text{car } \theta'(t) \geq 0\ \forall t \geq t_0. \\ &= N(t_0) + \#\{k \in \mathbb{Z},\ \theta(t_0) \leq k\pi \leq \theta(t)\}. \end{aligned}$$

Or $\#\{k \in \mathbb{Z},\ \theta(t_0) \leq k\pi \leq \theta(t)\} = \#\{k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k\pi \leq \theta(t)\} - \#\{k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k\pi < \theta(t_0)\}$

$$= \left\lfloor \frac{\theta(t)}{\pi} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\theta(t_0)}{\pi} \right\rfloor$$

$$\sim \frac{\theta(t)}{\pi} \sim \frac{t}{\pi}$$

Ainsi ceci donne que $N(t) \sim \frac{t}{\pi}$.

On pose $N(x) = \#\{u \in [a,x],\ y(u)=0\}$.

Alors

$$\begin{aligned} N(\tau(x)) &= \#\{u \in [0,\tau(x)] \mid Y(u)=0\} \\ &= \#\{s \in [a,x] \mid Y(\tau(s))=0\} \\ &= \#\{s \in [a,x] \mid y(s)=0\} \\ &= N(x) \end{aligned}$$

En particulier, $N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\tau(x)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,du$.

FIN

Contre-exemple: hypothèse $q'(x) = O(q^{3/2}(x))$.

On pose $a = 1$, $q(x) = \frac{1}{4x^2}$ alors $\int_1^t \sqrt{q(u)}\,du = \int_1^t \frac{1}{2u}\,du \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

$q'(x) = \frac{1}{4}(-2)x^{-3}$

mais $q'(x)q(x)^{-3/2} = -\frac{1}{2}x^{-3}8x^3 = -4$.

La solution de $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$ est $y = \sqrt{x}(a + b\ln(x))$ qui a au plus un zéros.

Rmq: $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de $y'' = -qy$.

$$X' = AX \text{ avec } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $t \longmapsto A(t)$ est globalement lipschitz car $C^1$.

Donc unicité et existence de la solution et les zéros de $y$ sont isolés (même argument que dans la preuve)

En effet si les zéros de $y$ admettent un point d'accumulation $y(u) = 0$, $y(u_n) = 0$ et $u_n \to u$ et $u_n \neq u$.

Alors $\begin{cases} y'' + qy = 0 \\ y(u) = 0 \\ y'(u) = 0 \end{cases}$ car $0 = \frac{y(u_n) - y(u)}{u_n - u} \longrightarrow y'(u)$

donc $y = 0$.

Complètement sur le principe d'entrelacement de Sturm

Théorème: Sturm

Soit $q, r \in C^0([a,b])$ telles que $r \geq q$. Soit $y, z$ des solutions sur $[a,b]$ de.

$(E)$ $y'' + qy = 0$

$(E')$ $z'' + rz = 0$

lors en supposant $y \neq 0$:

a) Si $x_0, x_1$ $(x_0 < x_1)$ sont deux zéros consécutifs de $y$, $z$ s'annule en un point de $[x_0, x_1]$ si de plus $z(x_0) = 0$, $z$ s'annule en un point de $]x_0, x_1]$.

b) Si $y_1, y_2$ sont deux solution non proportionnelles de $(E)$ et $u, v$ $(u < v)$ deux zéros consécutifs de $y_1$, alors $y_2$ s'annule en un point de $]u, v[$.

**Preuve:**

a) Supposons $z$ sans zéros sur $[x_0, x_1]$, alors $z$ est de signe constant sur $[x_0, x_1]$ ops $z \geq 0$ sur $[x_0, x_1]$.

Et de même ops $y > 0$ sur $]x_0, x_1[$, ainsi $y'(x_0) > 0$

$y'(x_1) < 0$.

On pose $w = yz' - y'z$.

donc $w' = yz'' - y''z$

$= (q - r)yz$.

Ainsi $w' \leq 0$ sur $[x_0, x_1]$.

donc $w$ décroit sur $[x_0, x_1]$ or $w(x_0) = -y'(x_0)z(x_0) < 0$

et $w(x_1) = -y'(x_1)z(x_1) > 0$.

Donc $w(x_1) > w(x_0)$ absurde.

Donc $z$ s'annule en au moins un point.

□

**Plan:**

Soit $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[)$, $q > 0$, $x_0 \in [a, +\infty[$ on considère le problème de Cauchy suivant:

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} y'' + qy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Objectif étudier les zéros des solutions de $(\mathcal{C})$.

**Théorème:**

$\forall x_0 \in I$, $\forall (a_0, a_1) \in K^2$, $(\mathcal{C})$ admet une solution maximale sur $\mathbb{R}$.

**Proposition:**

Soit $y$ une solution maximale non identiquement nulle de $(\mathcal{C})$ alors les zéros de $I$ sont simples et isolés. I

pour $x \in [a, +\infty[$:

$\{t \in [a, x] \mid y(t) = 0\}$ est fini.

**Lemme:** Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([a, +\infty[; \mathbb{R})$, sans zéro commun et soit $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

Si $y_1(a) + i y_2(a) = r_0 e^{i\theta_0}$ on peut écrire:

$$y_1 + i y_2 = r e^{i\theta}$$

où $r, \theta \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[, \mathbb{R})$ et sont données par :

$$r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \quad \text{et} \quad \theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r^2(t)}\,dt.$$

**Théorème :** Si on suppose que :

$$\int_a^{+\infty} \sqrt{q(u)}\,du = +\infty \text{ et } q'(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(q^{3/2}(x)\right).$$

Alors pour y une solution réelle non nulle de $(\ell)$ sur $[a,+\infty[$ on a :

$$N(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{w}} \int_a^x \sqrt{q(u)}\,du$$

**Contre-exemple :** Sans l'hypothèse $q'(x) = o(q^{3/2}(x))$ il existe des contre-exemples. Par exemple avec $a = 1$, $q(x) = \frac{1}{4x^2}$ on a :

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{q(u)}\,du = +\infty.$$

Mais $q'(x)\,q(x)^{-3/2} = \frac{-1}{2x^3} \cdot 8x^2 = -4$.

Et la solution de $y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$ est $y = \sqrt{x}(a + b\ln(x))$ qui a au plus un zéro sur $[1,+\infty[$.

**Exemple :** $q(x) = \frac{1}{x^p}$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{p/2}}\,dx = +\infty \Rightarrow \frac{p}{2} \leq 1$.

$$\Rightarrow \boxed{p \leq 2}.$$

$q'(x)\,q(x)^{-3/2} = x^{p+1-\frac{3}{2}p} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $1 + p - \frac{3}{2}p < 0$

donc $p - \frac{3}{2}p < -1$ $\qquad \frac{2}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

donc $p\left(-\frac{1}{2}\right) < -1$

donc $p > 2$.

$\Rightarrow$ pas d'exemple de la forme $q(x) = \frac{1}{x^p}$.

**Exemple :** On prend $q(x) = \ln(x)$ alors $q'(x) = \frac{1}{x}$

donc $\frac{q'(x)}{(q(x))^{3/2}} = \frac{\ln(x)^{3/2}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc OK.