Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$.

réf: Caldero, Peronier, Carnet de voyage en algèbre (Nouvelle édition) p. 158

Oraux X-ENS, Algèbre 3 p. 67.

Théorème: $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Preuve:

Etape 1: $SO_3(\mathbb{R})$ connexe par arcs

Soit $g \in SO(3)$, alors g conserve la norme ainsi

$$\forall \lambda \in sp(g), \quad |\lambda| = 1.$$

De plus le polynôme caractéristique de g est réel de degré 3. Donc si $\lambda \in sp(g) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ alors $\bar{\lambda} \in sp(g)$ de même multiplicité donc g admet 1 ou -1 comme valeur propre.

De plus par définition $\det(g) = 1$ donc on a:

$$sp(g) = (1,1,1) \text{ ou } (1,-1,-1) \text{ ou } (1, \lambda, \bar{\lambda}) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Dans tous les cas 1 est valeur propre de g.

Ainsi par le théorème de réduction des endomorphisme normaux il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tq:

$$g = {}^tP R_\theta P \text{ où } R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On définit donc le chemin continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow SO_3(\mathbb{R})$

$$t \longmapsto {}^tP R_{t\theta} P.$$

Alors γ est continue et $\gamma(0) = Id$

$$\gamma(1) = g.$$

Ainsi $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

On considère H un sous-groupe distingué non trivial de $SO(3)$, montrons que $H = SO(3)$.

Etape 2: H admet un retournement.

On fixe un élément h non trivial de H et on pose:

$$\varphi : SO_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g \longmapsto \mathrm{tr}(ghg^{-1}h^{-1}).$$

φ est continue donc $\varphi(SO_3(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs c'est un intervalle de $\mathbb{R}$ de plus $SO_3(\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ fermé

donc compact ainsi $\varphi(SO_3(\mathbb{R}))$ est compact $\Rightarrow$ c'est un segment fermé de $\mathbb{R}$.

De plus $\varphi(Id) = tr(Id) = 3$.

Et pour $g \in SO_3(\mathbb{R})$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $ghg^{-1}h^{-1}$ semblable $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

On a donc

$$\varphi(g) = 1 + 2\cos(\alpha) \leq 3.$$

Donc $\varphi(SO_3(\mathbb{R})) = [a, 3]$.

De plus le centre de $SO_3(\mathbb{R})$ est $\{Id\}$, alors si on suppose $a = 3$ on a:

$$1 + 2\cos(\alpha) = 3.$$

Donc $\alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et donc $ghg^{-1}h^{-1} = Id$ donc h est dans le centre i.e $h = Id$. Absurde.

Ainsi $\varphi(SO_3(\mathbb{R})) = [a, 3]$ avec $a < 3$.

De plus $1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$ et $1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que:

$$a < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3.$$

Ainsi il existe $g_n \in SO(3)$ tel que $\varphi(g_n) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

On pose $h_n = g_n h g_n^{-1} h^{-1}$, alors il existe $\alpha \in [0, \pi]$ et $P_n \in O(\mathbb{R})$ tel que:

$$h_n \overset{\in}{=} P_n R_\alpha P_n.$$

Ainsi $1 + 2\cos(\alpha) = 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

donc $\alpha = \frac{\pi}{n}$.

h_n est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{n}$ donc h_n^n est une rotation d'angle π i.e c'est un retournement.

Or $h_n \in H$ car H est distingué.

donc $h_n^n \in H$ ainsi H admet un retournement.

Étape 3: Les retournements sont conjuguées dans $SO_3(\mathbb{R})$.

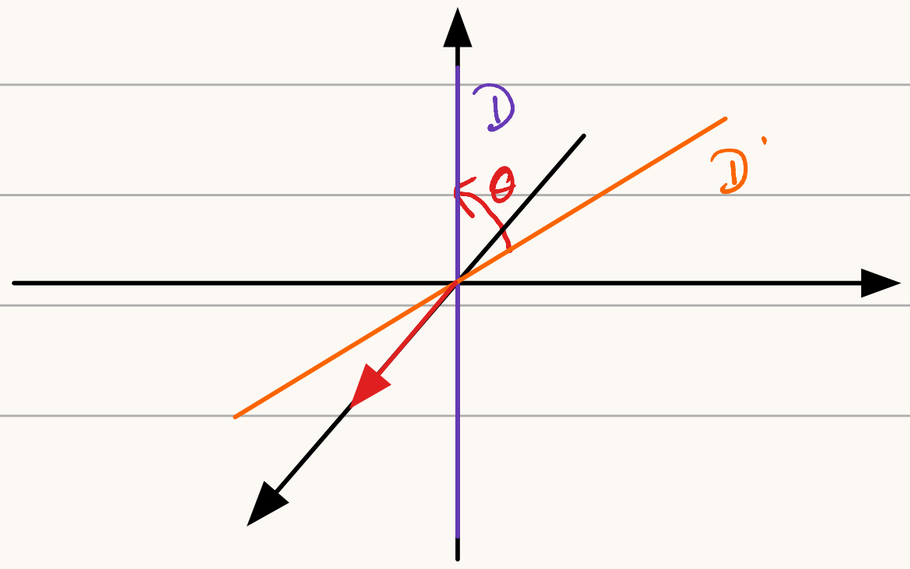
Soit h un retournement, on note D l'axe de retournement. Soit h' un autre retournement d'axe D'.

On considère $g \in SO_3(\mathbb{R})$ la rotation qui envoie D sur D', existe car D et D' appartiennent à un même plan.

On a que:

$$Tr(ghg^{-1}) = Tr(h)$$

Donc ghg^{-1} est aussi une rotation d'angle π.



De plus pour $u \in D$ on a :

$$(ghg^{-1})(g(u)) = g(u)$$

Donc le sous espaces propre pour la valeur propre 1 de ghg^{-1} est $g(D) = D'$. Ainsi ghg^{-1} est le retournement d'axe D' et ainsi $ghg^{-1} = h'$.

$\Rightarrow$ Les retournement sont conjuguées dans $SO_3(\mathbb{R})$

Etape 4: Conclusion

H contient au moins un retournement or comme ils sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$, H contient tous les retournement. De plus les retournements engendre $SO_3(\mathbb{R})$ donc $H = SO_3(\mathbb{R})$ d'où le résultat.

Lemme: $Z(SO_3(\mathbb{R})) = \{Id\}$ (centre)

<retournement> = $SO_3(\mathbb{R})$

Q° dimension au dessus ??

Preuve: Soit h_0 un élément du centre de $SO_3(\mathbb{R})$.

Soit D une droite et g une rotation non triviale d'axe D, et h commute avec g donc stabilise D. Ainsi h_0 stabilise toute les droites.

Or on a vu que le spectre de h_0 est de la forme :

$$(1,1,1) \text{ ou } (1,-1,-1) \text{ ou } (1,\lambda,\bar{\lambda}) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

Mais h_0 stabilise toute les droites donc les seuls possibilités sont

$$(1,1,1) \text{ ou } (1,-1,-1)$$

Si par l'absurde le spectre était $(-1,-1,-1)$ en notant v_1 un $\vec{vp}$ pour la vp 1, et $D = D(v+v')$.

v_{-1} un $\vec{vp}$ pour la vp -1.

Alors pour tout $u \in D = \lambda v + \lambda v'$ on a :

$$h_0(\lambda v + \lambda v') = \lambda v - \lambda v' \notin D.$$

Ce qui est absurde.

Ainsi $Sp(h_0) = (1,1,1)$ donc $h_0 = Id$.

Proposition: réf: X-ENS Algèbre 3, exercice 1.33.

Soit E un espace euclidien.

1. Soit $u \in O(E)$ alors u s'écrit comme produit d'au plus r réflexions où $r = rg(u - id_E)$.
   Ainsi les réflexions engendrent $O(E)$.

2_ Si $\dim(E)=3$, les retournements engendrent $SO(E)$.

Preuve:

1_ On procède par récurrence sur le rang r de $u-id_E$.

Si $r=0$: alors $u=id_E$ → ok

Si $r\geq 1$, supposons le résultat vraie pour tout v tel que $rg(v-id_E)<r$.

Alors u n'est pas l'identité donc il existe e de norme 1 tel que $u(e)\neq e$.

Or $u\in O(E)$ donc $\|u(e)\|=\|e\|$

ainsi $\langle u(e)-e, u(e)+e\rangle = \langle u(e),u(e)\rangle - \langle e,u(e)\rangle + \langle u(e),e\rangle - \langle e,e\rangle = 0$.

donc $(u(e)-e)\perp(u(e)+e)$.

Soit s la réflexion par rapport à $(u(e)-e)^\perp$ vérifie donc:

$$s(u(e)+e)=u(e)+e$$

$$s(u(e)-e)=-(u(e)-e)$$

Ce qui nous donne $s(u(e))=e$ et $s(e)=u(e)$.

De plus $Ker(u-id_E)\subseteq Ker(s\circ u-id_E)$.

En effet pour $x\in Ker(u-id_E)$, montrons que $(s\circ u)(x)=u$ i.e $s(x)=x$ i.e $x\in(u(e)-e)^\perp$

On a:

$$\langle x, u(e)-e\rangle = \langle u(x),u(e)\rangle - \langle x,e\rangle = \langle x,e\rangle - \langle x,e\rangle = 0$$

($\uparrow$ $u(x)=x$; $\uparrow$ $u\in O(E)$)

ainsi $x\in Ker(s\circ u-id_E)$.

De plus l'inclusion est stricte, puisque $e\notin Ker(u-id_E)$

mais $e\in Ker(s\circ u-id_E)$ car $s(u(e))=e$.

Ainsi $rg(s\circ u-id_E)<r$ on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $s\circ u$.

Il existe donc p réflexions $s_1,\dots,s_p$ telles que $p<rg(u-id)$ et:

$$s\circ u = s_1\circ\dots\circ s_p.$$

On a donc $u=s\circ s_1\circ\dots\circ s_p$ avec $1+p\leq rg(u-id)$ d'où le résultat.

2. On suppose $\dim(E)=3$.

Soit $u\in SO(E)\setminus\{Id\}$ alors on sait que $rg(u-id_E)=2$ puisque $Ker(u-id_E)$ est une droite.

D'après la question 1, u peut s'écrire comme le produit de 2 réflexion: $u=s_1\circ s_2$.

Or si H est un plan de E et s la réflexion par rapport à H, alors $-s$ est le retournement par rapport à la droite $D = H^{\perp}$.

La relation $u = (-s_1) \circ (-s_2)$ montre que u est la composée de 2 retournements.

□

Remarque :

1 - Le nbre $r = rg(u - id_E)$ est le nbre minimal de réflexions s_i que l'on peut avoir dans une décomposition $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$.

En effet si u s'écrit $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$ où s_i est la réflexion par rapport à l'hyperplan H_i, il est clair que :

$$H_1 \cap \dots \cap H_p \subseteq Ker(u - id_E).$$

Comme $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq \dim(E) - p$ le rang de $u - id_E$ est inférieur ou égal à p.

2 - Le résultat 2 reste vrai même si $\dim(E) \geq 3$.