Réduction endomorphisme normaux

Réf: Rombaldi, Algèbre p.745
Gourdon, Algèbre

E un espace euclidien de dim n.

Définition: Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal s'il est tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Rmq: Les endomorphisme suivant son normaux:
- u symétrique (ou auto-adjoint), c'est à dire tel que : $u^* = u$
- u anti-symétrique, i.e $u^* = -u$
- u orthogonal, i.e $u^* \circ u = u \circ u^* = Id$
- u une similitude donc $u = \lambda v$ ou v est une isométrie et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lemme 1:

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors si f est un s.e.v de E stable par u, $f^\perp$ est stable par u.

Preuve: Si $F = E$ alors $f^\perp = \{0\}$ donc ok
$f = \{0\}$ alors $f^\perp = E$ donc ok

On peut donc supposer $n \geq 2$ et $1 \leq p := \dim f \leq n-1$.

Soit B une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = f \oplus f^\perp$, alors comme f stable par u on a :

$$A = Mat_B(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ avec } A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}),\ A_3 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C}) \text{ et } A_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C}).$$

Et celle de u^* est :

$${}^tA = Mat_B(u^*) = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & 0 \\ {}^tA_2 & {}^tA_3 \end{pmatrix} \text{ (i.e } f^\perp \text{ stable par } u^*).$$

Or u étant normal $A\,{}^tA = {}^tA A$ or on a:

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^tA_1 & 0 \\ {}^tA_2 & {}^tA_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\,{}^tA_1 + A_2\,{}^tA_2 & A_2\,{}^tA_3 \\ A_3\,{}^tA_2 & A_3\,{}^tA_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } {}^tAA = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & 0 \\ {}^tA_2 & {}^tA_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 & {}^tA_1A_2 \\ {}^tA_2A_1 & {}^tA_2A_2 + {}^tA_3A_3 \end{pmatrix}$$

En particulier on a : ${}^tA_1A_1 = A_1{}^tA_1 + A_2{}^tA_2$

donc $\operatorname{tr}({}^tA_1A_1) = \operatorname{tr}(A_1{}^tA_1) + \operatorname{tr}(A_2{}^tA_2)$ or $\operatorname{tr}(A_1{}^tA_1) = \operatorname{tr}({}^tA_1A_1)$

donc $\operatorname{tr}(A_2{}^tA_2) = 0$.

Or $A, B \longmapsto \operatorname{tr}(A{}^tB)$ est un ps de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donc $A_2 = 0$ i.e :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

i.e $f^{\perp}$ est u-stable.

Lemme 2 : Par tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un s.e.v F de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Preuve :

1ère cas : u possède une valeur propre réelle λ, alors soit x un vecteur propre associé ($x \in E \setminus \{0\}$), alors la droite $F = \mathbb{R}x$ est stable par u de dim 1.

2ème cas : u ne possède pas de vp réelle, donc $n \geq 2$.

De plus $\pi_u \in \mathbb{R}[X]$ se décompose en produit de polynôme irréductible de degré 2.

On peut donc écrire :

$$\pi_u(X) = (X^2 + bX + c)Q(X) \quad \text{avec } b^2 - 4c < 0.$$

et $Q(u) \neq 0$ (π_u pol minimal).

Ce qui donne : $0 = \pi_u(u) = (u^2 + bu + c) \circ \underbrace{Q(u)}_{\neq 0}$ donc $v = u^2 + bu + c$ n'est pas injectif.

Ainsi $\operatorname{Ker}(v) \neq \{0\}$, soit $x \in \operatorname{Ker}(v) \setminus \{0\}$.

Posons $F = \operatorname{Vect}(x, u(x))$ qui est de dim 2.

Montrons que F est u-stable pour cela on a : $u(x) \in F$ d'où le résultat.

$$\text{et } u(u(x)) = -bu(x) - cx \in F$$

($x \in \operatorname{Ker}(v)$)

∎

Lemme 3: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe des sous espaces vectoriels de E, $P_1, \dots, P_r$ de dimension égal à 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que :

$$E = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j .$$

ne pas faire, directement dans la preuve.

Preuve:

On procède par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ de E

Pour $n=1$ ou $n=2$, le résultat est ok.

Supposons $n \geq 3$ et on suppose que pour tout espace vectoriel de dimension $1 \leq p \leq n-1$ et endomorphisme normal dessus le résultat est vraie.

Pour le lemme précédent il existe P_1 un s.e.v de E de dim 1 ou 2 stable par u. Ainsi on a :

$$E = P_1 \oplus P_1^{\perp}$$

Or $P_1^{\perp}$ est stable par u et $1 \leq n-2 \leq \dim(P_1^{\perp}) \leq n-1$ et $u_{|P_1^{\perp}}$ est normal.

Donc par hypothèse de récurrence, il existe $P_2, \dots, P_r$ des s.e.v de $P_1^{\perp}$ de dim 1 ou 2 stable par $u_{P_1^{\perp}}$ et 2 à 2 orthogonaux tels que :

$$P_1^{\perp} = \bigoplus_{j=2}^{r} P_j \text{ donc } E = P_1 \oplus P_1^{\perp} = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j .$$

Avec P_j stable par u.

□

On n'a donc plus qu'à traiter le cas $n=2$.

Lemme 4: Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien de dim 2. Si u possède une vp réelle, il est alors diagonalisable dans une base orthonormée. Sinon, pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } b \neq 0$$

Preuve:

Si u a une valeur propre λ_1, alors soit e_1 un vecteur unitaire tel que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.

Alors u stabilise $\mathbb{R}e_1$ donc $(\mathbb{R}e_1)^{\perp}$, soit $e_2 \in (\mathbb{R}e_1)^{\perp}$, on par dim : $\mathbb{R}e_2 = (\mathbb{R}e_1)^{\perp}$ ainsi

$$u(e_2) = \lambda_2 e_2 .$$

De plus $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base orthonormée de E et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Supposons u sans valeur propre réelle, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) =: A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Comme u est normal, $A\,{}^tA = {}^tAA$ or:

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\| \quad {}^tAA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne: $\begin{cases} b^2 = c^2 \\ ab-ac-db+dc=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} b = \pm c \\ (a-d)(b-c)=0 \end{cases}$

Si $b=0$, $c=0$ donc A diagonale ce qui contredit que A est sans vp réelle.

Donc $\underline{b \neq 0}$.

Si $b=c$ alors A symétrique et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ donc

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - b^2$$

De discriminant,

$$\Delta = (a+d)^2 - 4ad + 4b^2 = a^2+d^2-2ad+4b^2 = (a-d)^2+4b^2 \geq 0.$$

Donc possède une racine réelle, ie A à une vp réelle, Absurde.

Donc $b \neq 0$ et $c=-b$ ainsi $b-c \neq 0$

donc $a=d$

Ainsi on a:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } b \neq 0.$$

Théorème:

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & \\ & R_1 & & \\ & & R_2 & \\ & & & R_r \end{pmatrix}$$

où D_p est une matrice diagonale de taille $p \times p$ et $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ pour $1 \leq k \leq r$ avec $b_k \neq 0$.

Et p, r sont des entiers naturels tels que $p+2r = n$.

Preuve:

On procède par récurrence sur la dim $n \geq 1$.

Pour $n = 1$ ou $n = 2$ c'est déjà résolue.

Supposons $n \geq 3$ et on suppose que pour tout espace vectoriel de dimension $1 \leq p \leq n-1$ et endomorphisme normal dessus le résultat est vraie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal

1ère cas: u admet une valeur propre réelle λ_1, alors soit e_1 un vecteur propre associée unitaire.

On pose $H_1 = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ qui est stable par u par récurrence il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de H_1 dans laquelle:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_{|H_1}) = \begin{pmatrix} P_{R_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_r \end{pmatrix} =: \Delta_1.$$

Ainsi dans la base orthonormée $\{e_1\} \cup \mathcal{B}_1$ la matrice de u est:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{pmatrix}$$ d'où le résultat.

Cas 2: u n'a pas de valeurs propres réelles.

On sait que l'on a une décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^{c} P_k$ où P_k orthogonaux 2 à 2, stables par u, de dim 1 ou 2.

Or u n'a pas de valeurs propres réelles donc P_k de dim 2.

Ainsi le cas pour $n = 2$ nous dit que dans une base orthonormée de P_k adapté à cette décomposition, ainsi dans cette base la matrice de u dans cette base est:

$$S = \begin{pmatrix} R_1 & & \\ & \ddots & \\ & & R_c \end{pmatrix}.$$

Réciproquement un endo u de ce type dans une base orthonormée est normal car ces matrices R_k sont normales. □

Corollaire: Théorème Spectral.

Un endomorphisme symétrique a toutes ses valeurs propres réelles et se diagonalise dans une base orthonormée.

Preuve: Dire que u est symétrique c'est que chaque $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ est symétrique ce qui équivaut à $b_k = 0$.
Impossible donc S est diagonale.

Corollaire:

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme anti-symétrique. Toutes les valeurs propres de u sont imaginaires pures (éventuellement nulles) et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice u s'écrit:

$$S = \begin{pmatrix} 0_p & & \\ & R_1 & \\ & & \ddots \\ & & & R_q \end{pmatrix} \text{ où } 0_p \text{ est la matrice nulle de taille } p \times p$$

Et $R_k = \begin{pmatrix} 0 & -b_k \\ b_k & 0 \end{pmatrix}$ pour tout $1 \leq k \leq r$ et $p + 2r = n$.

Preuve:

Pour u anti-symétrique on a: $D_p = -D_p$ donc $D_p = 0_p$ et $R_k = -R_k$ donc $a_k = 0$.

Corollaire:

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ un endomorphisme orthogonal. Toutes les valeurs propres complexes de u sont de modules égal à 1 et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit:

$$D = \begin{pmatrix} I_{p_1} & & & & \\ & -I_{p_2} & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & R_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_r \end{pmatrix}$$

Où $p_1, p_2, r \in \mathbb{N}$ avec $p_1 + p_2 + 2r = n$ et pour $1 \leq k \leq r$ on a $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$.

Preuve:

Soit λ une valeur propre de u et $x \neq 0$ un $\vec{vp}$ on a:

$$\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

Donc $|\lambda| = 1$.

Ainsi les valeurs propres réelles sont 1 ou -1 i.e $D_p = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2} \end{pmatrix}$.

De plus la condition ${}^tR_\theta R_\theta = Id$ donne $a_\theta^2 + b_\theta^2 = 1$ donc il existe $\theta_\theta \in [0, 2\pi[$ tel que :

$$a_\theta = \cos(\theta_\theta) \text{ et } b_\theta = \sin(\theta_\theta)$$

Or $b_\theta \neq 0$ donc $\theta_\theta \neq 0$ et $\theta_\theta \neq \pi$, d'où le résultat.