Lemme de Fitting + nb cône nilpotent

ref: Carnet de Voyage en algèbre, Caldero et Perrinier p.75 + cours Romagny
Mansuy, Algèbre linéaire : Décomposition de matrice p. 44.

Lemme de Fitting:

Soit u un endomorphisme d'un espace E de dim d. La suite croissante $(\ker(u^k))_{k\geq 0}$ et la suite décroissante $(\mathrm{Im}(u^k))_{k\geq 0}$ sont stationnaire à partir d'un rang n_0 et on a:

$$E = \ker(u^{n_0}) \oplus \mathrm{Im}(u^{n_0}).$$

Preuve:

Il est clair que pour tout $k\geq 0$, $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$

$$\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$$

Ainsi la suite $(\dim(\ker(u^k)))_{k\geq 0}$ est croissante à valeur dans $[\![0, d]\!]$ donc stationnaire apcr.

$(\dim(\mathrm{Im}(u^k)))_{k\geq 0}$ - décroissante ——————.

Donc par inclusion + égalité des dim, $(\ker(u^k))_{k\geq 0}$ est stationnaire apcr.

$(\mathrm{Im}(u^k))_{k\geq 0}$ ——————.

Or par le théorème du rang si $\dim(\ker(u^k)) = \dim(\ker(u^{k+1})) \iff \dim(\mathrm{Im}(u^k)) = \dim(\mathrm{Im}(u^{k+1}))$. Les deux suites sont donc stationnaires à partir du même rang n_0.

Il nous reste à montrer que:

$$E = \ker(u^{n_0}) \oplus \mathrm{Im}(u^{n_0})$$

Or par le théorème du rang on sait que $\dim(\ker(u^{n_0})) + \dim(\mathrm{Im}(u^{n_0})) = \dim(E)$.

Il nous reste donc à montrer que $\ker(u^{n_0}) \cap \mathrm{Im}(u^{n_0}) = \{0\}$.

Soit $x \in \ker(u^{n_0}) \cap \mathrm{Im}(u^{n_0})$ alors il existe $y \in E$ tq $u^{n_0}(y) = x$

$$\text{or } 0 = u^{n_0}(x) = u^{2n_0}(y)$$

Ainsi $y \in \ker(u^{2n_0}) = \ker(u^{n_0})$ donc $x = u^{n_0}(y) = 0$.

□

Lemme: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec les même notations. L'endo induit $u_{|\ker(u^{n_0})}$ est nilpotent et $u_{|\mathrm{Im}(u^{n_0})}$ est un automorphisme.

De plus la donnée $((F,G),v,w)$ où $F=\ker(u^{n_0})$ et $v=u_{\ker(u^{n_0})}$ détermine entièrement u.

$G=\mathrm{Im}(u^{n_0})$ $\quad w=u_{\mathrm{Im}(u^{n_0})}$

Preuve:

Il est clair que u stabilise $\ker(u^{n_0})$ et $\mathrm{Im}(u^{n_0})$ car $\mathrm{Im}(u^{n_0})=\mathrm{Im}(u^{n_0+1})$.

De plus $u_{/\ker(u^{n_0})}$ est clairement nilpotent.

Montrons que $u_{|\mathrm{Im}(u^{n_0})}$ est surjectif or $\mathrm{Im}(u_{\mathrm{Im}(u^{n_0})})=\mathrm{Im}(u^{n_0+1})=\mathrm{Im}(u^{n_0})$.

Ainsi à u on a associée $((F,G),v,w)$ avec 1) $F\oplus G=E$ $\quad$ 3) $w\in GL(G)$

2) $v\in\mathcal{L}(F)$ nilpotent

Réciproquement si on se donne $((F,G),v,w)$ avec 1) $F\oplus G=E$ $\quad$ 3) $w\in GL(G)$.

2) $v\in\mathcal{L}(F)$ nilpotent

Alors on construit $u\in\mathcal{L}(E)$ avec pour $x=\underset{\sim}{x}_F^{\in F}+\underset{\sim}{x}_G^{\in G}$ par:

$$u(x)=v(x_F)+w(x_G).$$ on note $u=v\oplus w$

Et on a $u^n=v^n\oplus w^n=0\oplus w^n$ pour $n\geq n_0=$ indice de nilpotence de v.

Donc pour $n\geq n_0$, $\mathrm{Im}(u^n)=\mathrm{Im}(u_{|G}^n)=G$ donc $((F,G),v,w)$ est la décomposition de Fitting de u

et $\ker(u^n)=\ker(u^{n_0})=F$

Théorème: Soit $N_d(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_d(\mathbb{F}_q)$ alors:

$$|N_d(\mathbb{F}_q)|=q^{d(d-1)}$$

Preuve:

Le lemme précédent nous donne une bijection:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \{((F,G),v,w)\mid E=F\oplus G,\ v\in \mathrm{Nil}(\mathcal{L}(F)) \text{ et } w\in GL(G)\}$$

Si on note $m_{k\times d}$ le nombres de couples de sous-espaces (F,G) de $\mathbb{F}_q^d$ tels que $\dim(F)=k$ et $F\oplus G=\mathbb{F}_q^d$.

On a alors:

$$|\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)|=\sum_{k=0}^{d} m_{k,d}\,|\mathcal{N}_k(\mathbb{F}_q)|\,|GL_{d-k}(\mathbb{F}_q)|.$$

Il nous reste à calculer $m_{k,d}$.

Par cela on fixe k, et on note : $X = \{(F,G) \mid \dim(F) = k \text{ et } F \oplus G = \mathbb{F}_q^d\}$.

Alors $GL_d(\mathbb{F}_q)$ agit sur X par :

$$\forall g \in GL_d(\mathbb{F}_q), \forall (F,G) \in X, \quad g.(F,G) = (g(F), g(G))$$

→ Cette action est transitive car pour (F,G) et (F',G') dans X, il suffit de prendre $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{F}_q^d$ adapté à $F \oplus G = \mathbb{F}_q^d$, $\mathcal{B}'$ adapté à $F' \oplus G' = \mathbb{F}_q^d$ et g l'unique endo qui envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$.

→ Pour F_0 le sev engendré par les k premiers éléments de la base canonique et G_0 engendré par les $d-k$ autres alors

$$\mathrm{Stab}((F_0,G_0)) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in GL_k(\mathbb{F}_q) \text{ et } B \in GL_{d-k}(\mathbb{F}_q) \right\}$$

Ainsi par la relation orbite stabilisateur on a :

$$m_{k,d} = \frac{|GL_d(\mathbb{F}_q)|}{|GL_k(\mathbb{F}_q)| \times |GL_{d-k}(\mathbb{F}_q)|}$$

Or $|GL_d(\mathbb{F}_q)| = q^{d^2}$ donc

$$q^{d^2} = \sum_{k=0}^{d} |\mathcal{P}_k(\mathbb{F}_q)| \times \frac{g_d}{g_k} \quad \text{où } g_k = |GL_k(\mathbb{F}_q)|$$

Ainsi $$\frac{q^{d^2}}{g_d} = \sum_{k=0}^{d} \frac{|\mathcal{P}_k(\mathbb{F}_q)|}{g_k}$$

Donc $$|\mathcal{P}_d(\mathbb{F}_q)| = g_d \left(\frac{q^{d^2}}{g_d} - \frac{q^{(d-1)^2}}{g_{d-1}} \right)$$

$$= q^{d^2} - q^{(d-1)^2} \frac{g_d}{g_{d-1}}$$

Or $\frac{g_d}{g_{d-1}} = q^{d-1}(q^d - 1)$ donc $|\mathcal{P}_d(\mathbb{F}_q)| = q^{d^2} - q^{(d-1)^2} q^{d-1}(q^d-1)$

$$= q^{d^2} - q^{d(d-1)-(d-1)+(d-1)+d} + q^{d(d-1)-(d-1)+(d-1)}$$

$$= q^{d^2} - q^{d(d-1)+d} + q^{d(d-1)}$$

$$= q^{d^2} - q^{d^2} + q^{d(d-1)} = q^{d(d-1)}$$

$\square$