# Théorème de Krein-Milman

Réf: Oraux X-ENS, Analyse 3.

**Théorème:**

Soient $E$ un espace euclidien et $K$ une partie convexe compacte de $E$. Alors $K$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

**Preuve:**

On raisonne par récurrence sur la dimension $p$ du sous-espace affine engendré par $K$.

Si $p=0$, alors $K$ est un singleton et le résultat est vrai.

On suppose le résultat est vrai jusqu'au rang $p-1$ et on se donne un convexe compact $K$ qui engendre un sous-espace affine de dimension $p$.

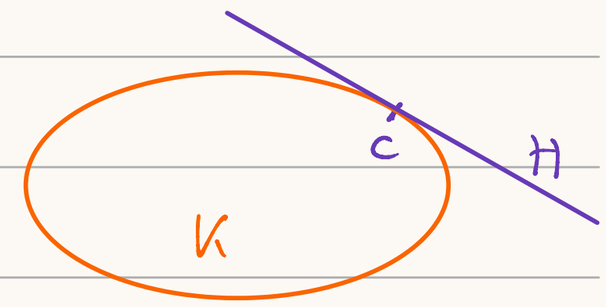
Quitte à translater $K$ et à remplacer $E$ par un sous-espace vectoriel on peut supposer que $p = \dim(E)$.

Soit $c \in K$, on cherche à écrire $c$ comme barycentre à coefficients positifs de points extrémaux de $K$.

Cas 1 : $c \in \partial K$

On utilise un hyperplan d'appui pour cela on utilise le Lemme suivant.

**Lemme:** Soit $c \in \partial K$ il existe un hyperplan affine $H$ de $E$ passant par $c$ tel que $C$ soit contenu dans l'un des demi-espaces fermés délimités par $H$ ($H$ est appelé un hyperplan d'appui).




On note $H$ un hyperplan d'appui de $K$ en $c$ ainsi $H$ est de dim $p-1$.

On pose $K' = K \cap H$ qui est convexe comme intersection de deux convexes et compacts comme intersection d'un compact et d'un fermé.

De plus le sous espace affine engendré par $K'$ est inclus dans $H$ donc de dim au plus $p-1$. Par hypothèse de récurrence appliqué à $K'$, $c$ s'écrit comme combinaison linéaire des points extrémaux de $K \cap H$.

Montrons que les points extrémaux de $K \cap H$ sont des points extrémaux de $K$.

Soit $a \in K \cap H$ un point extrémale de $K \cap H$ alors $a \in K$ et $H$ est un hyperplan d'appui de $K$ en $a$.

De plus soient $x_1, x_2 \in K$ tel que:

$$a = \frac{c_1 + c_2}{2}$$

Soit $v$ un vecteur non nul normal à $H$ on a donc :

$$\frac{1}{2}\left(\langle v, c_1\rangle + \langle v, c_2\rangle\right) = \langle v, a\rangle$$

Or $H$ est un hyperplan d'appui en $a$ donc par exemple pour tout $c_3 \in K$, $\langle v, c_3\rangle \leq \langle v, a\rangle$.

Ainsi $\begin{cases} \langle v, c_1\rangle \leq \langle v, a\rangle \\ \langle v, c_2\rangle \leq \langle v, a\rangle \end{cases}$ et $\frac{1}{2}\left(\langle v, c_1\rangle + \langle v, c_2\rangle\right) = \langle v, a\rangle$.

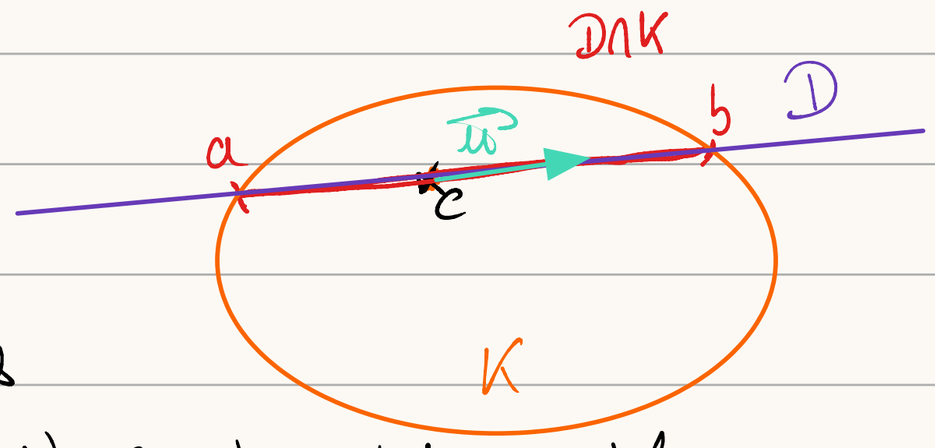
Ainsi on a donc $\langle v, c_1\rangle = \langle v, c_2\rangle = \langle v, a\rangle$.

Ce qui prouve que $c_1, c_2 \in K \cap H$ et on a : $a = \frac{c_1 + c_2}{2}$.

Or $a$ est un point extrémale de $K \cap H$ donc $a = c_1 = c_2$ donc $a$ est un point extrémale de $K$.

Conclusion : $c$ est combinaison linéaire convexe de points extrémaux de $K$.

Cas 2 : $c \in \mathring{K}$ :




Alors on note $D$ une droite passant par $c$.

Ainsi $D \cap K$ est un convexe compact car intersection de deux parties convexes et intersection d'un compact et d'un fermé. Ainsi il existe 2 points $a, b$ de $K \cap D$ tel que $K \cap D = [a, b]$ → segment.

De plus $a, b \in \partial K$.

En effet si par exemple $a \in \mathring{K}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq K$ et donc si on note $\vec{u}$ le vecteur directeur de $D$ on a : $]a - \varepsilon\vec{u}, a + \varepsilon\vec{u}[ \subseteq K$ donc

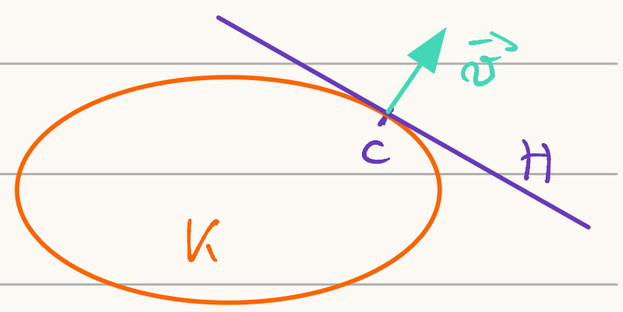
$$]a - \varepsilon\vec{u}, a + \varepsilon\vec{u}[ \subseteq [a, b] = K \cap D.$$

Ce qui est absurde.

Or par le cas précédent $a, b$ sont des combinaisons linéaires des points extrémaux de $K$ ainsi $c$ l'est aussi car $c \in [a, b]$, d'où le résultat. ∎

Il nous reste à démontrer le lemme.

Lemme : Soit $c \in \partial K$ il existe un hyperplan affine $H$ de $\mathbb{R}$ passant par $c$ tel que $C$ soit contenu dans l'un des demi-espaces fermés délimités par $H$ ($H$ est appelé un hyperplan d'appui).




Preuve : Il suffit de trouver un vecteur $v \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall c \in K', \langle v, c'\rangle \leq \langle v, c\rangle.$$

L'hyperplan serait alors $H = \{w \in E, \langle v, w \rangle = \langle v, c \rangle\}$.
Puisque $c \in \partial K$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E \setminus K$ tel que $x_n \longrightarrow c$.
De plus on sait que les projetés $p_K(x_n)$ de $x_n$ sur $K$ vérifient :

$$\forall y \in K, \ \langle x_n - p_K(x_n), y - p_K(x_n) \rangle \leq 0$$

i.e

$$\forall y \in K, \ \langle x_n - p_K(x_n), y \rangle \leq \langle x_n - p_K(x_n), y \rangle.$$

Ainsi $p_K(x_n) \in K$ admet un hyperplan d'appui de vecteur normal $x_n - p_K(x_n) \neq 0$. On peut donc considérer la suite :

$$v_n = \frac{x_n - p_K(x_n)}{\|x_n - p_K(x_n)\|}$$

Par compacité de la sphère unité (dim finie) il existe une extractrice $\varphi$ telle que la suite $(v_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $v \in E$.
Or on sait que :

$$\forall c' \in K, \forall n \in \mathbb{N}, \ \langle v_{\varphi(n)}, c' \rangle \leq \langle v_{\varphi(n)}, p_K(x_{\varphi(n)}) \rangle$$

Or $p_K$ est continue et $p_K(c) = c$ ainsi par passage à la limite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle v, c' \rangle \leq \langle v, c \rangle.$$

On a bien trouver un hyperplan d'appui de $K$ en $c$.

∎