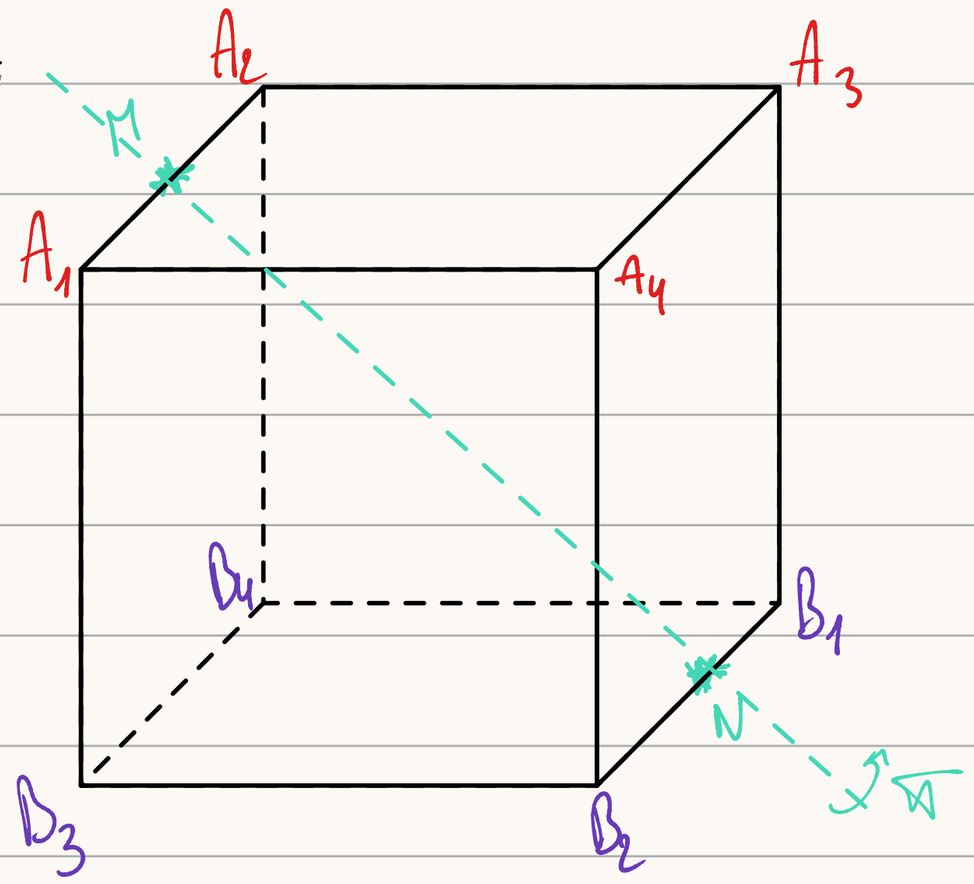
Isométries du cube.

ref: Calabro, Germani, H2G2 tome 1 p364 « Carnet de Voyage en algèbre
Geoffrey Deperle et Robinson Le Biham « L3 Spirtgles.

Théorème: Les isométries du cube sont

1) $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6) \simeq \mathfrak{S}_4$ et 2) $\mathrm{Isom}(\mathcal{C}_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Preuve: On considère le cube:



Soit g une isométrie et A_iB_i une grande diagonale on sait que:

$$d(g(A_i), g(B_i)) = d(A_i, B_i).$$

Ainsi $(g(A_i), g(B_i))$ sont les extrémités d'une grande diagonale i.e il existe $j \in [\![1,4]\!]$ tel que:

$$[g(A_i), g(B_i)] = [A_j, B_j].$$

Pour $i \in [\![1,4]\!]$, on note D_i la grande diagonale $[A_i, B_i]$ et $\Omega = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ l'ensemble des grandes diagonales.

Par ce qui précède pour g une isométrie du cube on définit:

$$\widetilde{g}_{|\Omega} : \Omega \longrightarrow \Omega.$$

tel que:

$$\widetilde{g}_{|\Omega}(D_i) = D_j \iff [g(A_i), g(B_i)] = [A_j, B_j].$$

De plus par bijectivité de g, $\widetilde{g}_{|\Omega}$ est aussi bijective.

1) Ceci nous définit un morphisme de groupe:

$$\varphi : \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6) \longrightarrow \mathfrak{S}_\Omega$$
$$g \longmapsto \widetilde{g}_{|\Omega}.$$

Montrons que φ est une bijection.

Injectivité de φ : (i.e que l'action de $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6)$ sur $\mathcal{D}$ est fidèle)

Soit g tel que $\mathcal{B}\mathrm{som}^+(g) = \mathcal{B}\mathrm{d}_{\mathcal{D}}$.

Pour $i \in [\![1,4]\!]$ comme $\mathcal{D}_i$ est fixé par $\widetilde{g}_{|\mathcal{D}}$ il y a deux possibilités :

$$g(A_i) = B_i \quad \text{où} \quad g(A_i) = A_i$$
$$g(B_i) = A_i \qquad\quad g(B_i) = B_i$$

On peut supposer $i = 1$ et on a 2 cas.

Cas 1 : $(g(A_1), g(B_1)) = (A_1, B_1)$.

Or $g(A_2) \in \{A_2, B_2\}$ et si $g(A_2) = B_2$ alors :

$$d(A_1, A_2) = d(g(A_1), g(A_2)) = d(A_1, B_2) \Rightarrow \text{impossible}.$$

Ainsi $g(A_2) = A_2$ donc $g(B_2) = B_2$

De même $g(A_4) = A_4$.

Ainsi g fixe un repère affine du plan (4 points non alignés) donc $g = \mathcal{B}\mathrm{d}$.

$\hookrightarrow A_1, A_2, B_1, A_4$

Cas 2 : $(g(A_1), g(B_1)) = (B_1, A_1)$.

On note O le centre du cube et S_O la symétrie centrale du cube.

Ainsi $S_O \circ g$ envoie A_1 sur A_1 ce qui implique par ce qui précède que

$$S_O \circ g = \mathcal{B}\mathrm{d}.$$

donc $g = S_O^{-1} = S_O$

Ce qui est absurde car $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6)$.

Ainsi φ est injective.

Surjectivité de φ :

Comme les transpositions engendre $\mathcal{G}_2$ il suffit de montrer que l'atteint les transpositions i.e la transposition $(\mathcal{D}_1\ \mathcal{D}_2)$.

En notant M le milieu de $[A_1 A_2]$ et N le milieu de $[B_1 B_2]$ on vérifie que :

$$\varphi(S_{(MN)}) = (\mathcal{D}_1\ \mathcal{D}_2)$$

Ainsi φ est surjective.

On a donc bien : $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6) \simeq \mathcal{G}_2 \simeq \mathcal{G}_4$.

8) Soit $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{C}_6)$ alors $S_O \circ g = g \circ S_O$

En effet $\vec{S_0} = -\mathrm{Id}_E$ qui commute avec l'application linéaire de g.

et $g \circ S_0$, $S_0 \circ g$ ont comme même point fixe O

Ainsi le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathrm{Isom}(\mathcal{C}_6) &\longrightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6) \times \{\mathrm{Id}, S_0\} \\ g &\longmapsto \begin{cases} (g, 1) \text{ si } g \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6) \\ (gS_0, S_0) \text{ sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où les isomorphismes :

$$\mathrm{Isom}(\mathcal{C}_6) \simeq \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6) \times \{\mathrm{Id}, S_0\} \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

Application : Il y a 57 manières de colorer un cube avec au plus 3 couleurs.

Preuve : On note $\mathcal{F}$ est l'ensemble des faces du cube et $\mathcal{C}$ l'ensemble des n couleurs possibles.

On note $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ les fonctions de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}$.

Soit f et f' dans $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ alors f et f' définissent le même coloriage si il existe $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6)$ tq :

$$f = f' \circ g.$$

On fait donc agir $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6)$ sur $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ par

$$\begin{aligned} \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6) \times \mathcal{C}^{\mathcal{F}} &\longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{F}} \\ (g, f) &\longmapsto f \circ g. \end{aligned}$$

Pour dénombrer le nombre de coloriage il suffit donc dénombrer le nombre d'orbite par cette action.

Pour cela on utilise la formule de Burnside, si l'on note N le nombre d'orbites alors :

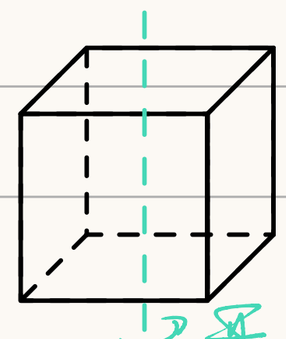
$$N = \frac{1}{|\mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6)|} \sum_{g \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6)} |\mathrm{Fix}(g)|$$

donc $$N = \frac{1}{\mathfrak{S}_4} \sum_{g \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6)} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

L'objectif est de dénombrer $|\mathrm{Fix}(g)|$ pour $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{C}_6)$. (Voir le lien entre $\mathfrak{S}_4$ et I_6)

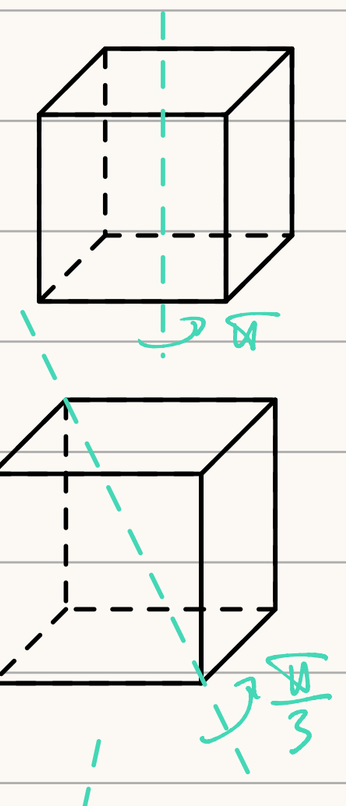
- Si $g = \mathrm{Id}$, tous les colorieages sont fixes par l'action de g donc $\mathrm{fix}(g) = |\mathcal{C}^{\mathcal{F}}| = n^6$.

4-cycle
- Si g est un quart de tour les faces du dessus et du dessous du cube sont invariantes donc peuvent être colorées librement. Les faces latérales quand à



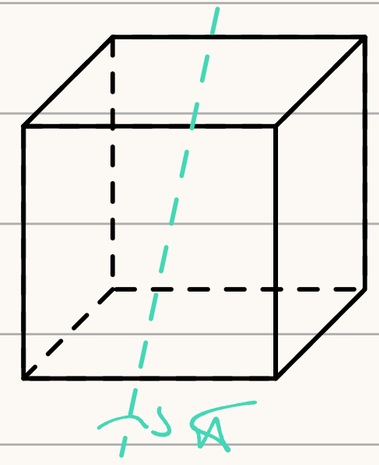
elles pour être fixes sous l'action de g doivent toutes avoir la même couleur. Il y a donc n^3 colorieges fixes.

c-transp_ Si g est un retournement, les faces de dessus et du dessous sont invariantes par g, la face de devant et la face de derrière sont échangées donc doivent partager le même coloriage de même que pour les faces de gauches et de droite. Ainsi il y a n^4 colorieges fixes.



3-cycles_ Si g est un "3-cycles" alors il faut et il suffit que les trois faces qui s'intersectent soient de la même couleur. Il y a n^2 possibilités.

transp_ Si g est une transposition, il suffit de choisir une couleur pour chaque face latéral, une couleur pour la face de devant et la face de dessous et une couleur pour la face du dessus et la face opposée. Il y a n^4 possibilités.



Au total on a donc :

$$N = \frac{1}{24}(n^6 + 6n^3 + 3n^4 + 8n^2 + 6n^3)$$

avec $n=3$ on a $N = 57$.