Factorisation LU et de Cholesky

ref: Rombaldi

- Allaire et Kaber, Algèbre linéaire numérique.

I- Factorisation LU:

Définition: Les sous-matrices principales de $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ et les déterminants principaux sont les $\Delta_k = \det(A_k)$.

Théorème:

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ admet une décomposition $A = LR$, où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et R une matrice triangulaire supérieure si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Lorsqu'elle existe cette décomposition est unique.

Preuve: Existence:

Pour la condition nécessaire et suffisante de l'existence on procède par récurrence sur $n \geq 1$.

Pour $n = 1$: c'est clair.

Pour $n > 1$, on suppose le résultat vraie pour $n-1$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $\forall k$, $\det(A_k) \neq 0$. On écrit alors:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Avec $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $B_1 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $C_1 \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$.

Or pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\det(A_k) \neq 0$ donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\det(A_{1,k}) = \det(A_k) \neq 0$.

et $a_{nn} \in \mathbb{K}$

Par hypothèse de récurrence il existe L_1 triangulaire inférieure à diagonale unité et R_1 triangulaire supérieure dans $GL_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que:

$$A_1 = L_1 R_1$$

On note,

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ D_1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} R_1 & B_1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } D_1 \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}), B_1 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}) \text{ et } \alpha \in \mathbb{K}^*$$

à déterminer

On a bien L triangulaire inférieure à diagonale unité et R triangulaire supérieure dans $GL_n(\mathbb{K})$. De plus,

$$A = LR \iff \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 R_1 & L_1 P_1 \\ D_1 R_1 & \alpha + D_1 P_1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} B_1 = L_1 P_1 \\ C_1 = D_1 R_1 \\ a_{nn} = \alpha + D_1 P_1 \end{cases}$$

Or L_1 inversible ainsi $\exists!\ P_1 \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ tq $L_1 P_1 = B_1$.

R_1 inversible ainsi $\exists!\ D_1 \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ tq ${}^tR_1\,{}^tD_1 = {}^tC_1$ i.e $D_1 R_1 = C_1$.

Puis on pose $\alpha = a_{nn} - D_1 P_1 \in \mathbb{K}$, en effet si $\alpha = 0$ alors $\det(R) = 0$ or $A = LR$ i.e $\det(A) = 0$

Absurde.

On a donc l'existence de la décomposition LR.

Réciproquement on suppose que $A = LR$ alors la décomposition par bloc montre que les déterminants principaux de A sont non nuls.

En effet $\det(A) \neq 0$ donc $\det(R) \neq 0$ et $A_1 = L_1 R_1$ or $\det(L_1) = 1$

donc $\det(A_1) = \det(R_1) = \dfrac{\det(R)}{\alpha} \neq 0$.

Et tous les mineurs principaux de A_1 sont non nuls pour tout R.

Unicité: Supposons que $A \in GL_n(\mathbb{K})$ s'écrive $A = L_1 R_1 = L_2 R_2$.

Toutes les matrices étant inversibles on a:

$$L_2^{-1} L_1 = R_2 R_1^{-1}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure inférieure de diagonale unité donc:

$$I_n = L_2^{-1} L_1 = R_2 R_1^{-1}$$

$$\Rightarrow L_2 = L_1 \text{ et } R_2 = R_1$$

Algorithme numérique:

On se donne A est à la fin dans le tableau on aura $\begin{pmatrix} L \backslash U \end{pmatrix}$ où L est sans sa diagonale :

1_ Pour $k = 1$ à $n-1$

2_ Pour $i = k+1$ à n

3_ Pour $j = k+1$ à n

La complexité est $\sim \dfrac{n^3}{3}$

4. $a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}$

5. Fin j

6. Fin i

7. Pour $i = k+1$ à n

8. $a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

9. Fin i

10. Fin k

Calcul pratique :

On part de A on fait des opérations sur les lignes pour trianguliser A => on obtient U et on enregistre dans une autre matrice L l'inverse des opés i.e $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ devient $L_i \leftarrow L_i - L_j$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2} L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2} L_1$

$1 - \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3} L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2} L_1$

$L_3 \leftarrow L_3$
$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3} L_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -2 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{7} L_3$

$U =$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix} = L$.

Corollaire: (Décomposition LD^tL)

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ symétrique avec ses mineurs principaux positifs on a la décomposition unique :

$$A = LD^tL$$

où L triangulaire inf à diagonale unité et D diagonale.

Preuve:

On sait que l'on a existence et unicité de : $A = LR$.

On sait que $\det(A) = \det(A) \neq 0$ donc les éléments diagonaux de R sont tous non nuls on peut donc écrire :

$$R = DR'$$

où D diagonale et R' triangulaire supérieure avec une diagonale unitaire, ainsi.

$$A = LDR'$$

Or ${}^tA = A$, donc par unicité de la décomposition LR on a:

$$A = {}^tA = \underbrace{{}^tR'}_{\text{triinf}}\underbrace{D\,{}^tL}_{\text{trisup}} \quad \text{donc } {}^tR' = L \text{ par unicité.}$$

Ainsi $A = LD^tL$.

□

IV- Factorisation de Cholesky.

Théorème: (Cholesky)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B\,{}^tB$. De plus cette décomposition est unique si on impose la positivité des éléments diagonaux de B.

Preuve: Si A est symétrique définie positive alors $A = LD^tL$ est donc la décomposition on a :

$$\forall i, d_i > 0 \quad (\text{car } L \text{ inversible et } {}^tx\,Ax > 0 \text{ donc } {}^t({}^tLx)D\,{}^tLx > 0)$$

On peut donc écrire $D = D'^2$ ie on a:

$$A = LDD'^tL = LD^t(LD') = B\,{}^tB$$

avec $B = LD'$ donc triangulaire inf inversible, la diagonale de B étant formée des $\pm\sqrt{d_i}$.

Réciproquement, si $A = B\,{}^tB$ alors A symétrique et pour tout x non nul on a:

$$\langle Ax|x\rangle = \langle B\,{}^tBx|x\rangle = \langle {}^tBx|{}^tBx\rangle > 0 \text{ car } {}^tB \text{ inversible.}$$

Rmq: On peut retrouver ce théorème en utilisant Gram-Schmidt.

Si A est une matrice réelle symétrique définie positive, elle définit alors un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle x|y\rangle = {}^txAy.$$

Le procédé de Gram-Schmidt permet de construire, à partir de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{R}^n$, une base $\mathcal{B} = (f_i)_{1\leq i\leq n}$ qui est orthonormée pour ce produit scalaire. Une telle base étant construite comme suit:

$$\begin{cases} g_1 = e_1, \ f_1 = \frac{1}{\|g_1\|} g_1 \\ g_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_k|f_j\rangle f_j \ , \ f_k = \frac{1}{\|g_k\|} g_k \end{cases}$$

La matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est alors triangulaire supérieure de termes diagonaux $\frac{1}{\|g_k\|} > 0$ et la matrice du produit scalaire $\langle .|. \rangle$ dans cette base $\mathcal{B}$ est

$$I_n = {}^tPAP.$$

Ce qui nous donne $A = B\,{}^tB$ où $B = {}^tP^{-1}$ est triangulaire inférieure de termes diagonaux $\|g_k\| > 0$.

Rmq: Méthodes pas efficaces car Gram-Schmidt mal conditionnés, on divise par $\frac{1}{\|g_k\|}$.

Rmq: On peut calculer B avec la décomposition LU et on continuant comme dans la preuve.

Une application de la décomposition de Cholesky c'est la décomposition QR.

Théorème: Factorisation QR.

Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QR$ où $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R une matrice

Triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Preuve:

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $M = {}^tAA$ est symétrique définie positive et en conséquence admet une décomposition de Cholesky ${}^tAA = B{}^tB$ où B est triangulaire inférieure de termes diagonaux strictement positifs.

On pose $Q = {}^tA^{-1}B$ alors :

$$\begin{aligned} {}^tQQ &= {}^tBA^{-1}{}^tA^{-1}B \\ &= {}^tB({}^tAA)^{-1}B \\ &= {}^tB(B{}^tB)^{-1}B \\ &= {}^tB{}^tB^{-1}B^{-1}B \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc $Q \in O_n(\mathbb{R})$ de plus $A = {}^tA^{-1}B{}^tB = QR$ où $R = {}^tB$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

On suppose que $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ avec $Q_1, Q_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et R_1, R_2 triangulaires sup à diag positives.

On pose $\Delta = R_1R_2^{-1} = Q_1^{-1}Q_2 = {}^tQ_1Q_2$, alors Δ est triangulaire supérieure orthogonale et

$$\Delta^{-1} = {}^t\Delta.$$

Donc Δ^{-1} est tri inf et sup donc diagonale donc $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

$$\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \Delta^{-1} = {}^t\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Ainsi $\lambda_i = 1$ donc $\Delta = \mathrm{id}$ donc $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$, d'où l'unicité.

Rmq: On peut obtenir cette décomposition avec Gram-Schmidt.

On se place dans $\mathbb{R}^n$ et on note $B_0 = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour $B = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base de $\mathbb{R}^n$ formée des vecteurs colonnes de $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Par Gram-Schmidt on peut construire $B_1 = (g_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\mathrm{Vect}\{f_1, \dots, f_k\} = \mathrm{Vect}\{g_1, \dots, g_k\}.$$

Et B_1 est une base orthonormée.

Ainsi la matrice de passage P_{B,B_1} est triangulaire sup et P_{B_0,B_1} est orthogonale.

Or $A = P_{B_0,B}$ ainsi $A = P_{B_0,B_1} P_{B_1,B} = P_{B_0,B_1} P_{B,B_1}^{-1} = QR$

$\widetilde{\in GL_n(\mathbb{R})}$ $\widetilde{\text{trisup}}$

De plus les termes diagonaux de $R = P_{B,B_1}^{-1} = P_{B_1,B}$ sont $\langle g_k | f_k \rangle > 0$ dans Gram-Schmidt.

De cette décomposition on peut en déduire, le théorème d'Iwasawa.

Théorème: Iwasawa.

Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QDR$ où Q est une matrice orthogonale, D une matrice diagonale de coefficients diagonaux strictement positifs et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

Preuve:

On sait que $A = QR$.

On pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ainsi $\lambda_i > 0$.

Et

$R' = D^{-1}R$ alors $A = QDR$ d'où le résultat d'existence.

$\text{Is diagonale} = 1$

L'unicité vient de celle de la décomposition QR en effet si $A = Q'D'R'$ alors

$$Q = Q' \text{ et } D'R' = DR$$

$$\Rightarrow D'D^{-1} = R'^{-1}R$$

Ainsi $R'^{-1}R$ diag avec des 1 i.e $= Id$ d'où le résultat.

FJ