Ellipsoïde de John-Loewner

ref: Berrris Berrris, Analyse pour l'agreg p. 271
Oraux X-ENS Algebre 3 p 229.

Definition: On appelle ellipsoïde plein et centré en l'origine, tout ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme:

$$\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^N \mid q(x) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t x S x \leq 1\}$$

où q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, définie positive et $S = \text{Mat}(q)$.

Remarques
- Comme q est définie positive, $\sqrt{q}$ est une norme. Ainsi $\mathcal{E}_q$ est un convexe compact comme boule unité fermé associée à cette norme
- Soient q et q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ définies positives.
  - Si $\mathcal{E}_q \subset \mathcal{E}_{q'}$ alors $q' \leq q$
  - Si $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_{q'}$ alors $q = q'$

En effet supposons $\mathcal{E}_q \subset \mathcal{E}_{q'}$ alors pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a:

$$q\left(\frac{x}{\sqrt{q(x)}}\right) = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{x}{\sqrt{q(x)}} \in \mathcal{E}_q \subset \mathcal{E}_{q'}$$

$$\text{donc} \quad q'\left(\frac{x}{\sqrt{q(x)}}\right) \leq 1$$

$$\text{donc} \quad q'(x) \leq q(x).$$

On peut donc parler de LA forme quadratique associée à un ellipsoïde.

Lemme: Volume d'un ellipsoïde.

Soient q une forme quadratique et S sa matrice dans la base canonique, alors si on note V_q le volume de $\mathcal{E}_q$ et V_n celui de la boule unité alors:

$$V_q = \frac{v_n}{\sqrt{\det(S)}}.$$

Preuve:

S étant symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B}_0$, ainsi il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que:

$$S = {}^t P \,\text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P, \text{ en particulier } \det(S) = \mu_1 \cdots \mu_n$$

Sétant définie positive on a $\forall i \in [\![1,n]\!], \mu_i > 0$.
De plus dans cette base B_0, on a:

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2.$$

Ainsi, $x \in \mathcal{E}_q$ ssi $\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\mu_i} x_i)^2 \leq 1$.

On définit donc l'application: $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \in GL(\mathbb{R}^n)$

$$z \longmapsto P \,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right) z$$

Ainsi Φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui envoie $\overline{B}(0,1)$ sur $\mathcal{E}_q$.

$$\Phi : \overline{B}(0,1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_q$$

On a de plus,

$$|\det(d_z \Phi)| = |\det(P)| \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} \quad \text{car } P \in O_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi par changement de variable linéaire, on a:

$$V_q = \int_{\mathcal{E}_q} 1 \, dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} \int_{\overline{B}(0,1)} dy_1 \dots dy_n = \frac{V}{\sqrt{\det(S)}}$$

Rmq: Dans le cas où $n=2$, $\mathcal{E}_q$ est un disque elliptique et dans le cas où $\mu_1 < \mu_2$ alors $\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}$ est la longueur a de son demi-grand axe, $\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}$ et la longueur b de son demi-petit axe, on retrouve que l'air de $\mathcal{E}_q$ est alors πab.

Théorème: Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide. Alors il existe un et un seul ellipsoïde plein, centré en l'origine, de volume minimal, qui contient K.

Preuve:

Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est définie positive si et seulement si sa matrice dans la base canonique est élément de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ainsi l'application (ensemble des ellipsoïdes) $\mathcal{E} \longrightarrow f \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ (f : forme quadratique définie positive) est une bijection.

$\mathcal{E}_q \longmapsto q \longmapsto \mathrm{Mat}(q)$ (la base canonique)

D'après le lemme un ellipsoïde contenant K est de volume minimum si et seulement si l'élément de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui lui est associé est de déterminant maximum.
Or dire que $K \subset \mathcal{E}_q$ est équivalent à ce que : $\forall x \in K,\ q(x) \leq 1$.

On cherche donc la valeur maximum de l'application déterminant sur l'ensemble des éléments $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que ${}^t x S x \leq 1,\ \forall x \in K$.

Existence :

On munit l'espace $S_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme $\|.\|_2$. Par le théorème spectral on sait que :

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|Sx\|_2\} = \sup\{\lambda, \lambda \in Spec(S)\} \text{ et } \sup_{\|x\|=1} \{q(x)\} = \sup\{\lambda, \lambda \in Spec(S)\}$$

On se place sur $S_n^+(\mathbb{R})$ qui est une partie fermé de $S_n(\mathbb{R})$. Et on pose :

$$C = \{S \in S_n^+(\mathbb{R}) \mid \forall x \in K,\ {}^t x S x \leq 1\}.$$

- Montrons que C est partie compact de $S_n(\mathbb{R})$ i.e fermé et borné car $S_n(\mathbb{R})$ est de dim finie.

Soit $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de C qui converge vers $S \in S_n(\mathbb{R})$.
On remarque que pour $x \in \mathbb{R}^n$ par Cauchy-Schwartz :

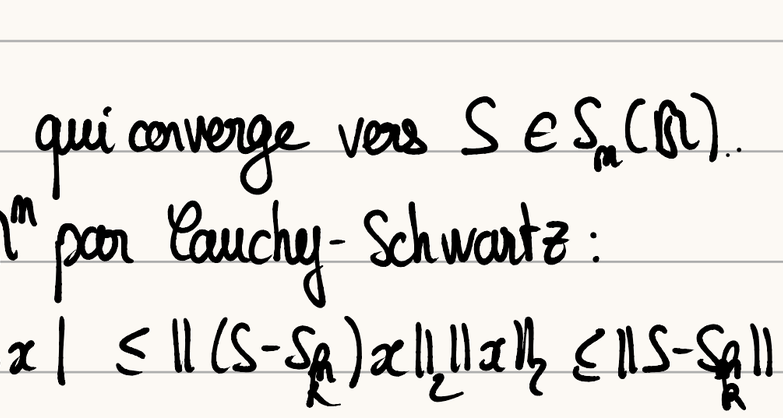
$$|{}^t x S_k x - {}^t x S x| \leq \|(S - S_k)x\|_2 \|x\|_2 \leq \|S - S_k\| \|x\|_2^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

En particulier pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\forall k$ ${}^t x S_k x \geqslant 0$ donc ${}^t x S x \geqslant 0$

$x \in K$, $\forall k$ ${}^t x S_k x \leq 1$ donc ${}^t x S x \leq 1$.

Ce qui donne directement que $S \in C$ donc C est fermé.

Soit $S \in C$ et q la forme quadratique associée.



Comme K est d'intérieur non vide il existe $a \in K$ et $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subseteq K \subseteq \mathcal{E}_q$ ($S \in C$).
Or $\mathcal{E}_q$ est symétrique par rapport à 0 donc il contient $\overline{B(-a,r)}$.

De plus on a vu que $\mathcal{E}_q$ est convexe donc $\overline{B(0,r)} \subset \mathcal{E}_q$ (car barycentre de $B(a,r)$ et $B(-a,r)$)

Or si on pose $\tilde{q} = \frac{\|\cdot\|_2^2}{r^2}$ alors $\mathcal{E}_{\tilde{q}} = \overline{B(0,r)} \subset \mathcal{E}_q$ donc

$$q \leq \tilde{q}.$$

Ainsi on a:

$$\|S\| = \sup_{\|x\|=1} (q(x)) \leq \sup_{\|x\|=1} \left(\frac{\|x\|_2^2}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2}$$

Donc C est bornée. Ainsi C est compact.

- Montrons que C est non vide. Pour cela comme K est compact, il existe $R>0$ tel que $K \subset \overline{B(0,R)}$.
Alors avec $S = \frac{1}{R^2} I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $K \subset \mathcal{E}_q$ où q est la forme quadratique associée à S.
donc $S \in C$.

Le déterminant étant une application continue sur C compact non vide, il existe un élément $S_m \in C$ maximisant le déterminant. De plus $S_m \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ car

$$\det(S_m) \geq \det\left(\frac{1}{M^2} I_n\right) > 0.$$

À S_m on lui associe donc son ellipsoïde qui sera de volume minimal.

Unicité :

- Montrons que C est convexe.
Soit S_1 et S_2 deux éléments de C et $\lambda \in]0,1[$.
Comme $S_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, $\lambda S_1 + (1-\lambda) S_2 \in S_n(\mathbb{R})$. Il reste pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in K$ on a:

$$\lambda {}^t x S_1 x + (1-\lambda) {}^t x S_2 x \geq 0 + 0 \geq 0 \Rightarrow \lambda S_1 + (1-\lambda) S_2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$\lambda {}^t y S_1 y + (1-\lambda) {}^t y S_2 y \leq \lambda + (1-\lambda) \leq 1$$

Donc $\lambda S_1 + (1-\lambda) S_2 \in C$ donc C est convexe.

(- On montre la concavité logarithmique du déterminant par le coef $\frac{1}{2}$ (engros).)

Soit $S_1, S_2 \in C$ distinct maximisant le déterminant.
Alors par convexité de C on a: $\frac{S_1 + S_2}{2} \in C$

On sait que S_1 et S_2 sont définies positives. Ainsi il existe une base orthonormale B_1 pour le ps associé à S_1 et orthogonale pour celui associé à S_2. Si on note P la matrice de passage de B_1 à la base canonique, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tq :

$$S_1 = {}^tPP \quad \text{et} \quad S_2 = {}^tPDP \text{ où } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

On a alors :

$$\det(S_1) = \det(P)^2 \quad \text{et} \quad \det(S_2) = \det(P)^2 \det(D)$$

Ce qui donne : $\det(S_1)^{\frac{1}{2}} \det(S_2)^{\frac{1}{2}} = \det(P)^2 \det(D)^{\frac{1}{2}}$

Or on a :

$$\frac{S_1+S_2}{2} = {}^tP\left(\frac{I_n+D}{2}\right)P$$

Donc $\det\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right) = \det(P)^2 \det\left(\frac{I_n+D}{2}\right) = \det(P)^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{1+\lambda_i}{2}$ ($\frac{1+\lambda_i}{2} > 0$).

Or on a : $\ln\left(\det\left(\frac{I_n+D}{2}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1+\lambda_i}{2}\right)$

$$> \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\ln(1) + \frac{1}{2}\ln(\lambda_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda_i)$$

(↓ stricte concavité du ln.)

$$= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(\det(D)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Ainsi $\det\left(\frac{I_n+D}{2}\right) > \det(D)^{\frac{1}{2}}$ et finalement :

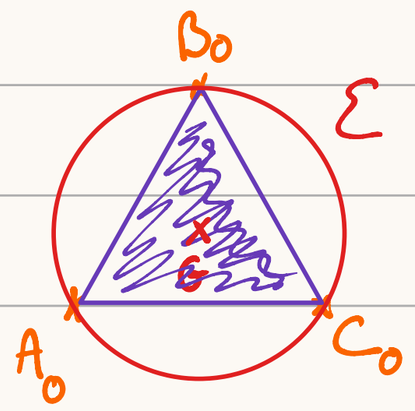
$$\det\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right) > \det(S_1)^{\frac{1}{2}}\det(S_2)^{\frac{1}{2}} = \max_{S \in \mathcal{C}} \{\det(S)\}.$$

Absurde

Cas particulier du triangle :

Soit (A,B,C) un triangle de $\mathbb{R}^2$. On note G l'isobarycentre de A, B et C et $\mathcal{E}$ le disque elliptique d'aire minimale contenant (A,B,C).

Cas 1 : (A,B,C) équilatéral.



Intuitivement il semble que le disque enveloppe convexe du cercle circonscrit au triangle soit un bon candidat à la fonction de disque elliptique d'air minimale contenant (A, B, C).

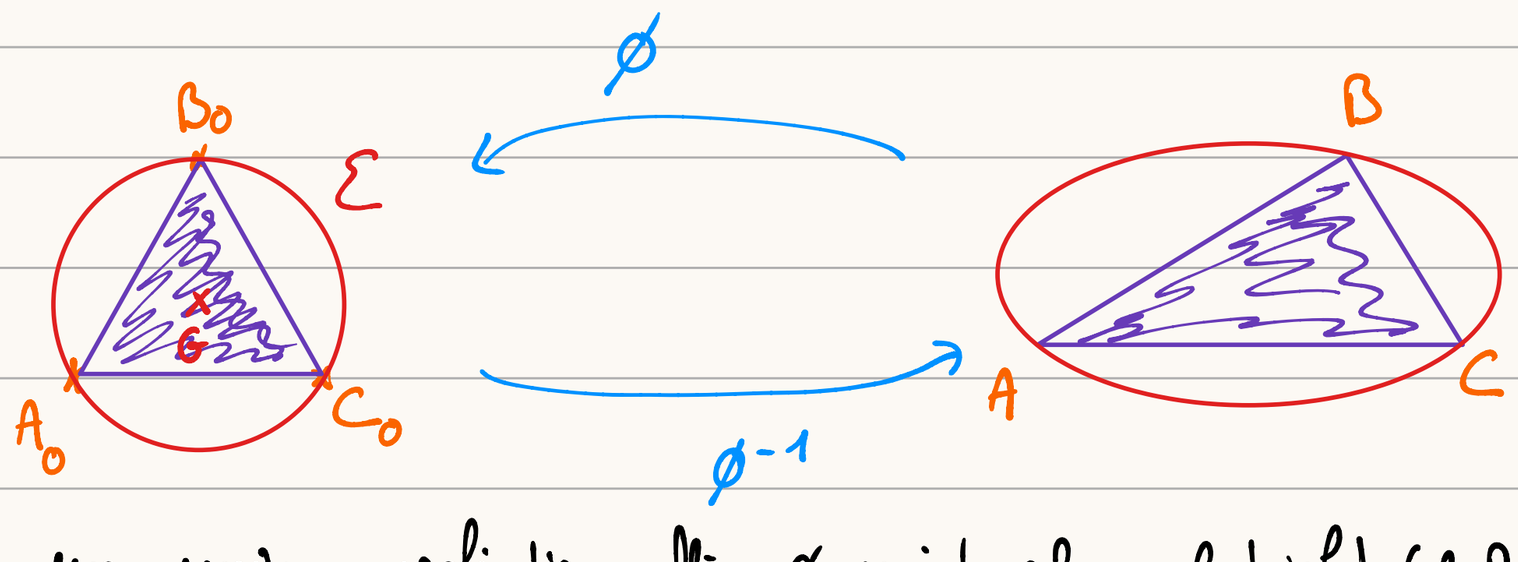
Comme le triangle (A, B, C) est invariant par les symétries orthogonales par rapport à ses médianes et que ces dernières conservent l'air, $\mathcal{E}$ est aussi invariant par ces symétries (sinon il n'y aurait pas qu'un seul disque elliptique d'air minimale contenant (A, B, C)) et donc admet leur intersection G comme centre.

Après l'orientation de $\mathbb{R}^2$, comme le triangle (A, B, C) est invariant par les rotations de centre G et d'angles de mesure $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$, $\mathcal{E}$ doit être invariant par ces deux rotations, ce qui exige que les axes de $\mathcal{E}$ aient même longueur. Donc $\mathcal{E}$ est un disque de centre G.

Il est alors clair, que parmi les disques de centre G, celui de frontière le cercle circonscrit est celui d'aire minimale.

Cas 2 : (A, B, C) est quelconque.

Soit (A_0, B_0, C_0) un triangle équilatéral. Notons G le centre du triangle et $\mathcal{E}$ le disque elliptique d'aire minimale contenant (A, B, C).



Il existe une unique application affine ϕ qui transforme le triplet (A, B, C) en (A_0, B_0, C_0). Cette dernière qui est bijective conserve les ellipses, comme elle multiplie les aires par la valeur absolue du déterminant de sa partie linéaire, nécessairement $\mathcal{E}$ est l'image par ϕ^{-1} de l'enveloppe convexe du cercle circonscrit à (A_0, B_0, C_0). C'est l'enveloppe convexe de l'unique ellipse de centre G qui passe par A, B et C.

Application :

Proposition :

Soit G un sous-groupe compact de $GL(\mathbb{R}^n)$. Il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, associé à une forme quadratique q tel que $G \subset O(q)$.

Preuve :

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme euclidienne $\|.\|$ et on note $B = \overline{B}(0,1)$.

On considère :

$$K = \{ g(x) \mid g \in G \text{ et } x \in B \} = \bigcup_{g \in G} g(B)$$

K est compact car c'est l'image par l'application continue $GL_n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ du compact $G \times B$.

$$g, x \longmapsto g(x)$$

De plus $B \subset K$ donc K est d'intérieure non vide.

On considère Σ_q l'unique ellipsoïde de volume minimale contenant K.

Pour tout $g \in G$, la forme quadratique q_g définie par $q_g(x) = q(g(x))$ est définie positive. De plus K étant stable par l'action de g, $g(K) = K$ donc

$$K \subseteq \Sigma_{q_g}.$$

Or $|\det g| = 1$ en effet g compact et $\forall p \in \mathbb{Z}$, $|\det(g^p)| = |\det(g)|^p$ est bornée

donc $|\det(g)| = 1$.

Ainsi Σ_q et Σ_{q_g} on même volume donc $\Sigma_q = \Sigma_{q_g}$ par unicité

donc $q = q_g$.

Par définition $g \in O(q)$ donc $G \subset O(q)$.

□

Rmq : Comme q est congruente à l'identité car définie positive donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que :

$${}^tPSP = I_{d}$$

Ainsi $G \hookrightarrow O(q) \xrightarrow[P]{} O_n(\mathbb{R})$ donc $P^{-1}GP \subset O_n(\mathbb{R})$.