Décomposition polaire + application

Réf: H2G2, Caldero-Germoni (Tome 1)

Plan:

I - Décomposition polaire + application au sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$

II - Calcul effectif avec la méthode de Newton

III: eacp: $S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéo

IV - Points extrémaux de la boule unité de $GL(E)$.

I - Décomposition polaire + application directe

On note: $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{ S \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tS = S \text{ et } \forall x \neq 0,\ {}^txSx \neq 0 \}$ (symétrique définie positive)

$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) = \{ H \in GL_n(\mathbb{R}) \mid H^* = H \text{ et } \forall x \neq 0,\ x^*Hx > 0 \}$ (Hermitiennes définies positives)

Prop: On peut faire agir naturellement $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ par.

$$GL_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$$
$$(g, S) \longmapsto gS{}^tg$$

alors $Stab(I_d) = \{ g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g \cdot I_d = I_d \} = \{ g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g\,{}^tg = I_d \} = O_n(\mathbb{R})$.

On a: $\varphi: GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Orb(I_d) = S_n^{++}(\mathbb{R})$ par Cholesky on a surjectivité.
$g \longmapsto g \cdot I_d = g\,{}^tg$

de plus $Ker(\varphi) = O_n(\mathbb{R})$ donc par passage au quotient.

$$GL_n(\mathbb{R})/O_n(\mathbb{R}) \simeq S_n^{++}(\mathbb{R})$$

Objectif: On veut un relèvement de cette propriété et voir l'analogue sur $\mathbb{C}$.

Théorème: Décomposition polaire. Idpt avec un corolleire.

La multiplication matricielle induit des homéomorphismes:

i) $\mu: O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} GL_n(\mathbb{R})$
$(O, S) \longmapsto OS$

ii) $\mu: U(n, \mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$
$(U, H) \longmapsto UH$.

Preuve:

i) μ est bien définie car $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

- μ surjective:

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

En effet, ${}^tMM \in S_n(\mathbb{R})$

et $\forall x \neq 0$, ${}^tx\,{}^tMMx = {}^t(Mx)(Mx) = \|Mx\|^2 > 0$

Ainsi ${}^tMM$ est diagonalisable dans une base orthonormée:

$${}^tMM = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } \lambda_i > 0,\ P \in O_n(\mathbb{R}).$$

On prend une racine carré i.e on pose $S = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\,P^{-1}$.

Or P est orthogonale donc S est symétrique de plus elle est définie positive car $\sqrt{\lambda_i} > 0$.

Et:

$S^2 = {}^tMM$ et avec $O = MS^{-1}$ il vient

${}^tOO = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}SSS^{-1} = Id$ donc $O \in O_n(\mathbb{R})$.

Donc on a: $OS = M$.

- μ injective:

On suppose que l'on ait $M = OS = O'S'$, avec OS déjà construit.

Ainsi

$$S'^2 = {}^tS'\,{}^tO'\,O'S' = {}^tMM = {}^tS\,{}^tOOS = S^2$$

Par interpolation de Lagrange soit φ un polynôme tel que pour tout i, $\varphi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ alors:

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = \varphi\left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}\right) = \varphi(S^2) = \varphi(S'^2)$$

Or S' commute avec $\varphi(S'^2)$ donc avec S. Or S et S' sont diagonalisables donc elles sont codiagonalisable

Ainsi il existe $P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ tq:

$$S' = P_0 \begin{pmatrix} \mu_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n' \end{pmatrix} P_0^{-1} \quad \text{et } S = P_0 \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P_0^{-1}$$

Avec $\mu_i, \mu_i' > 0$.

Ainsi $S'^2 = S^2 \iff \mathrm{diag}(\mu_1'^2, \dots, \mu_n'^2) = \mathrm{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) \iff \mu_i' = \mu_i \iff S = S'$

car positif

Donc $O=O'$ d'où l'unicité.

- μ^{-1} est continue:

On le montre séquentiellement. Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M.

On note $(O_p, S_p) = \mu^{-1}(M_p)$.

$(O, S) = \mu^{-1}(M)$.

On utilise que $O_n(\mathbb{R})$ est compact ainsi soit O' une valeur d'adhérence et φ une extractrice i.e $O_{\varphi(p)} \longrightarrow O' \in O_n(\mathbb{R})$

Donc:

$$S_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)}^{-1} M \xrightarrow[p\to+\infty]{} O'^{-1} M =: S' \in \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} \text{ limite}$$

$\in GL_n(\mathbb{R})$ car $O' \in GL_n(\mathbb{R})$, $M \in GL_n(\mathbb{R})$

Et $S' \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{S^{++}(\mathbb{R})} \subset GL_n(\mathbb{R}) \cap S^{+}(\mathbb{R}) = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

car fermé

Ainsi $M = O'S' = OS$ donc $O' = O$ et $S' = S$.

On a unicité des valeurs d'adhérence i.e la suite converge O_p converge vers O et S_p vers S, donc:

$$\mu^{-1}(M_p) \longrightarrow \mu(M).$$

CQFD

Rmq: Dans la preuve on montre pour $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, l'existence et l'unicité d'une racine carré $\sqrt{S} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
i.e $\sqrt{S}^2 = S$.

Rmq: On peut étendre cette décomposition à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Réf: Rombaldi

Corollaire:

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire $A = OS$ où O est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive.

Preuve: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(G_p)_{p\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $G_p \longrightarrow A$.

On note $G_p = O_p S_p$ par compacité de $O_n(\mathbb{R})$ quitte à considérer une sous suite, $O_p \longrightarrow O \in O_n(\mathbb{R})$

Donc $S_p \longrightarrow A O^{-1} =: S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ car fermé et $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^{+}(\mathbb{R})$.

Ainsi $A = OS$, $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$.

CQFD

Rmq: Pas unicité $O = -\Omega O \quad \forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

Application : Rayon spectrale.

Corollaire : Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)} = \sqrt{\|{}^tAA\|}$$

où ρ est le rayon spectrale donné par :

$$\rho(M) = \max_{1 \le i \le m} \{|\lambda_i| : \lambda_i \in Spec(A)\}$$

Preuve :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $A = OS$ or $O \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\|OSx\|_2 = \|Sx\|_2 \quad \forall x$.

Ainsi $\|A\|_2 = \|S\|_2$. positive

Or S symétrique reelle donc diagonalisable dans une base $(e_1, \dots, e_m)$ orthonormé avec $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$

Soit $x = \sum_i x_i e_i$ alors

$$\|Sx\|_2^2 = \|\sum_i \lambda_i x_i e_i\|_2^2 = \sum_i |\lambda_i|^2 \|x_i\|^2 \leq \lambda_1^2 \|x\|_2^2$$

donc $\|S\|_2 \leq \lambda_1 = \rho(S)$.

La borne étant atteinte pour e_1 on a : $\|S\|_2 = \lambda_1$, ainsi :

$$\|A\|_2 = \rho(S) = \sqrt{\lambda_1^2} = \sqrt{\rho(S^2)} = \sqrt{\rho({}^tAA)}$$

car $S^2 = {}^tAA$, A pos sym

$$\rho({}^tAA) = \|{}^tAA\| \text{ d'où } \|A\|_2 = \sqrt{\|{}^tAA\|}.$$

□

Application : Maximalité de $O_n(\mathbb{R})$.

Corollaire : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset G$ alors $O_n(\mathbb{R}) = G$.

Preuve :

Soit $g \in G$ on peut écrire $g = OS$ or $O_n(\mathbb{R}) \subset G$ donc $S = O^{-1}g \in G$.

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^k \in G$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les vp de S on sait que :

$$\|S\|_2 = \rho(S) = \lambda_1 \quad \text{(quitte à permuter)}$$

Si $\lambda_1 > 1$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|S^k\|_2 = \lambda_1^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$ absurde G bornée.

Si $\lambda_n < 1$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|S^{-k}\|_2 = \lambda_n^{-k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ absurde.

Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$, ainsi $S = id$ donc $q = 0 \in O_n(\mathbb{R})$

IV- Calcul par la méthode de Newton

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ on cherche le zéro de $f : A \mapsto {}^tAA - id$ le plus "proche" de M i.e avec newton en partant de M.

$M_{k+1} = M_k - \frac{f(M_k)}{f'(M_k)}$ où $f = {}^tM_kM_k - Id$

$= M_k - \frac{1}{2}{}^tM_k^{-2}({}^tM_kM_k - Id)$

$= M_k - \frac{1}{2}M_k + \frac{1}{2}{}^tM_k^{-1}$

$= \frac{1}{2}(M_k + {}^tM_k^{-1}) = \frac{1}{2}M_k(Id + ({}^tM_kM_k)^{-1})$.

$df(M_k).H = {}^tHM_k + {}^tM_kH$ $\Big\|$ $H = \frac{1}{2}(M\,{}^tM)^{-1}Y = {}^tP^{-1}P^{-1}Y$

$= \frac{1}{2}({}^tY P^{-1}M + {}^tP{}^tP^{-1}Y) = Y$.

$H = \frac{1}{2}{}^tP^{-1}Y = (df(M)^{-1})_0 Y$.

$df : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$

Alors la suite converge vers la décomposition polaire plus précisément.

Proposition :

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ alors la suite définie par $\begin{cases} M_0 = M \\ M_{k+1} = \frac{1}{2}M_k(I_n + ({}^tM_kM_k)^{-1}) \end{cases}$) pk inclure dans un dvpt

converge vers $O \in O_n(\mathbb{R})$ où $M = OS$.

La suite $({}^tM_kM)_k$ converge alors vers S.

Preuve :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $M_k \in GL_n(\mathbb{R})$: Par récurrence.

Si $k = 0$, ok

Si $k \geq 1$, avec $M_{k-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tM_{k-1}M_{k-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Donc les vp de $I_n + ({}^t M_{k-1} M_{k-1})^{-1}$ sont strictement positives donc $\in GL_n(\mathbb{R})$

et $M_{k-1} \in GL_n(\mathbb{R})$

donc $M_{k+1} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Ainsi pour tout k on peut écrire, $M_k = O_k S_k$ (décomposition polaire).
Or on sait que $S_k^2 = {}^t M_k M_k$ donc

$$O_{k+1} S_{k+1} = \frac{1}{2} O_k S_k \left(\mathrm{Id} + S_k^{-2}\right) = O_k \left(\frac{S_k + S_k^{-1}}{2}\right).$$

Or $\frac{S_k + S_k^{-1}}{2}$ symétrique donc par unicité
$$\begin{cases} O_{k+1} = O_k \\ S_{k+1} = \frac{S_k + S_k^{-1}}{2}. \end{cases}$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S_0 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^0 \end{pmatrix} P^{-1}$ alors par récurrence $\forall k$ S_k diagonalisable avec P.
Soit $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ ses vp on a:

$$\lambda_i^{k+1} = \frac{\lambda_i^k + \lambda_i^{k-1}}{2}$$

Donc par récurrence $\lambda_i^{k+1} \geq 1$ et décroissante ainsi cv vers λ et $\lambda = \frac{\lambda + \frac{1}{\lambda}}{2}$ donc $\lambda = 1$
Ainsi

$$S_k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{Id}.$$

Donc $M_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} O$ d'où le résultat.

et ${}^t M_k M \longrightarrow {}^t O S = S$.

∎

III - Surjectivité de l'exponentielle

Proposition :

i) L'application exp : $S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.) dvpt

ii) L'application exp : $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{U}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Preuve:

i) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $S = P\,\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\exp(S) = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_i})P^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ car } P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } e^{\lambda_i} > 0.$$

Donc $\exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ et exp est continue.

Surjectivité :

Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $B = P\,\mathrm{diag}(\mu_i)P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(\exp(\ln \mu_i))P^{-1} = \exp(P\,\mathrm{diag}(\ln \mu_i)P^{-1})$

et $S = P\,\mathrm{diag}(\ln \mu_i)P^{-1} \in S_n(\mathbb{R})$ car $P \in O_n(\mathbb{R})$. $\hookrightarrow \mu_i > 0$.

Injectivité :

Soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $\exp(A) = \exp(A')$

Soit $A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}$ et Q un polynôme interpolateur de Lagrange tq $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$.

Alors

$$0 = [A', Q(\exp(A'))] = [A', Q(\exp(A))] = [A', A].$$

Donc A' et A commute donc co-diagonalisable donc $A' = P(\mu_1, \mu_n)P^{-1}$ quitte à changer P.

Et donc

$$\forall i,\ e^{\lambda_i} = e^{\mu_i} \Rightarrow \forall i\ \lambda_i = \mu_i \Rightarrow A' = A.$$

Continuité inverse :

Soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} = (\exp(A_p))_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $B_p \to B = \exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrons que $A_p \to A$.

Par convergence, (B_p) est bornée par $\|.\|_2^{\vee}$. De plus B_p, B inversible donc par continuité $B_p^{-1} \to B^{-1}$.

Ainsi (B_p^{-1}) est bornée pour $\|.\|_2$ par $M_2 > 0$ par $M_1 > 0$.

Or

$$\|B_p\|_2 = \sqrt{\rho({}^tB_pB_p)} = \sqrt{\rho(B_p^2)} = \rho(B_p)$$

Ainsi $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{Spec}(B_p) \subset]0, M_1]$.

De plus $B_p^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, en effet, $({}^tB_p)^{-1} = {}^t(B_p^{-1})$, de plus si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathrm{Spec}(B_p)$ avec $\lambda_i > 0$

alors $(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}) = \mathrm{Spec}(B_p^{-1})$ donc $\frac{1}{\lambda_i} > 0$

Or $\|B_p^{-1}\|_\ell \leq M_\ell$ on a aussi $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} Spec(B_p) \subset]0, \frac{1}{M_\ell}]$ avec $M_\ell > 0$.

Ce qui donne $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} Spec(B_p) \subset [\frac{1}{M_\ell}, M_1]$

Or si $B_p = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ on a $A_p = P^{-1} \begin{pmatrix} \ln(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \ln(\lambda_n) \end{pmatrix} P$ par injectivité.

Donc $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} Spec(A_p) \subset [\ln(\frac{1}{n_\ell}), \ln(M_1)]$, ainsi $(\rho(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $(\|A_p\|)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Donc la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour $\|.\|_\ell$. Ainsi elle possède au moins une valeur d'adhérence.
Soit A' une valeur d'adhérence et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice tq : $A_{\varphi(p)} \longrightarrow A'$
Alors par continuité: $\exp(A_{\varphi(p)}) \longrightarrow \exp(A')$
$\|$
$B_{\varphi(p)} \longrightarrow B = \exp(A)$.
Par unicité de la lim et injectivité de exp sur $S_n(\mathbb{R})$ on a $A = A'$.
Ainsi la suite converge (unique valeur d'adhérence) donc :

$$A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$$

Corollaire: On a des homéomorphismes :

$$GL_n(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

Rmq: $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ → surjective Dunford multiplicatif.
→ pas injective car pas endim 1.

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ → pas surjective $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ car $e^\lambda = -1$ et $e^\mu = -2$ mais $\lambda \neq \mu$.
$Im(\exp) = \{A^2 \mid A \in GL_n(\mathbb{R})\}$ → pas injective si $n \geq 2$ $\exp \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = I_2$.

IV - Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: Oraux Algèbre 3 p130 (et p320)

Définition : Point extrémaux.
Soit C un convexe, $x \in C$ est un point extrémale si $C \setminus \{x\}$ est convexe

Lemme: Soit C convexe, $x \in C$ est point extrémaux si et seulement si il ne peut s'écrire comme le milieu de deux points distincts de C.

Preuve: $\Rightarrow$: Par l'absurde si $x = \frac{z_1+z_2}{2}$ avec $z_1, z_2 \in C\setminus\{x\}$
Alors x extrémal implique $C\setminus\{x\}$ est convexe i.e $x = \frac{z_1+z_2}{2} \in C\setminus\{x\}$ Absurde.
$\Leftarrow$: Si $x = \frac{z_1+z_2}{2}$ alors $C\setminus\{x\}$ non convexe donc x pas un point extrémaux.

Théorème:

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien et $B = \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{E}), \|u\| \leq 1\}$. Alors les points extrémaux de B sont exactement les éléments de $O(\mathbb{E})$.

Preuve:

Etape 1: Soit $u \in O(\mathbb{E})$ alors u est extrémal.
On sait que $u \in B$ car $\|u\| = 1$, ainsi par l'absurde supposons qu'il existe $v, w \in B$ tel que: $u = \frac{v+w}{2}$ et $v \neq w$.
Or on a pour $x \in \mathbb{E}$ unitaire i.e $\|x\| = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \|x\| = \|u(x)\| &= \frac{1}{2}\|v(x) + w(x)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|v(x)\| + \frac{1}{2}\|w(x)\| && \text{↙ inégalité triangulaire} \\ &\leq \frac{1}{2}\|v\| + \frac{1}{2}\|w\| && \text{↙ définition de la norme ①} \\ &\leq 1. && \text{↙ } \|u\| \leq 1 \text{ et } \|w\| \leq 1. \text{ ②} \end{aligned}$$

Ainsi toutes les inégalités sont des égalités.
Les inégalités nous donnent, $\|v(x)\| = \|v\|$ ① et $\|v\| = 1$ ②.
$\|w(x)\| = \|w\|$ $\|w\| = 1$.
De plus le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire (car norme issus d'un p.s) nous donne:

$$v(x) = \lambda w(x) \quad \text{avec} \quad \lambda > 0 \text{ car } v(x) \neq 0 \text{ et } w(x) \neq 0$$

or $\|v(x)\| = 1$ et $\|w(x)\| = 1$ donc $v(x) = w(x)$ $\forall x, \|x\| = 1$
donc par linéarité $v = w$. Absurde
u est un point extrémale.

Etape 2: Soit $u \in B$ tq $u \notin O(\mathbb{E})$, montrons que u n'est pas extrémale.

On raisonne matriciellement, pour cela on fixe une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ et on pose A la matrice de u dans cette base.

On utilise la décomposition polaire donc A s'écrit $A = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

De plus il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $d_1 \leq \dots \leq d_n$ tq :

$$S = {}^tPDP. \quad \text{(Théorème spectrale)}$$

Comme $\|S\| = \|A\| \leq 1$ $(\|O\| = 1)$ on a : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $d_k \in [0, 1]$.

Et $A \notin O(\mathbb{R})$ donc $d_1 < 1$ ainsi on peut écrire

$$d_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{avec} \quad -1 \leq \alpha < \beta \leq 1 \quad (d_1 \text{ pas point extrémal de } [-1, 1])$$

On pose donc $D_1 = \text{diag}(\alpha, d_2, \dots, d_n)$ et $D_2 = \text{diag}(\beta, d_2, \dots, d_n)$, ainsi $D_1 \neq D_2$

et on a : $\|D_1\| \leq 1$ $\quad$ $\|D_2\| \leq 1$.

$$D = \frac{1}{2}(D_1 + D_2) \text{ donc } A = \frac{1}{2}(O\,{}^tPD_1P + O\,{}^tPD_2P).$$

Il nous reste à montrer que $A_1 = O\,{}^tPD_1P$ et $A_2 = O\,{}^tPD_2P \in B$.

Or on a :

$$\|A_1 x\| = \|O\,{}^tPD_1Px\| = \|{}^tPD_1Px\| = \|D_1Px\| \leq \|D_1\|\|Px\| = \|D_1\|\|x\|$$

d'où $\|A_1\| \leq 1$ de même $\|A_2\| \leq 1$.

En passant aux endomorphismes on a $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$ avec $u_1, u_2 \in B$ et $u_1 \neq u_2$.

u n'est pas extrémal.

□

Rmq : Selon le théorème de Krein-Milman (ou Minkowski), la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ est donc l'enveloppe convexe de $O(E)$.