Courant - Fischer et continuité des vp

Site de Matthias Hostein

Réf: X-ENS, Algèbre 3 p. 142 (Théorème des min-max).

On considère $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien.

Définition: Soit u en endomorphisme de E, on définit le quotient de Rayleigh-Ritz:

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad R_u(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$$

Théorème de Courant - Fischer:

Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E. On note ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant, $\lambda_1(u) \leq \dots \leq \lambda_n(u)$. Alors pour $k \in [\![1, n]\!]$, en notant $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k, on a:

$$\lambda_k(u) = \min_{f \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in f \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \right) = \max_{f \in \mathcal{F}_{n-k+1}} \left(\min_{x \in f \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \right).$$

On application on en déduira le continuité des valeurs propres.

Corollaire: Inégalité de perturbation de Weyl

Soient u et v sont deux endomorphismes auto-adjoints de E, alors:

$$\lambda_k(u) + \lambda_1(v) \leq \lambda_k(u+v) \leq \lambda_k(u) + \lambda_n(v).$$

En particulier, on a:

$$|\lambda_k(u+v) - \lambda_k(u)| \leq \|v\|$$

Ainsi les applications:

$$\lambda_k : \mathcal{S}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \lambda_k(u)$$

sont 1-lipschitziennes, donc continues.

Preuve du théorème:

On remarque que pour $k \in [\![1, n]\!]$ et pour $f \in \mathcal{F}_k$ alors:

$$\forall x \in f \setminus \{x\}, \ R_u(x) = \left\langle u\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \geq R_u\left(\frac{u}{\|x\|}\right)$$

Ainsi on a: $$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} R_u(x) = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} R_u(x) = \max_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} R_u(x)$$

$\downarrow$

car $S_E(0,1)$ compact.

De même pour le min donc les quantités:

$$\max_{x\in E\setminus\{0\}} R_u(x) \text{ et } \min_{x\in E\setminus\{0\}} R_u(x)$$

sont bien définies et finies.

À partir de là on note pour $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\mu_k^-(u) = \inf_{F\in\mathcal{F}_k}\left(\max_{x\in F\setminus\{0\}} R_u(x)\right) \quad \text{et} \quad \mu_k^+(u) = \sup_{F\in\mathcal{F}_{n-k+1}}\left(\min_{x\in F\setminus\{0\}} R_u(x)\right).$$

On sait que u est auto-adjoint, il existe une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de diagonalisation de u où e_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

On note alors l'espace vectoriel,

$$E_k = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \in \mathcal{F}_k.$$

Soit $x\in E_k\setminus\{0\}$ alors on peut écrire,

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$$

Et on a alors:

$$\langle u(x),x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(u)\alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{k}\alpha_j e_j\right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(u)|\alpha_i|^2 \quad \text{or } \lambda_i(u)\le\lambda_k(u)$$

$$\le \lambda_k(u)\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|^2 = \lambda_k(u)\|x\|^2$$

Ainsi on a que $\max_{x\in E_k\setminus\{0\}} R_u(x) \le \lambda_k(u)$.

Or $e_k\in E_k\setminus\{0\}$ et on a: $R_u(e_k)=\lambda_k(u)$ ainsi $\max_{x\in E_k\setminus\{0\}} R_u(x) = \lambda_k(u)$.

De même avec $F_k = \mathrm{Vect}(e_k,\dots,e_n)\in\mathcal{F}_{n-k+1}$ on a pour tout $x\in F_k\setminus\{0\}$:

$$R_u(x)\ge\lambda_k(u) \quad \text{et } R_u(e_k)=\lambda_k(u) \quad (e_k\in F_k).$$

Ainsi:

$$\max_{x\in E_k\setminus\{0\}} R_u(x) = \lambda_k(u) = \min_{x\in F_k\setminus\{0\}} R_u(x).$$

Ce qui donne l'encadrement suivant :

$$\mu_k^-(u) \leq \lambda_k(u) \leq \mu_k^+(u)$$

On prend maintenant $V \in \mathcal{F}_{n-k+1}$, puisque E_k est de dimension k et que $n+1-k+k = n+1 > n$, $E_k \cap V \neq \{0\}$. Soit $y \in E_k \cap V \setminus \{0\}$ alors :

$$\min_{x \in V \setminus \{0\}} R_u(x) \leq R_u(y) \leq \max_{x \in E_k \setminus \{0\}} R_u(x) = \lambda_k(u)$$

Ce qui nous donne que : $\forall V \in \mathcal{F}_{n-k+1}$, $\min_{x \in V \setminus \{0\}} R_u(x) \leq \lambda_k(u)$.
Ainsi :

$$\mu_k^+(u) \leq \lambda_k(u).$$

De même avec $W \in \widetilde{\mathcal{F}}_k$ et $y \in W \cap F_k \setminus \{0\}$ on a :

$$\lambda_k(u) = \min_{x \in F_k \setminus \{0\}} R_u(x) \leq R_u(y) \leq \max_{x \in W \setminus \{0\}} R_u(x)$$

Ce qui donne : $\mu_k^-(u) \geq \lambda_k(u)$.

On a donc montré que $\mu_k^+(u) = \lambda_k(u) = \mu_k^-(u)$.
Or $E_k \in \mathcal{F}_k$ et $F_k \in \mathcal{F}_{n-k+1}$ ainsi l'inf (respec sup) est un min (respec max) donc on a bien :

$$\lambda_k(u) = \min_{f \in \mathcal{F}_k} \left(\max_{x \in f \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \right) = \max_{f \in \widetilde{\mathcal{F}}_{n-k+1}} \left(\min_{x \in f \setminus \{0\}} \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \right).$$

□

Preuve du corollaire :

Par linéarité de R est clair que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \; R_{u+v}(x) = R_u(x) + R_v(x)$$

et $$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \; \lambda_1(v) \leq R_v(x) \leq \lambda_n(v)$$

Ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \; \lambda_1(v) + R_u(x) \leq R_{u+v}(x) \leq R_u(x) + \lambda_n(v).$$

En particulier c'est vrai pour tout k et $x \in F \subset \mathcal{F}_k$ ainsi en passant au max puis à l'inf on appliquant le théorème de Courant-Fischer on obtient :

$$\lambda_1(v) + \lambda_k(u) \leq \lambda_k(u+v) \leq \lambda_k(u) + \lambda_n(v).$$

Or on sait que $|\lambda_i(v)| \leq \rho(v)$ donc

$$|\lambda_k(u+v) - \lambda_k(u)| \leq \rho(v).$$

Or v est auto-adjoints donc $\rho(v) = \|v\|$ d'où le résultat :

$$|\lambda_k(u+v) - \lambda_k(u)| \leq \|v\|.$$

∎

Lemme : Soit v normal alors $\rho(v) = \|v\|$.

Preuve : On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vp de v alors on a :

$$\|v(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 |\alpha_i|^2 \leq \rho(v)^2 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = \rho(v)^2 \|x\|.$$

Ainsi $\frac{\|v(x)\|}{\|x\|} \leq \rho(v)$ $(\forall x)$ donc $\|v\| \leq \rho(v)$.

Or soit $i \in [\![1, n]\!]$ tq $|\lambda_i| = \rho(v)$ alors $\|v(e_i)\| = |\lambda_i| \|e_i\| = \rho(v) \|e_i\|$.

Ainsi $\|v\| \geq \rho(v)$ d'où le résultat.

∎