Continuité des racines + Disques de Gershgorin topologique.

Réf: Caldero, Carnet de Voyage en Algèbre p. 52.

Théorème : Continuité des valeurs propres.

Soit $(P_k)_{k\geq 0}$ une suite de polynômes unitaire de $\mathbb{C}_n[X]$ de degré n fixé qui tend vers P (pour la topologie normé de $\mathbb{C}_d[X]$). On note $\lambda_{k,i}$ $(1\leq i\leq n)$, resp. λ_i, les racines comptées avec multiplicité de P_k resp. P

Alors pour tout k il existe $\sigma_k \in \mathfrak{S}_n$ tel que:

$$\lambda_{k,\sigma_k(i)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_i.$$

Corollaire: Soit $(A_k)_k$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui tend vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si on note $(\lambda_{k,i})$ resp (λ_i), les vp de A_k, resp. A, alors pour tout $k\in\mathbb{N}$ il existe $\sigma_k \in \mathfrak{S}_n$ tel que:

$$\lambda_{k,\sigma_k(i)} \longrightarrow \lambda_i.$$

Théorème: Disques de Gershgorin topologique.

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq m}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour $i\in[\![1,n]\!]$, $D_i(A) = \overline{D}\left(a_{ii}, \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right)$ (Disques de Gershgorin) et:

$$D(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A).$$

On écrit $D(A) = \bigcup_{j=1}^{d} C_j$ la décomposition en composantes connexes de $D(A)$ et on note pour $j\in[\![1,d]\!]$, n_j le nombre de disques de Gershgorin $D_i(A)$ inclus dans C_j alors il existe exactement n_j valeurs propres de A dans C_j.

Preuve du théorème de continuité des racines:

On va raisonner sur le degré n.

Si $n=1$: Alors $P_k = X-\lambda_{k,1}$ et $P = X-\lambda_1$ donc $\lambda_{k,1} \longrightarrow \lambda_1$.

Si $n\geq 2$: On suppose le résultat pour toute suite de polynome unitaires de degré $n-1$.

Pour tout k on note $i_k \in [\![1,n]\!]$ tel que $|\lambda_1 - \lambda_{k,i_k}|$ est minimal on a alors.

$$0 \leq |\lambda_1 - \lambda_{k,i_k}|^n \leq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_1 - \lambda_{k,i}| = |P_k(\lambda_1)|$$

or $|P_k(\lambda_1)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} |P(\lambda_1)| = 0$ donc $\lambda_{k,i_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_1$.

On note Q_k, resp. Q, le polynôme tel que $P_k = (X - \lambda_{k,i_k}) Q_k$
$P = (X - \lambda_1) Q$

Montrons que $Q_k \longrightarrow Q$:

On note $a_{k,m}$ le coeff en x^m de P_k. et $a_{k,-1} = a_{-1} = b_{k,-1} = b_{-1} = 0$.

a_m ——— P

$b_{k,m}$ ——— Q_k

b_m ——— Q.

On sait que $P_k = (X - \lambda_{k,i_k}) Q_k$ donc

$$a_{k,m} = b_{k,m-1} - \lambda_{k,i_k} b_{k,m}$$

On a donc le système :

$$\begin{cases} b_{k,n} = 0 & (Q_k \text{ de degré } n-1) \\ b_{k,n-1} = 1 + \lambda_{k,i_k} b_{k,n} = 1 & (a_{k,n} = 1) \\ b_{k,n-2} = a_{k,n-1} + \lambda_{k,i_k} b_{k,n-1} \\ \vdots \\ b_{k,0} = a_{k,1} + \lambda_{k,i_k} b_{k,1} \end{cases}$$

Ainsi par récurrence descendante :

$$b_{k,m} = a_{k,m+1} + a_{k,m+2} \lambda_{k,i_k} + a_{k,m+3} \lambda_{k,i_k}^2 + \dots + a_{k,n-1} \lambda_{k,i_k}^{n-m-2} + \lambda_{k,i_k}^{n-m-1}$$

De même on a :

$$b_m = a_{m+1} + a_{m+2} \lambda_1 + a_{m+3} \lambda_1^2 + \dots + a_{n-1} \lambda_1^{n-m-2} + \lambda_1^{n-m-1}$$

Or on sait que $\lambda_{k,i_k} \longrightarrow \lambda_1$ donc $b_{k,m} \longrightarrow b_m$ i.e $Q_k \longrightarrow Q$.
$a_{k,m} \longrightarrow a_m$

Ainsi $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynomes unitaires de degré $n-1$ qui converge vers Q, par hypothèse de récurrence, comme les racines de Q_k, resp Q, étant celle de P_k, resp P, privé de λ_{k,i_k}, il existe σ_k une bijection de $[\![1, n]\!] \setminus \{1\}$ dans $[\![1, n]\!] \setminus \{i_k\}$ tq :

$$\forall j \in [\![2, n]\!], \lambda_{k,\sigma_k^{-1}(j)} \longrightarrow \lambda_j$$

On notant σ_k la permutation telle que : $\sigma_k(1) = i_k$.

$$\forall j \in [\![2, n]\!], \quad \sigma_k(j) = \sigma'(j)$$

On a le résultat voulue.

□

Preuve du corollaire :

On utilise simplement que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, χ_A est un polynôme unitaire de degré n dont les racines sont les vp de A et que l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}_n[X]$ est continue car polynômiale en les coordonnées de A.

$$A \longmapsto \chi_A$$

□

Preuve des disques de Gershgorin topologique : Montrer qu'il y a un nbre fini de composantes connexes

On considère la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ et on note $B = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

On regarde le chemin continue :

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$t \longmapsto (a_{ij}(t))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

avec si $i \neq j$, $a_{ij}(t) = t a_{ij}$

et $a_{ii}(t) = a_{ii}$

Ainsi $\gamma(0) = B$ et $\gamma(1) = A$. Et on note $\lambda_1(t) \le \dots \le \lambda_n(t)$ les valeurs propres de $\gamma(t)$

$\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$ les vp de A

De plus pour $i \in [\![1, n]\!]$, $D_i(\gamma(t)) = \overline{B\left(a_{ii}, t \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right)} \subseteq \overline{B\left(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right)} = D_i(A)$ En particulier on a : ↳ $0 \le t \le 1$.

$$D(\gamma(t)) \subseteq D(A).$$

On fixe $j \in [\![1, d]\!]$.

On note I l'ensemble des éléments de $t \in [0,1]$ tels qu'il existe exactement n_j valeurs propres de $\gamma(t)$ dans C_j.

Montrons que $I_j = [0,1]$.

L'ensemble I contient 0, puisque les valeurs propres de $B = \gamma(0)$ sont les a_{ii} centres des disques $D_i(A)$.

Ainsi il existe bien n_j éléments i tels que $a_{ii} \in C_j$ donc I_j non vide.

I est fermé :

En effet soit $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de I telle que $t_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} t_0$ alors $\gamma(t_k) \longrightarrow \gamma(t_0)$ (car γ continue).

Ainsi par le corollaire pour tout k il existe σ_k tel que :

$$\lambda_{\sigma_k(i)}(t_k) \longrightarrow \lambda_i(t_0)$$

De plus on note :

$$I_j = \{ i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_j(t_0) \in C_j \} \text{ et } m_j = \#I_j$$

Alors pour tout $i \in I_j$, on a :

$$\lambda_{\sigma_k(i)}(t_k) \longrightarrow \lambda_i(t_0) \in C_j$$

Or C_j est ouvert donc à partir d'un certain rang k_i on a :

(Si nbre fini de c.c) $\quad \forall k \geq k_i,\ \lambda_{\sigma_k(i)}(t_k) \in C_j$.

Ainsi en notant $K = \max_j \left(\max_{i\in I_j} k_i \right)$:

$$\forall k \geq K, \forall i \in I_j,\ \lambda_{\sigma_k(i)}(t_k) \in C_j.$$

Donc pour $k \geq K$, $\gamma(t_k)$ possède au minimum m_j up dans C_j mais $t_k \in I_j$ donc

$$m_j \leq m_j.$$

Or ceci étant vrai pour tout j et $\sum_{j=1}^{d} m_j = \sum_{j=1}^{d} m_j = n$ on a donc

$$m_j = m_j$$

Ainsi $t_0 \in I$ d'où le résultat.

I est ouvert : Par l'absurde, il existe donc $t_0 \in \mathbb{I}$,

et $t_k \in [0,1] \setminus I$ tel que $t_k \longrightarrow t_0$, ainsi on a :

$$\gamma(t_k) \longrightarrow \gamma(t_0).$$

Et il existe σ_k tel que : $\lambda_{\sigma_k(i)}(t_k) \longrightarrow \lambda_i(t_0)$

Or par le même argument il existe K tel que $\forall k \geq K.\ \forall j \in [\![1,d]\!]$, $\gamma(t_k)$ possède au minimum m_j valeurs propres dans C_j en notant m_{k_j} le nb de vp de $\gamma(t_k)$ dans C_j on a :

$$m_{k_j} \geq m_j \quad \text{et} \quad n = \sum_{j=1}^{d} m_{k_j} = \sum_{j=1}^{d} m_j.$$

Ainsi comme précédemment $\gamma(t_k)$ en possède exactement m_j donc $\forall k \geq K$, $t_k \in \mathbb{I}$, Absurde.

Conclusion : $\mathbb{I}$ est une partie connexe de $[0,1]$ donc $\mathbb{I} = [0,1]$

donc $1 \in \mathbb{I}$ $\Rightarrow$ résultat.

□

Compléments sur les composantes connexes de $\mathcal{D}(A)$.

Proposition :

Pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ il existe $I_j \subseteq [\![1, m]\!]$ tel que :

$$C_j = \bigcup_{i \in I_j} \mathcal{D}_i(A).$$

Preuve : Il suffit de montrer qu'il y a un nombre fini de composante connexe.

Soit $\mathcal{C}.\mathcal{C}$ = {ensemble des composantes connexes}.

Soit $C \in \mathcal{C}.\mathcal{C}$ et $a \in C$ alors $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tq $a \in \mathcal{D}_i(A)$ → connexe

donc $\mathcal{D}_i(A) \subseteq C$. → (Les composantes connexes sont disjointes)

Par le même raisonnement pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique $C \in \mathcal{C}.\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{D}_i(A) \subseteq C$.

On a donc une surjection $\{\mathcal{D}_i(A), i \in [\![1, n]\!]\} \longrightarrow \mathcal{C}.\mathcal{C}$.

$\mathcal{D}_i(A) \longmapsto \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{D}_i(A) \subseteq \mathcal{C}$.

Ainsi $\mathcal{C}.\mathcal{C}$ est finie.

Soit $C_1, \dots, C_d$ les composantes connexes qui sont disjointes.

On a bien que $\forall j \in [\![1, n]\!]$ tq :

$$C_j = \bigcup_{i \in I_j} \mathcal{D}_i(A).$$