Groupes d'isométries du tétraèdre et du cube

Théorème : Pour le tétraèdre régulier Δ_4, $\mathrm{Isom}(\Delta_4) = \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$.
Pour le cube C_6, $\mathrm{Isom}^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

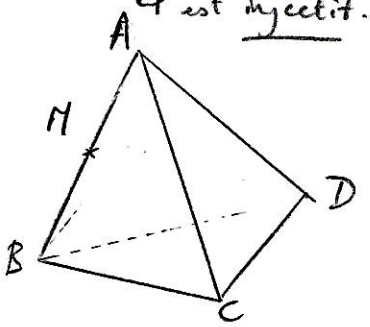
Lemme : Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ enveloppe convexe d'un ensemble fini Σ. On suppose que les points de Σ sont extrémaux (i.e. $s \in \Sigma$ n'est pas barycentre de $X \setminus \{s\}$).
Alors $\mathrm{Isom}(X)$ stabilise Σ.

> $\mathrm{Isom}(X)$ c groupe affine donc conserve les barycentres
> (si $G = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)$, $g(G) = \mathrm{bar}(g(A_i), \lambda_i)$).
> Soient $g \in \mathrm{Isom}(X)$, $s \in \Sigma$. Par l'absurde, si $g(s) \notin \Sigma$, alors $g(s)$ est barycentre de points de $X \setminus \{g(s)\}$. Or g^{-1} conserve les barycentres, donc s est barycentre de $X \setminus \{s\}$, absurde. Donc $\mathrm{Isom}(X)$ stabilise Σ.

• Les points extrémaux de Δ_4 sont ses sommets. $\{A, B, C, D\} = \Sigma$
$\mathrm{Isom}(\Delta_4)$ agit sur les sommets, donc on a le morphisme $\varphi : \mathrm{Isom}(\Delta_4) \to \mathfrak{S}(\Sigma)$, $g \mapsto g_{|\Sigma}$

* Si $\varphi(g) = \mathrm{id}_\Sigma$, alors g stabilise Σ repère affine de $\mathbb{R}^3$, donc $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. φ est injectif.

* Soit M milieu de $[AB]$. La réflexion par rapport au plan (MCD) réalise la transposition $(A\ B)$.
De même, $\varphi(\mathrm{Isom}\,\Delta_4)$ contient toutes les transpositions.
Ces dernières engendrent $\mathfrak{S}(\Sigma)$. Donc φ est surjectif.



Ainsi, $\mathrm{Isom}(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}(\Sigma) \simeq \mathfrak{S}_4$.
De plus, $\mathrm{Isom}^+(\Delta_4)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Isom}(\Delta_4)$ (via $\det : \mathrm{Isom} \to \{\pm 1\}$)

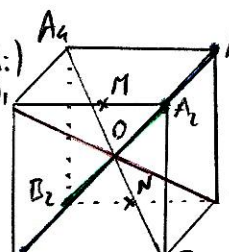
Lemme : H d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n \Rightarrow H = \mathfrak{A}_n$.

> En effet, $\forall g \in \mathfrak{S}_n$, $\bar{g}^2 = 1$ dans $\mathfrak{S}_n/H$, donc H contient tout carré de $\mathfrak{S}_n$.
> Or $(a\ b\ c) = (a\ c\ b)^2$ donc H contient tous les 3-cycles qui engendrent $\mathfrak{A}_n$.
> De plus, $\#H = \frac{\#\mathfrak{S}_n}{2} = \#\mathfrak{A}_n$.

Ainsi, $\mathrm{Isom}\,\Delta_4 = \mathfrak{S}_4$, $\mathrm{Isom}^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$.

• Notons $D_i = (A_i B_i)$ les 4 grandes diagonales du cube. Ce sont les plus grandes distances entre deux sommets donc $g \in \mathrm{Isom}(C_6)$ stabilise $\mathcal{D} = \{D_i\}$
On fait alors agir $\mathrm{Isom}^+(C_6)$ sur $\mathcal{D}$ d'où le morphisme $\varphi : \mathrm{Isom}^+(C_6) \to \mathfrak{S}(\mathcal{D})$, $g \mapsto g_{|\mathcal{D}}$

* Si $\varphi(g) = \mathrm{id}_\mathcal{D}$, alors : $\forall i$, $(g(A_i) = A_i$ et $g(B_i) = B_i)$ ou $(g(A_i) = B_i$ et $g(B_i) = A_i)$
→ soit $\exists i$, $g(A_i) = A_i$ et $g(B_i) = B_i$ et quitte à permuter, $i = 1$.
$g(A_2) \in \{A_2, B_2\}$. Or $A_1A_2 \neq A_1B_2$ et g conserve la dr A_1A_2.



De même, $g(A_i) = A_i \quad \forall i$. $g = id_{\{A_i\}}$ et $\{A_1, \dots, A_4\}$ est un repère affine de $\mathbb{R}^3$ donc $g = id$.

→ soit $\forall i$, $g(A_i) = B_i$ et alors $s_0 \circ g$ envoie A_i sur A_i $\forall i$, où s_0 est la symétrie par rapport au centre O., donc $s_0 \circ g = id$, absurde car $\det s_0 \circ g = -1$

Donc φ est injectif.

* La transposition $(D_1\ D_2)$ est l'image par φ du retournement d'axe (MN).
et ces transpositions engendrent $\mathfrak{S}_D$. Donc φ est surjectif.

Lemme : Si O est centre de symétrie de X et $g \in \mathrm{Isom}(X)$, alors $g(O) = O$ et on a $\mathrm{Isom}(X) \simeq \mathrm{Isom}^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Notons s_0 la symétrie de centre O.
s_0 est indirecte car on est en dimension 3 impaire.
s_0 fixe l'isobarycentre de X (car conserve les barycentres), donc par unicité du point fixe de s_0, O est l'isobarycentre de X. Donc $g \in \mathrm{Isom}X$ fixe O (car conserve les barycentres)

Résultat : Si f, g affines vérifient $L(f) \circ L(g) = L(g) \circ L(f)$ et $\exists O,\ f \circ g(O) = g \circ f(O)$.
alors $f \circ g = g \circ f$.

$$\forall M,\ f \circ g(M) = f \circ g(O) + L(f \circ g)(\overrightarrow{OM}) = g \circ f(O) + L(f) \circ L(g)(\overrightarrow{OM}) = g \circ f(O) + L(g \circ f)(\overrightarrow{OM}) = g \circ f(M)$$

Or $L(s_0) = -id$ donc par le résultat, $g \circ s_0 = s_0 \circ g$.

donc $F : \mathrm{Isom}(X) \longrightarrow \mathrm{Isom}^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un isom.

$$g \mapsto \begin{cases} (g, 0) \text{ si } g \in \mathrm{Isom}^+(X) \\ (g s_0, 1) \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $\begin{cases} \mathrm{Isom}^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ \mathrm{Isom}(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{cases}$.