Réduction des endomorphismes normaux

Thm : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe une bon. $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & R_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_s \end{pmatrix}$ avec $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$.

Lem : Si F est u-stable, alors $F^\perp$ est u^*-stable.
Si E_λ est ss-espace propre de u normal, alors E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont u-stables et u^*-stables

- $\forall x \in F, \forall y \in F^\perp$, $\langle x, u^*(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0$ car $u(x) \in F$, donc $u^*(y) \in F^\perp$.
- E_λ u-stable donc $E_\lambda^\perp$ u^*-stable.

De plus, $\forall x \in E_\lambda$, $u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = \lambda u^*(x)$ donc $u^*(x) \in E_\lambda$.
Donc $E_\lambda^\perp$ est $u^{**} = u$-stable.

Lem : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal avec $\dim E = 2$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$. Si $\mathcal{B}$ bon, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Puisque $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$, $b \neq 0$.
$MM^* = M^*M$ donc $\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & a^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$ donc $b = \pm c$
Si $b = c$, $M \in S_n(\mathbb{R})$, impossible car $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \emptyset$. Donc $b = -c$.
Puis $ab + cd = ac + bd$, i.e. $c(d-a) = c(a-d)$, i.e. $a = d$.

Procédons par récurrence forte sur $n = \dim E$.

- Pour $n = 0$ et $n = 1$, le résultat est trivial. (en $n = 2$ et c'est le lemme)
- Soit $n \geq 2$.

* Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \neq \emptyset$, alors pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$, $E_\lambda^\perp$ est stable par f et f^*, donc $f_{E_\lambda^\perp}$ est normal
Par hypothèse de récurrence, Il existe $\mathcal{B}_2$ bon, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f_{E_\lambda^\perp})$ soit de la forme voulue.
Si $\mathcal{B}_1$ est une bon de E_λ, la concaténation $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ convient.

* Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset$, alors notons $Q = X^2 + \alpha X + \beta$ facteur irréductible de χ_f dans $\mathbb{R}(X)$.
$Q = (X-\lambda)(X-\bar{\lambda})$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ puis $\det Q(f) = \det(f - \lambda\,\mathrm{id}) \det(f - \bar{\lambda}\,\mathrm{id}) = 0$
Ainsi $N = \ker Q(f) \neq \{0\}$.
Puisque f est normal, $Q(f)$ commute à f et f^* donc $g = f_N$ est bien défini, $g^* = f_N^*$.
Puisque g^*g est autoadjoint, $\exists \rho \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(g^*g)$, $x \in N \setminus \{0\}$, $g^*g(x) = \rho x$.
En posant $F = \mathrm{Vect}\{x, f(x)\}$, $\dim F = 2$ car $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset$
F est stable par f car $f^2(x) = -\alpha f(x) - \beta x$.
On obtient $F = \mathrm{Vect}\{f(x), f^2(x)\}$. Montrons que F est f^*-stable.
$f^*f(x) = \rho x \in F$ et $f^*(f^2(x)) = f(f^*f(x)) = \rho f(x) \in F$.
Ainsi f_F est normal. Par lemme, $\exists \mathcal{B}_2$ bon de F, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Par lemme (1), $f_{F^\perp}$ est normal. $\dim F^\perp = n-2$ donc par hypothèse de récurrence, $\exists \mathcal{B}_1$ bon de $F^\perp$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_{F^\perp})$ soit de la forme voulue.

Ainsi $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ convient.