Espace des translatés d'une fonction [X-ENS Al1].

Thm : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Notons, pour $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \mapsto f(x+a)$ et $E = \mathrm{Vect}\{\tau_a f,\ a \in \mathbb{R}\}$.

$\dim E < \infty \iff f$ sol d'une EDL homogène à coeff constants et f est $\mathcal{C}^\infty$.

Dans ce cas, l'ordre minimal d'une telle EDL est $\dim E$ et E est l'espace des solutions

Lemme : Si $h_1, \dots, h_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont linéairement indépendantes, alors :

$\exists (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $A = (h_i(x_j)) \in GL_r(\mathbb{C})$.

Posons $V = \mathrm{Vect}(h_1, \dots, h_r)$ de dim r, $F = \{ev_x, x \in \mathbb{R}\} \subset V^*$.

Alors, $F^0 = \{h \in V, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 0\} = \{0\}$.

Donc $\mathrm{Vect}(F) = (\mathrm{Vect}(F)^0)^\perp = (F^0)^\perp = \{0\}^\perp = V^*$ car dim finie. de dimension $\dim V = r$.

Soit $(ev_{x_j})_{1 \le j \le r}$ base de V^*. Soit $A = (h_i(x_j))$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^r$.

$(\lambda A)_i = \sum_{k=1}^r \lambda_k h_k(x_i) = ev_{x_i}\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k h_k\right)$ donc $\lambda A = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^r \lambda_k h_k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

A est donc injective, donc inversible

[La réciproque est aussi vraie : si $(h_1, \dots, h_r)$ est liée, A tjrs non inversible]

· Supposons $\dim E = r < \infty$. Soit $(f_{a_1}, \dots, f_{a_r})$ base de E. Tout élt de E est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Par lemme, $\exists (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $A = (f_{a_i}(x_j))$ inversible

Soit $g \in E$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$g_a : x \mapsto g(x+a) \in \mathrm{Vect}\{f_{a_1+a}, \dots, f_{a_r+a}\} \subset E$

Donc $g_a = \sum_{i=1}^r \lambda_i(a) f_{a_i}$, $\forall 1 \le j \le r$, $g_a(x_j) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(a) f_{a_i}(x_j)$.

Donc $\begin{pmatrix} g(x_1+a) \\ \vdots \\ g(x_r+a) \end{pmatrix} = {}^tA \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_r(a) \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_r(a) \end{pmatrix} = {}^tA^{-1} \begin{pmatrix} g(x_1+a) \\ \vdots \\ g(x_r+a) \end{pmatrix}$

Donc les fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont $\mathcal{C}^1$.

De là, $g'(x+a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i'(a) f_{a_i}(x)$ donc en $a = 0$, $g' = \sum_{i=1}^r \lambda_i'(0) f_{a_i} \in E$.

Donc en particulier, $g \in \mathcal{C}^\infty$, et $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)} \in E$.

$g \in \mathcal{C}^k \Rightarrow (\lambda_i) \subset \mathcal{C}^k \Rightarrow g^{(k)} = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(k)}(0) f_{a_i} \in E \subset \mathcal{C}^1 \Rightarrow g \in \mathcal{C}^{k+1}$

Puisque $\dim E < \infty$, $d = \min\{k \in \mathbb{N}, f^{(k)} \in \mathrm{Vect}\{f^{(0)}, \dots, f^{(k-1)}\}\}$ bien déf.

et f est solution d'une EDL d'ordre $d \le \dim E$.

· Réciproquement si f vérifie $u^{(d)} = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^{(k)}$, alors $\forall a \in \mathbb{R}$, f_a aussi,

donc $E \subset \{$sol de l'éq$\}$; d'où $\dim E \le d$

D'où le résultat.