Perrin

Simplicité de A_n, $n \geq 5$

103, 105, 108

Théorème : $\forall n \geq 5$, A_n est simple.

* $n = 5$: A_5 est de cardinal $\frac{5!}{2} = 60$. Il contient :
- 1 élément d'ordre 1 : id
- $\frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 15$ produits de deux transpositions à supports disjoints ($\binom{5}{2}$ choix pour la première, $\binom{3}{2}$ pour l'autre + commutant)
- $2 \times \binom{5}{3} = 20$ 3-cycles (choisir 3 éléments distincts i,j,k donne $(i\ j\ k)$ et $(i\ k\ j)$)
- $\frac{5!}{5} = 24$ 5-cycles (5! possibles en chacun obtenu en 5 exemplaires $(i\ j\ k\ l\ m), (m\ i\ j\ k\ l), \dots$)

Lemme : Soit $n \geq 3$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \{1, \dots, n\}$ deux à deux distincts
$b_1, \dots, b_n \in \{1, \dots, n\}$
Il existe $\sigma \in A_{n-2}$ tq $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$, $\sigma(a_i) = b_i$
$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma(a_i) = b_i$. Si $\varepsilon(\sigma) = 1$, ok. Sinon $\sigma \circ (a_{n-1}\ a_n)$ convient.

↳ En particulier les 3-cycles sont conjugués dans A_n ($n \geq 5$)
les produits de deux transpositions à supports disjoints sont conjugués dans A_n ($n \geq 6$).

↳ Pour $n = 5$, si $\rho = (a\ b)(c\ d)(e)$, $\tau = (a'\ b')(c'\ d')(e')$, alors il existe $\sigma \in A_5$ tq $\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$, $\sigma(e) = e'$. c et d sont envoyés sur c' et d' (ou d' et c'). De là, $\tau = \sigma\rho\sigma^{-1}$.

Soit $H \trianglelefteq A_5$ non trivial. $\mathrm{id} \in H$.
→ Si H contient un 3-cycle, alors il les contient tous (tous conjugués).
idem par les produits de deux transpositions à supports disjoints
→ Si H contient un 5-cycle σ, il contient $\langle\sigma\rangle$ 5-Sylow de A_5. Ceux-ci étant tous conjugués dans A_5, H contient tous les éléments d'ordre 5 de A_5.
Or $|H| \mid 60$ et les possibilités sont $16 = 15+1$, $21 = 20+1$, $25 = 24+1$, et 60.
$36 = 15+1+20$, $40 = 15+1+24$, $45 = 20+24+1$
Donc $H = A_5$. A_5 est simple.

* $n > 5$: Soit $H \trianglelefteq A_n$ non trivial. Soit $\sigma \in H \setminus \{\mathrm{id}\}$. Soit $a \in \{1, \dots, n\}$, $a \neq \sigma(a)$
Posons $b = \sigma(a)$ et $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$. Notons $\tau = (a\ c\ b)$, $\rho = [\tau, \sigma] = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$

$\rho = (a\ c\ b)\,(\sigma(a)\ \sigma(b)\ \sigma(c))$.

Puisque $b = \sigma(a)$, ρ agit sur au plus 5 éléments, ceux de $E = \{a, b, c, \sigma(b), \sigma(c)\}$.
Autrement dit, $\rho_{|E^c} = \mathrm{id}_{E^c}$. Quitte à rajouter des éléments, ops $|E| = 5$.

De plus, $\rho(b) = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}(b) = \tau\sigma(b) \neq b$ car $\tau^{-1}(b) = c \neq \sigma(b)$.
Donc $\rho|_E \neq id_E$.

L'ensemble A des permutations paires de E est isomorphe à A_5, et on a l'injection $\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & A_n \\ u & \mapsto & \bar{u} \end{array}$ où $\bar{u} : x \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in E \\ x & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit $H_0 = \{u \in A,\ \bar{u} \in H\}$. Puisque $H \lhd A_n$, $H_0 \lhd A \simeq A_5$ simple et $\rho|_E$ est un élément non trivial de H_0 : $H_0 = A$.

Lemme : A_n est engendré par les 3-cycles.

σ_n est engendré par les transpositions, donc A_n par les doubles transp.

De plus, $\begin{cases} (a\ b)(b\ c) = (a\ b\ c) \\ (a\ b)(a\ c) = (a\ c\ b) \end{cases}$ et $(a\ b)(c\ d) = (a\ c\ b)(a\ c\ d)$.
donc par les 3-cycles

Soit $u \in A$ un 3-cycle. $\bar{u}$ est un 3-cycle de A_n car l'injection conserve le cardinal du support et $\bar{u} \in H$ car $u \in A = H_0$. Donc H contient un 3-cycle, puis tous les 3-cycles : $H = A_n$.