104 GROUPE OPERANT SUR UN ENSEMBLE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Cadre : $(G,\cdot)$ désigne un groupe multiplicatif d'élément neutre e. E désigne un ensemble non vide, $S(E)$ le groupe des permutations de E.

I - ACTIONS DE GROUPES

1 - Groupe opérant sur un ensemble

Déf 1 - G opère à gauche sur E si on a une application $G\times E \to E$; $(g,x)\mapsto g\cdot x$ telle que : $\forall x\in E$, $e\cdot x = x$ et $\forall (g,g',x)\in G^2\times E$, $g\cdot(g'\cdot x) = (gg')\cdot x$. On note $G \curvearrowright E$. Cette application est appelée action à gauche de G sur E.

Rem 2 - On peut définir également une action à droite.

Prop 3 - Si $G\curvearrowright E$, pour tout $g\in G$, $\gamma_g : E\to E$, $x\mapsto g\cdot x$ est une permutation de E.

Prop 4 - Si $G\curvearrowright E$, $\gamma : G\to S(E)$; $g\mapsto \gamma_g$ est un morphisme de groupes et $\ker\gamma$ est le noyau de l'action de G sur E.

Prop 5 - A toute action de G sur E correspond un morphisme de groupes de G dans $S(E)$ et réciproquement, à tout morphisme de groupes de G dans $S(E)$, $G\times E\to E$; $(g,x)\mapsto \gamma(g)(x)$ définit une action de G sur E.

Ex 6 $S(E)\times E\to E$; $(\sigma,x)\mapsto \sigma(x)$ définit une action.

Ex 7 Soit V un espace vectoriel.
$GL(V)\times V\to V$; $(\varphi,x)\mapsto \varphi(x)$ définit une action.

Ex 8 . $G\times E\to E$; $(g,x)\mapsto x$ définit l'action triviale.

Ex 9 . $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $(n,x)\mapsto n+x$ et $\mathbb{K}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $(n,x)\mapsto(-1)^n x$ définissent des actions.

Ex 10 - $O_n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$; $(A,X)\mapsto AX$ définit une action.

Déf 11 - L'action de G sur E est transitive (resp. simplement transitive) si : $\forall (x,y)\in E^2$ $\exists g\in G$ $y = g\cdot x$ (resp : $\forall (x,y)\in E^2$, $\exists! g\in G$, $y = g\cdot x$).

Déf 12 - L'action de G sur E est fidèle si $\gamma : G\to S(E)$; $g\mapsto\gamma_g$ est injectif.

Ex 13 - L'action de S_n sur $\{1..n\}$ est n-transitive.

Ex 14 - L'action de A_n sur $\{1..n\}$ est $n-2$ fois transitive.

Ex 15 - Les actions de l'ex 9 ne sont pas transitives. La première est fidèle, la seconde n'est pas fidèle.

Ex 16 - Le groupe diédral D_n agit sur les n sommets d'un polygone. L'action $D_n\to S_n$ est fidèle et transitive.

2 - Orbites, stabilisateurs

Déf 17 - Soit $G\curvearrowright E$. Pour tout $x\in E$, $O_x = \{g\cdot x, g\in G\}$ est l'orbite de x sous l'action de G.

Prop 18 - Les orbites forment une partition de E.

Prop 19 - Si l'action est transitive, il existe une unique orbite égale à E.

Ex 20 - $S_n\curvearrowright\{1..n\}$, et $O_x = \{1..n\}$.

Ex 21 - Les orbites de l'ex 10 sont les sphères de centre 0.

Déf 22 - Soit $G\curvearrowright E$. Pour tout $x\in E$, $\mathrm{Stab}(x) = \{g\in G, g\cdot x = x\}$ est le stabilisateur de x sous l'action de G.

Prop 23 - Les stabilisateurs sont des sous-groupes de G.

Ex 24 - Soit $x\in E$ où $|E| = n$. L'application qui à $\sigma\in\mathrm{Stab}(x)$ associe sa restriction à $F = E\setminus\{x\}$ réalise un isomorphisme de $\mathrm{Stab}(x)$ sur $S(F)$.

Prop 25 - Soit $G\curvearrowright E$ et $\gamma : G\to S(E)$; $g\mapsto\gamma_g$.
$\ker\gamma = \bigcap_{x\in E}\mathrm{stab}(x)$.

Thm 26 Soit $G\curvearrowright E$. Pour tout $x\in E$, $\varphi_x : G/\mathrm{stab}x \to O_x$, $\overline{g}\mapsto g\cdot x$ est bien définie et bijective.
Si G est fini, $|G| = |\mathrm{Stab}(x)||O_x|$.

App 27 - Loi de réciprocité quadratique.
Soient p et q des nombres premiers impairs distincts. Alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ où $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ désigne le symbole de Legendre.

App 28 - Soit E un $\mathbb{F}_q$-ev de dimension d. Soit $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E.
Alors $|\mathcal{N}(E)| = q^{d(d-1)}$.

DVPT n°1

3 - Groupe opérant sur un ensemble fini : points fixes et formule des classes

Déf 29 - Soit $G\curvearrowright E$. On note $E^G = \{x\in E,\ O_x = \{x\}\}$.

Thm 30 - Equation des classes.
Soit $G \curvearrowright E$ avec G et E de cardinaux finis. Soient $\mathcal{O}_1, \dots \mathcal{O}_R$ les orbites de G deux à deux distinctes. Alors
$\operatorname{card} E = \sum_{i=1}^{R} \operatorname{card}(\mathcal{O}_i) = \sum_{i=1}^{R} \frac{\operatorname{card}(G)}{\operatorname{card}(\mathcal{O}_i)}$.

Cor 31. $\operatorname{card} E = \operatorname{card}(E^G) + \sum_{i,|\mathcal{O}_i|>1} \operatorname{card}(\mathcal{O}_i)$.

DÉF 32 - Si $p \geq 2$ est un nombre premier, on appelle p-groupe tout groupe de cardinal p^α où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

App 33 - Si $G \curvearrowright E$ avec $|E|$ fini et G un p-groupe, alors $\operatorname{card}(E^G) = \operatorname{card}(E) \bmod p$.

Thm 34 - Théorème de Cauchy
Si G est un groupe fini d'ordre $n \geq 2$, alors pour tout diviseur premier p de n, il existe dans G un élément d'ordre p.

Thm 35 - Formule de Burnside -
Soit $G \curvearrowright E$ avec $|E|$ fini. Pour tout $g \in G$, soit $\operatorname{Fix}(g) = \{x \in E,\ g.x = x\}$
Alors le nombre d'orbites est $\frac{1}{\operatorname{card}(G)} \sum_{g \in G} \operatorname{card}(\operatorname{Fix}(g))$.

App 36 - Il existe 76 colliers différents constitués de 4 perles bleues, 3 perles blanches et 2 perles oranges.

II - L'ACTION POUR MIEUX COMPRENDRE LE GROUPE

1 - Action par translation -

Prop 37 - G agit sur lui-même par translation à gauche :
$G \times G \to G ; (g, R) \mapsto g.R$.

Thm 38. (Cayley) Cette action est fidèle et G est isomorphe à un sous-groupe de $S(G)$.

Prop 39 - $\forall x \in G$, $\mathcal{O}_x = G$ et $\operatorname{stab}(x) = \{e\}$.

Ex 40 - Tout groupe d'ordre 2 est isomorphe à S_2.

Rem 41 - $GL_2(\mathbb{F}_2)$ d'ordre 6 est isomorphe à $S_3 \simeq 20 \dots$

Prop 42 - Soit H un sous-groupe de G - G agit sur l'ensemble des classes à gauches G/H : $g.(g'H) = (g\tilde{g})H$.

Prop 43. Cette action est transitive et correspond au morphisme $\gamma : G \to S_{[G:H]}$.

Ex 44. Soit $G = GL_2(\mathbb{F}_3)$, $H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $K = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
et les actions correspondantes $\varphi : G \to S(G/H)$ et $\psi : G \to S(G/K)$.
φ n'est pas injectif. ψ est injectif et $\psi(G)$ est un sous-groupe de $S(G/K) \simeq S_8$.

Ex 45 - Soit $G = GL_2(\mathbb{F}_2)$ et $H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ d'ordre 2 et d'indice 3.
$\varphi : G \to S_3$ est bijectif.

2 - Action par conjugaison -

Prop 46 - G agit sur lui-même par conjugaison : $(g, R) \mapsto gRg^{-1}$.

Prop 47 - $\operatorname{stab}(x) = \{g \in G,\ gx = xg\}$ et $\mathcal{O}_x = \{gxg^{-1},\ g \in G\}$.
$\mathcal{O}_x$ est appelée classe de conjugaison de x dans G.

Prop 48 - G est abélien ssi $\mathcal{O}_x = \{x\}$ pour tout $x \in G$.

Prop 49 - On note $\mathcal{O}_1 \dots \mathcal{O}_r$ les orbites 2 à 2 distinctes.
Alors $\operatorname{card}(G) = \operatorname{card}(Z(G)) + \sum_{i,|\mathcal{O}_i|>1} \operatorname{card}(\mathcal{O}_i)$.

App 50 - Pour tout nombre premier p, le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à $\{e\}$.

App 51. Tout groupe d'ordre p^2 avec p premier est abélien.

Prop 52 - $x \in Z(G)$ ssi $\mathcal{O}_x = \{x\}$.

Prop 53 - • Si $\sigma \in S_n$ est un cycle d'ordre p, $\sigma = (a_1 \dots a_p)$
et si $\tau \in S_n$, $\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(a_1), \dots, \tau(a_p))$.
• Dans S_n, tous les cycles d'ordre p sont conjugués
• Si $n \geq 5$, les cycles d'ordre 3 sont conjugués dans A_n.

App 54 - A_n est simple pour $n \geq 5$.

App 55 - Pour $n \neq 6$, $\operatorname{Aut}(S_n) = \operatorname{Int}(S_n)$.

III - L'ACTION POUR MIEUX COMPRENDRE L'ENSEMBLE

1 - Action sur l'espace des matrices.

Prop 56. $GL_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$; $(P, A) \mapsto PA$ définit une action à gauche.

Prop 57 A et A' sont dans la même orbite ssi $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A'$.

Prop 58 - Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite en lignes.

Prop 59 - Posons $G = GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$. $G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$; $((P,Q), A) \mapsto PAQ^{-1}$ définit une action à gauche. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Prop 60 - • A et A' sont dans la même orbite ssi $rg(A) = rg(A')$
• On note $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r. Alors $\overline{\mathcal{O}_r} = \bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{O}_k$.

App 61 - • $\mathcal{O}_0 = \{0\}$ est l'unique orbite fermée.
• $\mathcal{O}_{\min(n,m)}$ est l'unique orbite ouverte.

App 62 - $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert.

Prop 63 - $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $(P, A) \mapsto PAP^{-1}$ définit une action.

Prop 64 - Deux matrices sont semblables ssi elles sont dans la même orbite pour cette action. L'orbite est appelée classe de similitude.

Prop 65 - Une matrice est diagonalisable ssi elle admet une matrice diagonale dans sa classe de similitude.

Prop 66 - Le polynôme caractéristique est un invariant total de similitude pour les matrices diagonalisables.

Cex 67 - Le polynôme minimal n'est pas un invariant total : $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$ ont même polynôme minimal mais ne sont pas semblables.

Prop 68 - Les facteurs invariants donnés par le théorème de Frobenius sont des invariants totaux.

2. Les actions sur les espaces affines.

DEF 69 - Un espace affine de direction E un $\mathbb{R}$-ev est un ensemble non vide $\mathcal{E}$ sur lequel on peut définir une action à droite simplement transitive : $\mathcal{E} \times E \to \mathcal{E} : (x, u) \mapsto x + u$.

DEF 70 - On appelle isométrie affine toute application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui conserve les distances ($\mathcal{E}$ est muni du produit scalaire $\langle ; \rangle$)

Prop 71 - Le groupe des isométries du plan affine euclidien qui conserve les sommets d'un triangle équilatéral est isomorphe à S_3.

Prop 72 - On note T le tétraèdre régulier de $\mathcal{E}_3$. Alors $Isom(T) \simeq S_4$ et $Isom^+(T) \simeq A_4$.

Prop 73 - On note C le cube de $\mathcal{E}_3$. Alors $Isom^+(C) \simeq S_4$ et $Isom(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Actions sur les espaces vectoriels : théorie des représentations

DEF 74 - Une représentation linéaire de G sur E est un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(E)$. Cela revient à se donner une action à gauche de G sur E $(g, x) \mapsto g.x$ qui est $\mathbb{K}$-linéaire.

Ex 75 - Le groupe diédral D_{2n} est isomorphe au sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1&0\\0&-1 \end{pmatrix}$, d'où une représentation de degré 2.

Ex 76 - Si $|G| = n$ et $|E| = n$, en désignant par $\mathcal{B} = (e_g)_{g \in G}$ une base de E, $\rho(g)(e_g) = e_{gh}$ définit la représentation régulière de G sur E.

Ex 77 - Si $G = S_n$ et $|E| = n$ de base $(e_k)_{k=1\dots n}$, $\rho(\sigma)(e_k) = e_{\sigma(k)}$ définit la représentation par permutation.

DEF 78 - Soit (ρ, E) une représentation de G. Alors $\ker \rho$ est le noyau de la représentation. La représentation est fidèle si $\ker \rho = \{e\}$.

Ex 79 - La représentation régulière est fidèle.

Prop 80 - Soit G un groupe fini et $\chi_1, \dots \chi_r$ ses caractères irréductibles. Alors G est simple ssi $\forall i \neq 1, \forall g \in G$, $\chi_i(g) \neq \chi_i(1)$.

App 81 - S_4 n'est pas simple.