Leçons Agrégation

Laurent Montaigu

Voici les plans de leçons que j'ai réalisés pendant mon année de préparation à l'Agrégation 2022/2023. Ce sont des brouillons et sont d'un niveau inégal, certains dépassent largement le niveau de l'agrégation et d'autres sont d'un niveau très moyen. Ils ne sont donc pas à prendre tels quels, mais le but de ce document est de fournir des exemples de présentations de leçons et des exemples d'applications de théorèmes. Bien sûr, ils peuvent très bien contenir des erreurs, prudence donc !

Je n'ai pas fait grand chose de nouveau et très peu d'originalité, je me suis assez largement inspiré de pages d'anciens agrégatifs que je tiens à remercier même s'ils n'ont aucune idée de mon existence, en particulier Antoine DIEZ, Corentin KILQUE et Adrien LAURENT.

Table des matières

1 Leçons d'algèbre **4**

1.1 Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. . . . 4
1.2 Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications. . . . 5
1.3 Leçon 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications. . . . 6
1.4 Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications. . . . 7
1.5 Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Exemples et applications. . . . 8
1.6 Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications. . . . 9
1.7 Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications. . . . 10
1.8 Leçon 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications. . . . 11
1.9 Leçon 121 : Nombres premiers. Applications. . . . 12
1.10 Leçon 122 : Anneaux principaux. Exemples et applications. . . . 13
1.11 Leçon 123 : Corps finis. Applications. . . . 14
1.12 Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications. . . . 15
1.13 Leçon 126 : Exemples d'équations en arithmétique. . . . 16
1.14 Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications. . . . 17
1.15 Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications. . . . 18
1.16 Leçon 148 : Exemples de décompositions de matrices. Applications. . . . 19
1.17 Leçon 149 : Valeurs propres. Vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications. . . . 20
1.18 Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications. . . . 21
1.19 Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications. . . . 22
1.20 Leçon 153 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications. . . . 23
1.21 Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. . . . 24
1.22 Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie. . . . 25
1.23 Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications. . . . 26
1.24 Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents. . . . 27
1.25 Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes. . . . 28
1.26 Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications. . . . 29
1.27 Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie). . . . 30
1.28 Leçon 161 : Distances dans un espace affine euclidien. Isométries. . . . 31
1.29 Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques. . . . 32
1.30 Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications. . . . 33
1.31 Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications. . . . 34
1.32 Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications. . . . 35
1.33 Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement. . . . 36

1 Leçons d'algèbre

1.1 Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble.

C'est une leçon assez difficile à organiser, il y a plein (trop) de choses à dire. Je pense que développer une partie géométrie (même petite) est nécessaire.

Références utilisées :

— (1) *Théorie des groupes* F.Ulmer
— (2) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni

Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

101

Soit X un ensemble et G un groupe de neutre e. p un nombre premier.

I Action de groupes

A. Définition

(1)

Définition 1: On appelle action de G sur X toute application

$$G \times X \to X$$
$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

qui vérifie : 1) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \quad \forall g, h \in G \quad \forall x \in X$

2) $e \cdot x = x \quad \forall x \in G$

Proposition 2: Toute action $G \curvearrowright X$ donne naissance à un morphisme $\rho : G \to S_X$. Inversement un tel morphisme donne une action $G \curvearrowright X$.

Définition 3: Soit $x \in X$ On appelle orbite de X l'ensemble

$$O_x = \{ g \cdot x \mid g \in G \}$$

Définition 4: On appelle stabilisateur de $x \in X$ l'ensemble

$$\mathrm{Stab}(x) = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}.$$

Définition 5: On dit que l'action est :

fidèle si : $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$

libre si : $\forall x \in X \quad G_x = \{e\}$

transitive si $\forall (x, y) \in X^2 \quad \exists g \in G, \ g \cdot x = y$

(2)

Exemple 6: Soit l'action naturelle $S_n \curvearrowright [\![1, n]\!]$. Soit $\sigma \in S_n$ et $F_1, \dots, F_r$ les orbites sous l'action de $\langle \sigma \rangle$. Alors $(\sigma_i)_i$ définie par $\sigma_i(x) = \begin{cases} x & x \notin F_i \\ \sigma(x) & x \in F_i \end{cases}$ est la décomposition en cycles à supports disjoints de σ.

Exemple 7: $GL(E)$ opère transitivement non fidèlement sur les droites de E.

Exemple 8: O_3 opère fidèlement transitive sur les sommets d'un triangle.

Proposition 9: L'application $\mathrm{ev}_x : \begin{matrix} G \to X \\ g \mapsto g \cdot x \end{matrix}$ induit une bijection $\dfrac{G}{\mathrm{Stab}(x)} \simeq O_x$.

Proposition 10: En particulier si G fini $|G| = |O_x| \times |\mathrm{Stab}(x)|$

Théorème 11: (Equation aux classes) On a une partition $X = \bigsqcup_{i=1}^{r} O_{x_i}$. En distinguant les orbites triviales on a

$$|X| = |X^G| + \sum_{\substack{i=1 \\ |O_{x_i}| > 1}}^{r} |O_{x_i}| = |X^G| + \sum_{\substack{i=1 \\ \mathrm{Stab}(x_i) \neq G}}^{r} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x_i)|}$$

(2)

Application 12: Soit G un groupe fini et p diviseur premier de $|G|$. Alors G possède un élément d'ordre p.

Application 13: Le centre d'un p-groupe $\neq$ non trivial, un p-groupe admet un sous-groupe distingué d'ordre d pour tout $d \mid p^\alpha$.

Application 14: Un groupe d'ordre p^2 est abélien

B. Action par translation

Théorème 15: (Cayley) Soit G un groupe fini de cardinal n. Alors G se plonge dans S_n.

Application 16: Soit G un groupe de cardinal $2q$ q impair alors G n'est pas simple.

(3)

Théorème 17: (Frobenius) Soit G un groupe fini et p le plus petit diviseur premier de $|G|$. Si $H < G$ est d'indice p alors $H \lhd G$.

(2)

Proposition 18: Si G infini possède un sous-groupe d'indice fini alors G pas simple.

Proposition 19: Un sous-groupe de S_n d'indice n est isomorphe à S_{n-1}.

C. Action par conjugaison

(1,2)

(2)

G peut agir sur lui même par conjugaison $g.h = ghg^{-1}$.

Définition 20 : l'orbite de h par cette action s'appelle sa classe de conjugaison et son stabilisateur son centralisateur

Proposition 21 : σ et $\sigma' \in S_n$ appartiennent à la même classe de conjugaison de S_n ssi elles ont même nombre de cycles de mêmes longueurs.

Application 22 : $Aut(S_n) = S_n$ $n \neq 6$

Théorème 23 : (Frobenius) Deux matrices A, B dans $Ch(K)$ sont semblables (= conjugués pour l'action de conjugaison) ssi elles ont les mêmes invariants de similitudes.

II Application en théorie des groupes

(2)

Définition 24 : Soit $|G| = p^\alpha m$ $p \nmid m$. On appelle p-sylow de G tout sous-groupe de G cardinal p^α.

Théorème 25 : (Sylow 1) . Si $p \mid |G|$, il existe un p-sylow de G.

Théorème 26 : (Sylow 2)

On suppose G fini et $p \mid |G| = p^\alpha m$ $p \nmid m$.

i) Si $H < G$ $|H| = p^\beta$ alors H est inclus dans un P-sylow de G

ii) Les p-sylow de G sont conjugués

iii) Si on note n_p le nombre de p-sylow on a

$$n_p \equiv 1 [p] \text{ et } n_p \mid m$$

Corollaire 27 Soit S un p-sylow de G. Alors

$$S \triangleleft G \iff S \text{ est l'unique p-sylow de } G \iff n_p = 1$$

(1,1)

Application 28 : Un groupe d'ordre 63 est pas simple

Application 29 : Un groupe d'ordre 15 est cyclique

Application 30 : p, q premiers, un groupe d'ordre p^2q, pq n'est pas simple.

Application 31 : p, q, r premiers alors un groupe d'ordre pqr n'est pas simple. DVP

Application 32 : A_5 est le seul groupe d'ordre 60 simple.

III Applications en algèbre linéaire : action du groupe linéaire

K corps.

(4)

A. Action par équivalence

Définition 33 : On considère l'action de $GL_m(K) \times GL_n(K)$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ par équivalence i.e $(P,Q) \cdot A = PAQ^{-1}$

Proposition 34 : Deux matrices sont dans la même orbites ssi elles ont le même rang. App : $rg(A) = rg({}^tA)$.

Application 35 : On suppose K fini. Alors le nombre de matrices de rang r dans $Ch(K)$ est : $\dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|^2}{|GL_r| \times |GL_{n-r}| \times |\mathcal{M}_{r,n-r}|}$

B. Action par conjugaison

On considère ici l'action $P \cdot M = PMP^{-1}$ on note $S(M)$ la classe de conjugaison de M.

Proposition 36 : ($K = \mathbb{C}$) M est diagonalisable ssi $S(M)$ _

Proposition 37 : ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) M est nilpotent ssi $0 \in S(M)$

Proposition 38 : Le polynôme caractéristique caractérise les classes de similitudes des matrices diagonalisables.

Remarque 39 : le polynôme minimal ne suffit pas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 40 : Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, A et B sont semblables ssi $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $\dim(\ker((A - \lambda I_n)^i)) = \dim(\ker((B - \lambda I_n)^i))$.

(4)

Proposition 41 : Le nombre de matrices diagonalisables sur $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est :

$$\sum_{m_1+\dots+m_r=n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{m_1}(\mathbb{F}_q)|\times\dots\times|GL_{m_r}(\mathbb{F}_q)|}$$

où $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$

C. Action par congruence

Définition 42 : On considère l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques) par $P.M = PM\,{}^tP$ dite par congruence

Proposition 43 : A et B sont congruentes ssi elles représentent la même forme quadratique dans des bases différentes.

Proposition 44 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ A et B sont congruentes ssi elles ont même rang.

Proposition 45 : (Loi d'inertie de Sylvester) ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) A et B sont congruentes ssi elles ont même rang et même signature

Proposition 46 : ($\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$) q impair A et B sont congruentes ssi elles ont même rang et même discriminant.

Application 47 : (Réciprocité quadratique) Soit p, q premiers impairs alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$

OVP

III Applications en géométrie

A. Groupes projectifs.

E k-ev de dim finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 48 : Le groupe linéaire opère transitivement non fidèlement sur les droites de E.

Définition 49 : On définit le groupe projectif linéaire par

$$PGL(E) = \frac{GL(E)}{Z(GL(E))} = \frac{GL(E)}{\{\lambda Id_E\}}$$

Définition 50 : On a une action naturelle de $GL(E)$ sur l'ensemble des droites de E qui est fidèle

Proposition 51 : (Isomorphismes exceptionnels)

$PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$

$PGL_2(\mathbb{F}_4) \simeq A_5$

B. Groupes d'isométries

(4)

Définition 52 : Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$. On note $Isom(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries qui laisse $\mathcal{E}$ stable.

On note $Isom^+(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries positives qui laissent $\mathcal{E}$ stable

On a un morphisme $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ UVP

Proposition 61 :

Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ le cube, alors

$$Isom^+(\mathcal{E}) \simeq S_4 \quad \text{et} \quad Isom(\mathcal{E}) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

C. Sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ / $SO_2(\mathbb{R})$ / $SO_3(\mathbb{R})$

(1)

Proposition 62 : Les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ sont cycliques.

Proposition 63 : Les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ pas inclus dans $SO_2(\mathbb{R})$ sont isomorphes à D_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 64 : Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ sont $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, D_m, A_4, S_4, A_5 $m \geq 2$ entier.

Application : solide platonicien ?

1.2 Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

Références utilisées :

— (1) *Cours de Mathématiques 1 Algèbre* JM.Arnaudiès
— (2) *Théorie de Galois* I.Gozard
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Algèbre discrète de la transformée de Fourier* G.Peyré
— (6) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
— (7) *Cours d'Algèbre* M.Demazure

Groupes des nombres complexes de module 1. Racine de l'unité - Applications

(1)

102

I Groupes des nombres complexes de module 1

A. Le groupe $\mathbb{U}$.

Définition 1 : On note $\mathbb{U}$ le noyau du morphisme $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$. On a donc $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

Proposition 2 : L'application $\theta : x \mapsto e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ est un morphisme $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$ surjectif

Proposition 3 : $\ker(\theta)$ est un sous groupe discret de $\mathbb{R}$ donc de la forme $a\mathbb{Z}$. On appelle $a = 2\pi$ et on a alors $\mathbb{U} \simeq \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$

Proposition 4 : Pour $x \in \mathbb{R}$ $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ et $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ (Formule d'Euler)

Proposition 5 : (Formule de de Moivre) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$

Application 6 : $\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ $t \neq 0 \ [2\pi]$ (Noyau de Dirichlet)

Application 7 : Il existe un polynôme T_n (polynôme de Tchebychev) tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$

$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(x) (-\sin^2(x))^k$

Exemple 8 : $T_1 = X$ $T_2 = 2X^2 - 1$ T_n est de degré n de coeff 2^{n-1}

B. Argument d'un nombre complexe

Définition 9 : Soit $z \in \mathbb{U}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{ix}$. Un tel x est appelé un argument de z.

Définition 10 : On appelle argument principal de z l'unique argument dans $]-\pi, \pi]$. On le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Définition 11 : Soit $X \subset \mathbb{C}^*$. On appelle détermination du logarithme de X toute application $L : X \to \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in X$ $e^{L(z)} = z$.

Proposition 12 : Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{U}$.

Définition 13 : On appelle détermination principale du logarithme l'application $L : z \mapsto \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$.

Proposition 14 : L est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

(1)

C. Application en géométrie.

Proposition 15 : On a un isomorphisme de groupes $SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U}$. Avec cette isomorphisme i coresponds à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

Définition 16 : On appelle angle orienté entre $(z,r) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tout angle de la rotation qui envoie $\frac{z}{|z|}$ sur $\frac{r}{|r|}$.

Proposition 17 : Si θ_i angle orienté entre z_i et z_{i+1} alors $\sum_{i=1}^{n} \theta_i$ angle orienté entre z_1 et z_n. (Relation de Chasles)

D. Racines de l'unité

Définition 18 : Une racine $n$ème de l'unité est un élément $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces éléments.

Proposition 19 : $\mathbb{U}_n$ est un groupe cyclique d'ordre n engendré par les $e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ avec $k \wedge n = 1$

Proposition 20 : Soit G un sous groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$ alors $G = \mathbb{U}_n$ où $n = |G|$.

Définition 21 : Une racine primitive $n$ème de l'unité est une racine qui engendre $\mathbb{U}_n$, on note μ_n leur ensemble

II Matrices dont le spectre est dans $\mathbb{U}$.

A. Matrices "racines nème de l'identité"

Proposition 22 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^N = I_n$. Alors M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $Sp(M) \subset \mathbb{U}_N$

(3) Théorème 23 : (Théorème de Kronecker). Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire on suppose que toutes les racines de P sont de module ≤ 1 alors les racines non nulles de P sont des racines de l'unité. DVP1 ⟩3

(4) Application 24 : (Lemme de Serre). Soit $p \in \mathbb{N}$ premier et G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. L'application $G \to G(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de réduction des coefficients est injective

Application 25 : Il existe un entier N_n tel que pour tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$, $|G| \leq N_n$.

Proposition 26 : Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ vérifie $M^n = I_2$ alors $M^{12} = I_2$.

Corollaire 27 : $N_2 \leq 6$.

Théorème 28 : (Théorème de Burnside). Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe d'exposant fini. Alors G est fini.

Proposition 29 :

$$\overline{\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exists N,\ M^N = I_n\}} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid Sp(M) \subset \mathbb{U}\}$$

B. Matrices stochastiques

(4) Définition 30 : Une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2$ $p_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$

Proposition 31 : Soit P une matrice stochastique alors 1 est valeur propre de P et toutes les valeurs propres de P sont de module inférieur à 1.

(4) Proposition 32 : Si $\lambda \in Sp(P)$ est de module 1 alors λ est une racine nème de l'unité.

III Une application en théorie des groupes : les caractères

(5) Soit G un groupe abélien fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 32 : Le dual de G noté $\hat{G}$ est l'ensemble des morphismes $\chi : G \to \mathbb{C}^*$. C'est un groupe pour la multiplication

Définition 33 : Si $\chi \in \hat{G}$ on dit que χ est un caractère

Proposition 34 : Si $\chi \in \hat{G}$ alors $\chi(G) \subset \mathbb{U}_n$

Définition 35 : On note $\mathbb{C}[G]$ l'ensemble des applications $f : G \to \mathbb{C}$

Exemple 36 : Soit $g \in G$ alors $\delta_g(g') = \begin{cases} 1 & g = g' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est dans $\mathbb{C}[G]$

Proposition 37 : $(\delta_g)_{g \in G}$ est une base de $\mathbb{C}[G]$.

Proposition 38 : Supposons G cyclique. Soit g_0 un générateur de G et $\omega \in \mathbb{U}_n$ Alors

$$G \to \hat{G}$$
$$g = g_0^k \mapsto \left(\chi_k : g = g_0^j \mapsto \omega^{jk}\right)$$

est un isomorphisme de groupes

Corollaire 39 : $G \simeq \hat{G}$

Lemme 40 : Soit $H < G$ et $\chi \in \hat{H}$, alors χ se prolonge en un caractère sur G.

Proposition 41 : $\hat{G}$ est fini et $|\hat{G}| = |G|$

Théorème 42 : (Structure des groupes abéliens finis) Il existe des entiers $n_1 | n_2 | \dots | n_k$ uniques tels que

$$G \simeq \prod_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$$

IV Sommes de Gauss et réciprocité quadratique

Soit p premier impair

Définition 44 : (Symbole de Legendre) On définit pour $a \in \mathbb{Z}$
$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \text{ carré mod } p \\ 0 \text{ si } p \mid a \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$ de même pour $a \in \mathbb{F}_p$

Proposition 45 : $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$ [p]

Définition 46 : (Somme de gauss) On pose $S(a) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} \left(\frac{x}{p}\right) \omega^{ax}$

Proposition 47 : $S(a) = \left(\frac{a}{p}\right) S(1)$ $S(1)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p$

Théorème 48 : (Réciprocité quadratique) Soit $q \neq p$ impair alors :
$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

Proposition 49 : $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Application 50 : 3 carré mod p $\Leftrightarrow$ $p \equiv \pm 1$ [12].

(2) ## V Polynômes et extensions cyclotomiques

A. Polynôme cyclotomique sur $\mathbb{C}$.

Définition 44 : On définit le $n$ième polynôme cyclotomique par $\Phi_n = \prod_{\omega \in \mu_n} (X - \omega)$

Exemple 45 : $\Phi_1 = X-1$ $\Phi_2 = X+1$ $\Phi_3 = X^2+X+1$

Proposition 46 : $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$ $\deg \Phi_n = \varphi(n)$ $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$

Application 47 : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$) DVP 2

Proposition 48 : Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$

Proposition 49 : Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire avec $\mathbb{Z}(P) \subset D(0,1)$ alors les diviseurs irréductibles de P sont X et les Φ_n

Proposition 50 : Soit $|a_n| = |\{P \in \mathbb{Z}[X] / \mathbb{Z}(P) \subset D(0,1)\}$ fini.

Pentacle 41.

Alors pour $|z| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - z^{\varphi(n)}}$

(2,1)

B. Polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{F}_p$.

Soit p premier $p \nmid n$ q une puissance de p. (1)

Définition 54 : On définit $\overline{\Phi}_{n, \mathbb{F}_p} = \overline{\Phi}_n$ où l'on a réduit les coefficients de Φ_n mod p.

Proposition 55 : Les générateurs de $\mathbb{F}_q^*$ sont les zéros de $\overline{\Phi}_{q-1, \mathbb{F}_p}$.

Proposition 56 : $\overline{\Phi}_n$ se décompose sur $\mathbb{F}_q$ en produit de m facteurs irréductibles tous de degré $\frac{\varphi(n)}{m}$ où $m = o(q)$ $q \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$

Corollaire 57 : $\overline{\Phi}_n$ admet une racine sur $\mathbb{F}_q$ ssi $q \equiv 1$ [n].

Corollaire 58 : $\overline{\Phi}_n$ irréductible sur $\mathbb{F}_q$ ssi q engendre $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$

Application 59 : (Dirichlet faible). Il existe une infinité de nombres premiers $\equiv 1$ [n].

C. Extensions cyclotomiques et constructibilité

(2) Définition 54 : Soit $\xi \in \mu_n$ on appelle $\mathbb{Q}(\xi)$ extension cyclotomique (elle ne dépend pas de $\xi \in \mu_n$) elle est de degré $\varphi(n)$

(2) Théorème 58 (Wantzel) z constructible ssi il existe $\mathbb{Q} = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_n$ extensions telles que $[k_i : k_{i-1}] = 2$ et $z \in k_n$.

Application 59 : la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature sont impossibles.

Définition 60 Soit P_n le polygone régulier à n côtés de côté 1 dont 1 est un sommet. On dit que P_n est constructible si l'angle $\frac{2\pi}{n}$ l'est.

DVP 3

Théorème 61 : Soient p premier ≥ 3 et $r \geq 1$ entier. Alors S_{p^r} constructible ssi $r = 1$ et $p = 2^{2^n} + 1$ (Nombre de Fermat)

Théorème 62 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

S_n constructible $\Leftrightarrow$ $n = 2^m p_1 \cdots p_k$ (p_i) nombres de Fermat premier distincts

(2,1)

1.3 Leçon 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Références utilisées :

— (1) *Théorie des groupes* F.Ulmer
— (2) *Objectif Agrégation* V.Beck J.Malick G.Peyré
— (3) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
— (4) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Algèbre* X.Gourdon
— (6) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas
— (7) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (8) *Eléments de théorie des groupes* J.Calais
— (9) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Application

103

Soit G un groupe

I Conjugaison dans un groupe

A. Propriétés élémentaires

Déf 1 : Soit G un groupe, alors G agit sur lui-même par conjugaison ie on a une action $G^2 \to G$, $(g,x) \mapsto gxg^{-1}$

Exemple 2 : Deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont conjuguées si elles sont semblables.

Déf 3 : On définit la classe de conjugaison de $g \in G$ comme son orbite par l'action de conjugaison

Proposition 4 : Si cette classe est triviale alors $g \in Z(G)$ on a la relation :

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} |O_{g_i}|$$

où les O_{g_i} sont des orbites non triviales qui forment une partition de $G \setminus Z(G)$.

Application 5 : Soit p premier, alors tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Proposition 6 : Deux éléments conjugués ont même ordre, la réciproque est fausse

B. Conjugaison en algèbre (linéaire)

Proposition 7 : Deux éléments de S_n sont conjugués si et seulement si ils ont le même nombre de cycles de même longueur dans leur décomposition en cycles à supports disjoints (1)

Application 8 : Soit $(g,g') \in G^2$ de même ordre alors il existe un groupe Γ contenant un groupe isomorphe à G dans lequel g et g' sont conjugués.

Proposition 9 : (Brauer). Deux permutations σ, σ' sont conjuguées si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables (2)

Proposition 10 : Deux 3-cycles sont conjugués dans S_n si $n \geq 3$ si $n \geq 5$ ils le sont dans A_n. (3)

Définition 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $S(A)$ la classe de conjugaison de A par l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison

Proposition 12 : (Frobenius) $S(A) = S(B)$ ssi A et B ont les mêmes invariants de similitudes. (5)

Proposition 13 : On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors :
- $S(A)$ est d'intérieur vide, borné ssi $A = \lambda I_n$
- A est diagonalisable ssi $S(A)$ fermée
- A est nilpotente ssi $0 \in \overline{S(A)}$ (4)

Proposition 14 : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. (6)

Proposition 15 : Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & R(\theta_1) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ $\theta_i \in]0, \pi[\cup \{\pi\}$ (7)

Application 16 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$

C. Conjugaison en géométrie

Proposition 17 : Soit $g \in SO_3$ un retournement d'axe Δ et $h \in SO_3$ alors hgh^{-1} est un retournement d'axe $h(\Delta)$. (7)

Définition 18 : On note P_n le polygône régulier à n sommets et de coté 1 de centre O. On le groupe des isométries laissant stable P_n.

Proposition 19 : D_n est fini d'ordre $2n$.

Proposition 20 : Soit r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s la symétrie axiale Oy alors $o(r) = n$ $o(s) = 2$ $srs^{-1} = r^{-1}$ et $D_n = \langle r, s \rangle$ (1)

II Groupes distingués, groupes quotients

A. Groupes distingués

Soit H un sous groupe de G

Déf 21 : On définit sur G la relation d'équivalence $\sim_g$ par (8)

(8)

$x \sim_g y$ ssi $x^{-1}y \in H$

On définit de même $x \sim_d y$ ssi $xy^{-1} \in H$

On note xH et Hx les classes d'équivalences pour ces relations d'équivalence.

Exemple 22. $\sim_g$ et $\sim_d$ sont a priori différent cf $G = S_3$.

Application 23: (Lagrange) Soit G fini et $H < G$ alors $|H|$ divise $|G|$.

Définition 24: On dit que H est distingué dans G si $\forall g \in G$ $gH = Hg$ et on note $H \triangleleft G$.

Proposition 25: Si $H \triangleleft G$ alors les ensembles $\frac{G}{\sim_g}$ et $\frac{G}{\sim_d}$ sont égaux (noté $\frac{G}{H}$) et $\frac{G}{H}$ est muni d'une unique structure de groupe telle que l'application quotient soit un morphisme de groupes.

Exemple 26: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, groupes projectifs.

Théorème 27: On a $H \triangleleft G$ ssi il existe G' groupe et $f: G \to G'$ morphisme tel que $H = \ker(f)$.

Exemple 28: $SL_n(K) \triangleleft GL_n(K)$ $SO_n(\mathbb{R}) \triangleleft O_n(\mathbb{R})$

(9)

Déf 29: Soit $H < G$, on note $[G:H] = |\frac{G}{H}|$ et on l'appelle l'indice de H dans G.

Proposition 30: Si $[G:H] = 2$ alors $H \triangleleft G$

Proposition 31: (G fini) Si $[G:H] = p$ où p est le plus facteur premier de $|G|$ alors $H \triangleleft G$.

(21)

Proposition 32: Si G abélien alors pour tout $H < G$, $H \triangleleft G$

Remarque 33: La réciproque est fausse.

B. Groupes quotients

(8)

Proposition 34: Soit G' groupe et $f: G \to G'$ morphisme, alors on a un isomorphisme $\frac{G}{\ker(f)} \simeq \mathrm{Im}(f)$.

Application 35: $SO_2(\mathbb{R}) \simeq \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$, G cyclique $\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(8)

Application 36: Soit p impair et $q = p^k$. Il y a $\frac{q-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q^*$

Proposition 37: (Propriété universelle du quotient)
Soit G' un groupe et $f: G \to G'$ un morphisme de groupes tel que $\ker(f) \supset H$ alors il existe un unique morphisme $\varphi: \frac{G}{H} \to G'$ tel que $\varphi \circ \pi = f$

DVP1 (2)

Application 38: (Frobénius Zolotarev)
Soit p premier impair et $\varphi \in GL_n(\mathbb{F}_p)$, si on voit φ comme une permutation de $\mathbb{F}_p^n$ alors $\varepsilon(\varphi) = \left(\frac{\det\varphi}{p}\right)$

(8)

Proposition 39: Il y a une bijection entre les sous-groupes de $\frac{G}{H}$ et les sous-groupes de G contenant H.

Application 40: les sous groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $d|n$.

(2)

Proposition 41: Soit G un p-groupe alors pour $d \mid |G|$, G admet un sous-groupe distingué d'ordre d.

C. Groupe dérivé

(4)

Définition 41: On appelle commutateur de $(x,y) \in G^2$ l'élément $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Remarque 42: $[x,y] = 1$ ssi x et y commutent.

Définition 43: On appelle groupe dérivé et on note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs.

Proposition 44: $D(G) \triangleleft G$

Proposition 45: $\frac{G}{D(G)}$ est le plus gros quotient abélien de G.

(2)

Exemple 46: $D(GL_n(K)) = SL_n(K)$ $n \geq 2$ $K \neq \mathbb{F}_2$

Exemple 47: $D(S_n) = A_n$ $n \geq 5$ $D(A_n) = A_n$

$D(S_4) = A_4$ $D(A_4) = V_4$ $D(V_4) = \{1\}$

où $V_4 = \{\text{double transpositions}\} < S_4$

III Groupe simple et Théorème de Sylow

A. Simplicité

(1)

Définition 48 : Un groupe G est dit simple si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et lui-même.

Exemple 49 : $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ p premier est simple

Proposition 50 : Supposons G abélien. Alors :

G simple $\Leftrightarrow G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier)

(10)

Théorème 51 :
Soit $n \geq 5$ Alors A_n est simple

Exemple 52 : $V_4 \trianglelefteq A_4$

(7)

Théorème 52 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple IDVP 2 $SO_n(\mathbb{R})$ n'importe simple

Remarque 53

(2)

Définition 54 : Soit K un corps, on définit :

$$PSL_n(K) = \frac{SL_n(K)}{Z(SL_n(K))}$$

Proposition 55 : $PSL_n(K)$ est simple sauf dans les cas suivants :
- $n = 2$ $K = \mathbb{F}_2$
- $n = 2$ $K = \mathbb{F}_3$.

B. Théorème de Sylow

p désigne un nombre premier,

(21)

Définition 56 : Soit G fini $|G| = p^\alpha m$ $p \nmid m$. On appelle p-sylow de G tout sous-groupe de G cardinal p^α.

Théorème 57 : (Sylow 1). Si $p \mid |G|$, il existe un p-sylow de G.

Théorème 58 (Sylow 2)
On suppose G fini et $p \mid |G| = p^\alpha m$ $p \nmid m$.
i) Si $H < G$ $|H| = p^\beta$ alors H est inclus dans un p-sylow de G
ii) Les p-sylow de G sont conjugués
iii) Si on note n_p le nombre de p-sylow on a
$n_p \equiv 1 [p]$ et $n_p \mid m$

(1)

Corollaire 59 : Soit S un p-sylow de G. Alors

$S \trianglelefteq G \Leftrightarrow S$ est l'unique p-sylow de $G \Leftrightarrow n_p = 1$

Application 60 : Un groupe d'ordre 63 est pas simple

Application 61 : Un groupe d'ordre 15 est cyclique.

Application 62 : Nombre d'éléments d'ordre 5 dans un groupe de cardinal 20.

Application 63 : p, q, r premiers alors un groupe d'ordre pq, p^2q, pqr n'est pas simple.

(1)

Application 64 : A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60

Application 65 : Si G abélien de card n, alors pour $d \mid n$ G admet un sous-groupe d'ordre d.

1.4 Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Références utilisées :

— (1) *Théorie des Groupes* F.Ulmer
— (2) *Exercices de mathématiques pour l'agrégation Volume 1* S.Francinou H.Gianella
— (3) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
— (4) *Eléments de théorie des groupes* J.Calais
— (5) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (6) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas
— (7) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (8) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
— (9) *Exercices d'Algèbre* P.Ortiz

Groupes finis. Exemples et applications.

104

G est un groupe fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ de neutre e.

I Généralités

A. Ordre, Lagrange

Définition 1 : L'ordre d'un élément $x \in G$ est le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k = e$. Si un tel k n'existe pas on dit que x est d'ordre infini. On note $k = o(x)$.

Proposition 2 : $o(x) = |\langle x \rangle|$ en particulier $o(x) < +\infty$.

Proposition 3 : si $o(x) < +\infty$ alors $o(x^k) = \frac{o(x)}{k \wedge o(x)}$

Proposition 4 : $xy = yx$ $o(x) \wedge o(y) = 1 \Rightarrow o(xy) = o(x)o(y)$

(11)

Définition 5 : Soit $H < G$, on définit la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi $yx^{-1} \in H$. On note $\frac{G}{H}$ l'ensemble des classes d'équivalences.

Théorème 6 : (Lagrange) $|G| = |H| \times \left|\frac{G}{H}\right|$. En particulier $|H| \mid n$. On appelle l'indice de H noté $[G:H] = \left|\frac{G}{H}\right|$

Application 7 : $\forall x \in G$ $x^n = e$, $|G| = p \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Contre-Exemple 8 : A_4 n'a pas de sous-groupes d'ordre 6. cf Galois

B. Actions de groupes

(21)

Proposition 9 : (Formule des classes) Soit X un ensemble fini et $G \curvearrowright X$ alors :

$$|X| = |X^G| + \sum_{|O(x)|>1} |O(x)|$$

où $X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G \ g \cdot x = x\}$

Application 10 : On suppose $n = p^\alpha$ p premier alors $Z(G)$ est non trivial

Application 11 : On suppose $n = p^2$ p premier alors G est abélien.

Application 12 : (Lemme de Cauchy) Soit p premier $p \mid n$ alors G possède un élément d'ordre p.

II Groupes classiques

A. Groupes cycliques.

(11)

Définition 13 On dit que G est cyclique s'il existe $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle$.

Exemple 14 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique et est engendré par $\bar{1}$

Proposition 15 Supposons G cyclique, alors pour tout $d \mid n$ il existe un unique sous-groupe d'ordre d dans G.

Application 16 $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$

Application 17 Soit K corps et $G < K^*$ fini. Alors G cyclique.

Proposition 18 G est cyclique ssi $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(21)

Théorème 19 (Nombres cycliques) il y a équivalence :

$$n \wedge \varphi(n) = 1 \iff \forall G \text{ groupe } |G| = n \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Proposition 20. Soit G cyclique alors $\mathrm{Aut}(G) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

B. Groupes abéliens.

(11)

Théorème 21 (Structure des groupes abéliens finis)

Il existe un unique entier k et des entiers $m_1, \dots, m_k$ tels que $m_{i+1} \mid m_i$ et :

$$G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$$

Exemple 22 : Il y a isomorphisme près 6 groupes d'ordre 360.

Proposition 23. Soit G abélien et $d \mid n$, alors G admet un sous-groupe d'ordre d. nombres abéliens ? (ADMIS)

C. Groupe symétrique

(11)

Définition 24 : On définit S_n comme l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ muni de la composition.

Proposition 25 : S_n est engendré par les transpositions

Proposition 26 : Soit $\sigma \in S_n$ alors σ se décompose en un unique (à l'ordre près) produits de cycles à support disjoints.

(1)

Proposition 27 S_n est engendré par les transpositions

Proposition 28. Soit $\sigma \in S_n$ alors σ se décompose en un unique (à l'ordre près) produits de cycles à support disjoints.

Exemple 29 : Si $\sigma = c_1 \dots c_r$ est la décomposition en cycles à support disjoints alors $o(\sigma) = \text{ppcm}(o(c_i))$

Théorème 30. (Morphisme de Cayley) Tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique.

Application 31 Soit q un entier impair alors un groupe d'ordre $2q$ n'est pas simple.

(1)

Définition 32 Pour $\sigma \in S_n$ on note $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

Proposition 33 ε morphisme de groupes on note $A_n = \ker(\varepsilon)$ le sous-groupe alterné d'ordre n.

Théorème 34 A_n $n \geq 5$ est simple

Application 35 : $D(A_n) = A_n$ $n \geq 5$.

Proposition 36 A_n est le seul groupe d'indice 2 de S_n.

(3)

Proposition 37. Soit C un cube, T un tétraèdre. On note $\text{Isom}(X)$ les isométries affine qui laissent X invariant.

$\text{Isom}^+(X) = \text{Isom}(X) \cap \{\text{isométries positives}\}$

$\text{Isom}(T) \simeq S_4$ $\text{Isom}^+(T) \simeq A_4$

$\text{Isom}^+(C) \simeq S_4$ $\text{Isom}(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

D. Groupe diédral

(4)

Définition 38 Notons P_n un polygone régulier à n sommets de $\mathbb{R}^2$. On note $D_n = \text{Isom}(P_n)$.

Proposition 39 : D_n est fini d'ordre $2n$, non abélien pour $n \geq 3$ $n \geq 3$.

Proposition 40 : D_n est engendré par r = rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s une symétrie telle que $o(rs) = 2$

(2)

Proposition 41 Si G est un groupe engendré par deux éléments (a,b) tels que $o(a) = n$ $o(b) = 2$ et $o(ab) = 2$ alors $G \simeq D_n$.

III Sous-groupes finis du groupe linéaire

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, le but est de comprendre un peu mieux les sous-groupes de $GL(E)$.

A. $K = \mathbb{C}$

(5)

Définition 42 On appelle exposant de G le ppcm des ordres des éléments de G.

Proposition 43 $\exp(G) = 2 \Rightarrow G$ abélien

Exemple 44. $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^{\mathbb{N}}$ est d'exposant fini mais non fini.

Théorème 45. (Burnside) $G \leq GL_n(\mathbb{C})$ alors G est fini ssi il est d'exposant fini

Définition 46 On note $G = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} / \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \right\}$

G fini de cardinal 2^n

Application $GL_n(\mathbb{C}) \simeq GL_m(\mathbb{C}) \Rightarrow n = m$.

B. $K = \mathbb{R}$

(6)

Proposition 47 Soit $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ compact alors il existe une forme quadratique q tel que $G \subset O(q)$. Ou alors de manière équivalente G est conjugué d'un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$

Remarque 48 Pour connaître les sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{R})$ il suffit de connaître les sous-groupes finis de $O_n(\mathbb{R})$.

(11)

Proposition 49 Les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ sont cycliques.

Proposition 50 : Les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ pas inclus dans $SO_2(\mathbb{R})$ sont isomorphes à D_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ sont

(1) Sont isomorphes à : $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, D_{2m}, A_4, S_4, A_5.

(5) Proposition 51. Soit $G < GL_n(\mathbb{Z})$ fini, alors $|G| \leq 3^{n^2}$.

C. $K = \mathbb{F}_q$

q puissance d'un nombre premier

(3) Proposition 52 $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) |SL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$

Application 53: nombre de matrices de sur $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est

$$\sum_{m_1+\dots+m_r=n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{r} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

Application 54. Le nombre de matrices nilpotentes sur $M_n(\mathbb{F}_q)$ vaut $q^{n(n-1)}$

(1) Définition 55. On définit $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ comme le quotient $SL_n(\mathbb{F}_q)$ par son centre

Théorème 56 : $PSL_n(K)$ est simple pour $n \geq 3$ ou $n = 2$ et $|K| > 3$.

Proposition 57: Isomorphismes exceptionnels

(7) Proposition 58 Tout groupe fini G se plonge dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$

Proposition 59 $GL_n(\mathbb{F}_p)$ admet un sous-groupe d'ordre $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$

IV p-groupes et théorème de Sylow

(7) Soit p un nombre premier

Définition 60: Un p-groupe est un groupe d'ordre une puissance de p.

Proposition 61 : Soit G un p-groupe $|G| = p^\alpha$ alors G possède un sous-groupe distingué d'ordre p^β pour tout $\beta \leq \alpha$.

B. Théorème de Sylow

(7) Définition 62 Soit G fini $|G| = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$. On appelle p-sylow de G tout sous-groupe de G cardinal p^α.

Théorème 63. (Sylow 1) : Tout groupe fini admet un p-sylow.

Théorème 64

On suppose G fini et $p \mid |G| = p^\alpha m$ $p \nmid m$.

i) Si $H < G$ $|H| = p^\beta$ alors H est inclus dans un p-sylow de G

ii) Les p-sylow de G sont conjugués

iii) Si on note n_p le nombre de p-sylow on a

$$n_p \equiv 1 [p] \quad \text{et} \quad n_p \mid m$$

Corollaire 65 Soit S un p-sylow de G. Alors

$S \triangleleft G \iff S$ est l'unique p-sylow de $G \iff n_p = 1$

Application 66 Un groupe d'ordre 63 est pas simple

Application 66. Un groupe d'ordre 15 est cyclique.

Application 67 : p, q premiers alors un groupe d'ordre pq, p^2q n'est pas simple

Application 68 : p, q, r premiers alors un groupe d'ordre pqr n'est pas simple. DVP

Application 69 : A_5 est le seul groupe d'ordre 60 simple

Proposition 70: Tout groupe abélien est produit direct de p-sylows.

Application 71 : Soit G abélien de cardinal n et $d \mid n$ alors G admet un sous-groupe d'ordre d.

(1)

1.5 Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Exemples et applications.

Références utilisées :

— (1) *Eléments de théorie des groupes* J.Calais
— (2) *Théorie des groupes* F.Ulmer
— (3) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
— (4) *Algèbre* X.Gourdon
— (5) *Objectif Agrégation* V.Beck J.Malick G.Peyré
— (6) *Oraux X-ENS Mathématiques Volume* 6 S.Francinou H.Gianella S.Francinou
— (7) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni

(1,2)

On se fixe un entier $n \geq 1$, E ensemble fini de cardinal n.

I. Généralités

A. Permutations

Def 1 : On note S_n l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$

Proposition 2 : S_n est un groupe pour la composition

On a $S(E) \simeq S_n$ où $S(E) = \{f : E \to E \text{ bijective}\}$

On représente σ comme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lire $\sigma(1)=4$, $\sigma(2)=5$ etc....

Def 3 : Soit $r \in [\![2,n]\!]$. On appelle r-cycle une permutation σ telle qu'il existe $(x_1,\dots,x_k) \in [\![1,n]\!]^k$,

$$\begin{cases} \sigma(x_i) = x_{i+1} & 1 \leq r \leq k-1 \\ \sigma(x_k) = x_1 \\ \sigma(y) = y & y \in [\![1,n]\!] \setminus \{x_1,\dots,x_r\} \end{cases}$$

Notation 4 : On note $(x_1 \dots x_r) = \sigma$

Def 5 : Un 2-cycle est appelée une transposition

Proposition 6 : Un r-cycle est d'ordre r

Proposition 7 : S_n est fini de cardinal $n!$, c'est un groupe non commutatif dès que $n \geq 3$

Proposition 8 : On a $\begin{cases} Z(S_n) = S_n & n \in \{1,2\} \\ Z(S_n) = \{id\} & n \geq 3 \end{cases}$

Def 9 : Soit $\sigma \in S_n$, on note $\mathrm{supp}(\sigma)$ et on l'appelle le support de σ l'ensemble :

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{ i \in [\![1,n]\!] \mid \sigma(i) \neq i \}$$

Proposition 10 : Soit $(\sigma,\sigma') \in S_n^2$

i) $\sigma(\mathrm{Supp}(\sigma)) = \mathrm{Supp}(\sigma^{-1}) = \mathrm{Supp}(\sigma)$

ii) $\forall r \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Supp}(\sigma^r) \subset \mathrm{Supp}(\sigma)$

iii) Si $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathrm{Supp}(\sigma') = \emptyset$ alors σ et σ' commutent

(1,1)

Remarque 11 :
- i) n'a pas égalité des $\sigma(i)$ en général prendre $\sigma \neq id$ et $r = o(\sigma)$
- iii) réciproque fausse, $\sigma \neq id$ $\sigma' = \sigma^{-1}$.

(2,1)

Théorème 12 : Tout $\sigma \in S_n$ s'écrit comme produit $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_m$ de cycles σ_i dont les supports sont deux à deux disjoints et correspondent aux orbites de l'action de σ sur $[\![1,n]\!]$ par $\sigma \cdot i = \sigma(i)$. Cette décomposition est unique à l'ordre près :

Exemple 13 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1\,2\,4)(3\,5)$

Def 14 : On appelle type d'une permutation $\sigma \in S_n$ et on note $[l_1,\dots,l_m]$, la liste des cardinaux des orbites qui interviennent dans la décomposition de σ en cycles à support disjoints

Exemple 15 : Dans l'exemple 13 le type de σ est $[3,3,1]$

Proposition 16 : Soit σ de type $[l_1,\dots,l_m]$ alors $o(\sigma) = \bigvee_{i=1}^{m} l_i$

Théorème 17 : (Classes de conjugaisons)
Deux permutations σ et ρ de S_n sont conjuguées si et seulement si elles sont de même type.

Proposition 18 : Pour trouver une "permutation de passage" on utilise la formule

$$\sigma(i_1 \dots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k))$$

B. Signature et groupe alterné

Lemme 19 : Tout ℓ-cycle est produit de $\ell-1$ transpositions
En particulier, les transpositions engendrent S_n.

Def 20 : Soit $\sigma \in S_n$, on appelle signature de $\sigma \in S_n$ et on note $\varepsilon(\sigma)$ le nombre rationnel $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$

Exemple 21 : $\varepsilon((1\,2)) = -1$.

(2)

Proposition 22 :
- $\varepsilon : S_n \to (\mathbb{Q}^*, \times)$ est un morphisme de groupes
- $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\#\sigma}$ où $\#\sigma$ est le nombre de transpositions qui interviennent dans une décomposition de σ en produit de transpositions en particulier, la parité de ce nombre est indépendante de la décomposition choisie
- Si σ est de type $[l_1, \dots, l_m]$ alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\sum_{i=1}^{m} l_i - m}$

Proposition 23 : Si $n \geq 2$ $\varepsilon(S_n) = \{\pm 1\}$

Proposition 24 : ε est le seul morphisme $S_n \to \{\pm 1\}$ non trivial.

(2)

Def 25 : On pose $A_n = \ker(\varepsilon) \lhd S_n$ le sous-groupe de S_n formé des permutations paires. On a $|A_n| = \frac{n!}{2}$

II Etude de A_n (et S_n)

(1)

Proposition 26 : S_n est engendré par les transpositions $(1\,k)$

Proposition 27 : S_n est engendré par les transpositions $(k\ k+1)$

Proposition 28 : S_n est engendré par $(1\,2)$ et $(1\,2\,\dots\,n)$

Proposition 29 : A_n est engendré par les 3cycles.

Proposition 30 : Deux 3-cycles sont conjugués dans S_n, et même dans A_n pour $n \geq 5$.

(3)

Théorème 31 : Pour $n \neq 4$ A_n est simple

Application 32 : Soit $n \geq 5$ les sous groupes distingués de S_n sont $\{id\}$, A_n et S_n.

Application 34 : On a pour $n \geq 5$ $D(A_n) = A_n$ et $D(S_n) = A_n$ pour $n \geq 2$

Application : A_n est le seul sous-groupe d'indice 2 de S_n

Corollaire 35 : Pour $n \geq 5$ les groupes S_n et A_n ne sont pas résolubles

(3)

Proposition 36 . Soit $[S_n : H] = n$, alors $H \simeq S_{n-1}$.

Proposition 37 . A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60.

(3)

Def 38 : On note V_4 le sous-groupe de A_4 formé des doubles transpositions, on a $V_4 = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2$

Proposition 39 : $V_4 \lhd A_4$, ainsi A_4 n'est pas simple

Proposition 40 : $D(A_4) = V_4$.

Corollaire 41 :
- $D(S_n) = D(A_n) = \{id\}$ $n \in \{1, 2\}$
- $D(S_3) = A_3$ $D(A_3) = \{id\}$ $n = 3$
- $D(S_4) = A_4$ $D(A_4) = V_4$ $D(V_4)$ $n = 4$
- $D(S_n) = A_n$ $D(A_n) = A_n$ $n \geq 5$

III Applications du groupe symétrique

A. Déterminants

(4)

Soit E un K espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Def 42 : Une application $f : E^p \to K$ est dite multilinéaire (p-linéaire) alternée si :
i) f est linéaire par rapport à chacune de ses variables
ii) $\forall \sigma \in S_n$ $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$

Proposition 43 : L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1. Etant donnée une base de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée qui vaut 1 sur cette base

Def 43 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on note $\det_{\mathcal{B}}$ la forme n-linéaire alternée de la proposition précédente et on l'appelle le déterminant dans la base $\mathcal{B}$. On a pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i,i} \in K$
$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$

(4)

Def 44 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E, on note $\det_{\mathcal{B}}(f) = \det_{\mathcal{B}}[f(e_1), \dots, f(e_n)]$ $(\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n))$ le déterminant de f dans la base $\mathcal{B}$. En fait, cela ne dépend pas de la base choisie, on note cette quantité $\det(f)$.

Def 45 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on note $\det(A)$ le déterminant de A étant vu comme le déterminant de l'endomorphisme $X \mapsto AX$.

Proposition 46.

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

(5)

Théorème 47 : Frobénius - Zolotarev. Soit $\varphi \in Gl(\mathbb{F}_p)$ alors si φ vu comme permutation de $\mathbb{F}_p$, $\varepsilon(\varphi) = \left(\frac{\det(\varphi)}{p}\right)$

Application 48 : $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

D1

B. Morphisme de Cayley et matrices de permutation

Proposition 47 : Soit G un groupe fini de cardinal n, on a un morphisme injectif $G \hookrightarrow S_n$.

Application 48 : Soit q impair ≥ 3, alors tout groupe d'ordre $2q$ n'est pas simple.

Def 49 : A $\sigma \in S_n$ on associe $P_\sigma \in Gl(K)$ définie par $P_\sigma(i,s) = \delta_{i,\sigma(s)}$

Proposition 50 : $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ $\mathrm{tr}(P_\sigma) =$ nb de points fixe de σ

Proposition 51 : $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes

(3)

Application 52 : Soit G un groupe fini de cardinal n, alors il existe un p-sylow de G. $(p \mid n)$.

(5)

Proposition 53 : σ, τ conjugués $\Leftrightarrow$ $P_\sigma \overset{S}{\sim} P_\tau$

C. Dénombrement et permutation aléatoire

Proposition 53 : Il y a $(k-1)!\binom{n}{k}$ k-cycles dans S_n

(6)

Def 54 : Un dérangement de S_n est une permutation sans point fixe, on note d_n le nombre de dérangement de S_n.

Proposition 54 : $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$

Application 56 : Parapluies

Def 57 : Une involution de S_n est une permutation telle que $\sigma^2 = Id$, on note I_n le nombre d'involution de S_n.

Proposition 58 : $I_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \frac{n!}{(n-2k)!\, k!\, 2^k}$

Application 59 : $\frac{n!}{\sqrt{n!}} \leq I_n \leq \frac{n!}{\sqrt{n!}} e^{\frac{n}{2} + \sqrt{n}}$

Proposition 60 : (Admis) $I_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \sqrt{n}}$

D2

Proposition 59. On note N_n le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n.

Alors $\mathbb{E}(N_n) = 1$ $V(N_n) = 1$.

(7)

D. Groupe symétrique et géométrie

Def 60 : Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$. On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries qui laissent $\mathcal{E}$ stable.

On note $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries positives qui laissent $\mathcal{E}$ stable

Proposition 61 :

Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ le cube, alors

$\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) \simeq S_4$ et $\mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

1.6 Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes de GL(E). Applications.

Références utilisées :

— (1) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
— (2) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
— (4) *Invitations aux formes quadratiques* C. Séguin Pazzis
— (5) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie - sous-groupe de $GL(E)$. Applications.

106

$\mathbb{K}$ corps. E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I Groupe linéaire

A. Définitions

Définition 1: On appelle groupe linéaire de E le groupe des automorphismes de E.

Proposition 2: En se fixant une base de E on a un isomorphisme $GL(E) \simeq GL_n(\mathbb{K})$ où $GL_n(\mathbb{K})$ est le groupe des matrices de taille $n \times n$ inversibles. Nous ferons constamment cette identification dans la suites.

Définition 3: On appelle groupe spécial linéaire et on note $SL(E)$ l'ensemble $\{u \in GL(E) \mid \det(u) = 1\}$ c'est le sous-groupe des transformations préservant le volume.

Proposition 4: $SL(E) \triangleleft GL(E)$ et $GL(E)$ est produit semi-direct de $SL(E)$ par $\mathbb{K}^*$.

Proposition 5: Si G est un groupe fini alors G se plonge dans un $GL_n(\mathbb{K})$

Application 6: Soit G un groupe fini et p un nombre premier qui divise $|G|$ alors G admet un p-sylow

Proposition 7: $GL_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{K})$

Application 8: Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Proposition 9:

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$$

$$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$$

B. Générateurs

Définition 10. Soit H un hyperplan de E. On dit que u est une dilatation d'hyperplan H si $u|_H = id_H$ et si pour $x \notin H$ $u(x) = \lambda x$ $\lambda \neq 1$

Définition 11 Soit $H = \ker(\varphi)$ un hyperplan de E. On dit que $u \in GL(E)$ est une transvection d'hyperplan H et de droite D s'il existe $a \in H \setminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in E$ $u(x) = x + a\varphi(x)$

Proposition 12 Soit τ une transvection de droite D et $v \in GL(E)$ alors $v \circ \tau \circ v^{-1}$ est une transvection de droite $v(D)$ et d'hyperplan $v(H)$.

Proposition 13 Les transvections engendrent $SL(E)$

Proposition 14 Les transvections et dilatations engendrent $GL(E)$

Proposition 15. Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$ alors M peut être ramenée à la matrice I_n par un nombre fini de multiplications par des matrices de transvections / dilatations. (Pivot de Gauss).

Application 16 $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Application 17 $GL_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \mid \det(M) > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \mid \det(M) < 0\}$

C. Centres, groupes dérivés

Proposition 18:

$Z(GL(E)) \simeq \mathbb{K}^*$

$Z(SL(E)) \simeq \{\lambda \in \mathbb{K}^* \mid \lambda^n = 1\}$

Application 19: $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes

Proposition 20:

- $D(GL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$ $n \neq 2$ $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$
- $D(SL_n(\mathbb{K})) = SL_n(\mathbb{K})$ $n \neq 2$ $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$

Application 21: Frobenius-Zolotarev

Réf symbole Legendre.

101

(1)

Remarque 22: $O(GL_2(\mathbb{F}_2)) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Définition 23: On appelle groupe projectif (spécial) linéaire les groupes $PGL(E) := \frac{GL(E)}{Z(E)}$ $PSL(E) := \frac{SL(E)}{Z(SL(E))}$

De même $PGL_n(K) = \frac{GL_n(K)}{K^*}$ $PSL_n(K)$

Proposition 24: Le groupe $PSL_n(K)$ est simple sauf pour $n = 2$ $K = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$.

II Actions du groupe linéaire

A. Action sur les droites de E

(1)

Proposition 25: $GL(E)$ agit transitivement sur les droites de E : $\frac{E}{K^*}$ on a donc un morphisme $p: GL(E) \to S_{\frac{E}{K^*}}$

Application 26: On a les isomorphismes suivants:

$GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) = PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$

$PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$ $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$

B. Action par conjugaison

(2,3)

Définition 27: Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on note $S(A)$ son orbite sous l'action de $GL_n(K)$ par conjugaison. Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables.

Proposition 28: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

A diagonalisable $\iff S(A)$ fermée

A nilpotente $\iff 0 \in \overline{S(A)}$

Proposition 29: Nombre de matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$.

C. Action par translation gauche / droite.

(4)

C. Action par congruence

Définition 30: On dit que $GL_n(K)$ agit sur $\mathcal{M}_n(K)$ par congruence si l'action est $P.M = PMP^t$

Proposition 31: Deux formes quadratiques sur E sont équivalentes ssi leurs matrices dans une base quelconque sont congruentes.

Théorème 32: $K = \mathbb{C}$ deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont congruentes ssi elles ont même rang.

Théorème 33: Théorème de Sylvester

Théorème 34: $K = \mathbb{F}_q$. Deux matrices sont congruentes ssi elles ont même rang et même déterminant dans $\frac{\mathbb{F}_q^*}{(\mathbb{F}_q^*)^2}$

Application 35: Réciprocité quadratique: Soit p, q deux nombres premiers impairs distincts alors:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$

III Sous-groupes de $GL(E)$

(5)

A. Groupe orthogonal

Définition 36: On appelle groupe orthogonal d'une forme quadratique q et on note $O(q)$ l'ensemble $O(q) = \{u \in GL(E) / q \circ u = q\}$

Définition 37: Si $E = \mathbb{R}^n$ et $q(x) = \langle x, x \rangle$ produit scalaire canonique on définit $O(E) := O(q)$. On a un isomorphisme

$O(E) \simeq O_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tMM = I_n\}$

(5)

Définition 38 : On définit $SO_n(\mathbb{R})$ par $O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$.

Proposition 39 : Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Proposition 40 : Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact et possède deux composantes connexes par arcs.

Théorème 41 : (Décomposition polaire) On a un homéomorphisme $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ $O(p,q)$

Application 42 : $O_n(\mathbb{R})$ est le plus gros sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

Proposition 43 : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe une forme quadratique q telle que $G \subset O(q)$

Proposition 44 : Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

B. Petits sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$

(2)

Théorème 45 (Burnside) Tout sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini

Définition 46 : On suppose $car(K) \neq 2$, alors le groupe $G := \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} / \varepsilon_i \in \{1, -1\} \right\}$ est un sous-groupe de cardinal 2^n.

Application 47 : On suppose $car(K) \neq 2$ alors si on a un isomorphisme $GL_n(K) \simeq GL_m(K)$ alors $n = m$.

Proposition 48 : Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ ($Ch(\mathbb{Z}) = \{M \in Ch(\mathbb{Z}) / \det(M) = 1\}$) alors $|G| \leq 3^{n^2}$

C. $GL_n(K)$ et exponentielle de matrice.

Définition 49 : On définit pour $A \in Ch(\mathbb{C})$:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Proposition 50 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

Proposition 51 : $\exp(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \{P^2 / P \in GL_n(\mathbb{R})\}$

Application 52 : Théorème de Floquet.

Proposition 53 : $GL_n(\mathbb{R})$ n'admet pas de sous-groupes arbitrairement petits.

Définition 54 : Soit $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe fermé de $Ch(\mathbb{R})$ on définit $\mathcal{L}_G = \{M \in Ch(\mathbb{R}) / \forall t \in Ch(\mathbb{R}),\ e^{tM} \in G\}$

Proposition 55 : $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exemple 56 : $\mathcal{L}_{SO_n(\mathbb{R})} = A_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques)

Théorème 57 : Cartan Von-Neumann.

Dire GL_n variété de dim n^2-1 et $\mathcal{L}_{SL_n} = Ker(tr)$

D. $GL_n(\mathbb{Z})$

préserve le réseau $\mathbb{Z}^n$.

E. Matrices triang sup.

préserve les drapeaux.

avant C.

Sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ $(O_2(\mathbb{R}) / SO_3(\mathbb{R})$ $SL_2(\mathbb{R})$.

1.7 Leçon 108 : Exemples de parties génératices d'un groupe. Applications.

Références utilisées :

- (1) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas
- (2) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
- (3) *Théorie des groupes* F.Ulmer
- (4) *Eléments de théorie des groupes* J.Calais

Exemple de parties génératrices d'un groupe. Applications.

1088

Soit G un groupe.

I Définition, Exemples

A. Définition

(1)

Proposition 1 : Soit G un groupe et $(G_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupe de G. Alors $\bigcap_{i\in I} G_i$ est un sous-groupe de G.

Définition 2 : Soit $A \subset H$ on note $\langle A\rangle = \bigcap_{\substack{A\subset H \\ H<G}} H$ c'est un sous-groupe de G.

Proposition 3 : $\langle A\rangle$ est le plus petit sous-groupe de G contenant A.

Définition 4 : Si $\langle A\rangle = G$ on dit que A est une partie génératrice de G.

Exemple 5 : $G = \mathbb{Z}$ $\langle\{1\}\rangle = \mathbb{Z}$

Définition 6 : Soit $(n_1,\dots,n_k)$ des entiers, on appelle pgcd des $(n_i)_{1\le i\le k}$ l'unique entier positif d tel que $\langle\{n_1,\dots,n_k\}\rangle = d\mathbb{Z}$.

Définition 7 : Si G engendré par une partie finie on appelle $rg(G)$ le cardinal minimal d'une partie engendré G.

Proposition 8 : Si G est fini de cardinal n alors $rg(G) \le \log_2(n)$

B. Groupes monogènes, groupes cycliques

(1)

Définition 9 : G est dit monogène s'il est engendré par un seul élément ie il existe $x\in G$ tel que

$$G = \{x^n \mid x\in\mathbb{Z}\}$$

Un tel groupe est abélien

Définition 10 : Si G monogène et fini alors G est dit cyclique

Proposition 11 : Supposons G monogène alors :

- Si G infini $G \simeq \mathbb{Z}$
- Si G fini de cardinal n $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exemple 12 : Si $|G| = p$ premier alors G cyclique

Proposition 13 : Soit G un groupe cyclique de cardinal n alors pour d divisant n il existe un unique sous-groupe de G de cardinal d, de plus ce sous-groupe est cyclique.

C. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(2)

Proposition 14 : Soit $k\in\mathbb{Z}$ il y a équivalence entre.

- $\bar{k}$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
- $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
- $k\wedge n = 1$

Définition 15 : On note $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$ l'indicatrice d'Euler

Proposition 16 : $n = \sum_{d\mid n} \varphi(d)$ $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ $n\wedge m = 1$

Application 17 : $\mathbb{F}_q$ un corps fini alors $\mathbb{F}_q$ cyclique.

Application 18 : Soit p premier impair, comme 8 divise p^2-1 il existe $\xi \in \mathbb{F}_{p^2}$ $o(\xi) = 8$. On peut alors prouver $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

(2')

Proposition 19 : Soit p premier impair alors

$$\left(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}\right)^\times \simeq \left(\mathbb{Z}/\varphi(p^\alpha)\mathbb{Z}\right)$$

Proposition 20 : $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^\times = \{1\}$ $\left(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\right)^\times \simeq \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$

$\alpha \ge 3$ $\left(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}\right)^\times \simeq \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^\times \times \left(\mathbb{Z}/2^{\alpha-2}\mathbb{Z}\right)$

Proposition 21 : $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$ est cyclique ssi $n = 2, 4, 2p^\alpha, p^\alpha$ avec p premier impair.

Proposition 22 : $Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^\times$

$|Hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})| = n\wedge m$

(2')

Théorème 23 : (Structure des groupes abéliens finis) Soit G abélien il existe d'uniques entiers k et $m_1,\dots,m_k$ tels que m_i divise m_{i+1} et

(3)

(3)

$G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$

Application 24 : Il y a $\prod_{i=1}^{k} p(\alpha_i)$ groupes abéliens d'ordre $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. $p(k) =$ nb de partition de k.

D. Groupe dérivé

(4)

Définition 25 On appelle commutateur de $(x,y) \in G^2$ l'élément $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$

Remarque 26 $[x,y] = 1$ ssi x et y commutent

Définition 27. On appelle groupe dérivé et on note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs.

Proposition 28 : $\frac{G}{D(G)}$ est le plus gros quotient abélien de G

Proposition 29 : $D(G) \triangleleft G$.

II Exemples de théorie des groupes

A. Groupe symétrique / alterné

(2,1)

Proposition 30 : S_n est engendré par les transpositions

Application 31 : A_n est engendré par les 3-cycles

Application 32 : Le seul morphisme non trivial $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ est la signature

Application 33 : A_n est le seul sous-groupe d'indice 2 de S_n. A_4 n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

Proposition 34 : Isométrie du cube et tétraèdre

DVP1

Proposition 35 : Les 3-cycles sont conjugués dans A_n $n \geq 5$

Application 36 : $D(A_n) = D(S_n) = A_n$ $n \geq 5$

Théorème 37 : Soit $n \geq 5$ alors A_n est simple

Remarque 38 : A_4 n'est pas simple

(2,1)

Application 39 : Soit $n \geq 5$ et $H \triangleleft S_n$ alors $H \in \{\{id\}, A_n, S_n\}$

Application 40 : Soit $n \geq 5$ et $H < S_n$ d'indice $2 \leq k \leq n-1$ alors $k = 2$ $H = A_n$

Proposition 41 : $Aut(S_n) = Int(S_n)$ pour $n \neq 6$

B. Groupe dièdral

(4)

Définition 42 Notons P_n un polygone régulier à n sommets dans $\mathbb{R}^2$, on note W_n le groupe des isométries qui laissent invariants P_n.

Proposition 43 D_n est fini d'ordre $2n$, non abélien pour $n \geq 3$.

Proposition 44 : D_n est engendré par r = rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s une symétrie telle que $o(rs) = 2$

Proposition 45 : Si G est un groupe engendré par deux éléments (a,b) tels que $o(a) = n$ $o(b) = 2$ et $o(ab) = 2$ alors $G \simeq D_n$.

III Sous-groupes de $\mathbb{R}$

Proposition 46 : Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est dense ou monogène

Application 47 : (Equation de Pell-Fermat). Soit d sans facteur carré. Il existe $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ $\varepsilon_1 > 1$ telle que toute les solutions de $x^2 - dy^2 = 1$ sont données par $x_n + y_n\sqrt{d} = \varepsilon_1^n$.

IV Groupes de matrices

(1)

A. Groupe (spécial) linéaire

Définition 46 : On note $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ $i \neq j$ transvection de rapport λ

Définition 47 : On note $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$ $\alpha \neq 0$ dilatation de rapport α.

Proposition 48 : $GL_n(K)$ est engendré par les matrices

de transvections et dilatations
$SL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvections.
Application 49 :
$Z(GL_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in K^*\}$ $Z(SL_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda^n = 1\}$

(1)
Application 50 : Si $K = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$ on suppose $n \geq 3$
- $D(GL_n(K)) = D(SL_n(K)) = SL_n(K)$

Remarque 51 : $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ $D(S_3) = A_3$ $D(A_3) = \{1\}$.
$GL_2(\mathbb{F}_3) \sim$

Application 52 : Connexité par arcs

(4)
B. Groupes projectifs

Définition 53 : On appelle groupe projectif linéaire le groupe $PGL_n(K) = \frac{GL_n(K)}{Z(GL_n(K))}$

Définition 54 : On appelle groupe projectif spécial linéaire le groupe $PSL_n(K) = \frac{SL_n(K)}{Z(SL_n(K))}$

Proposition 55 : On suppose $n \geq 3$ alors $PSL_n(K)$ est simple. Si $n = 2$ $PSL_n(K)$ est simple pour $|K| \geq 4$

Proposition 56
$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$
$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = |PGL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$
$|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{d}$ $d = n \wedge (q-1)$

Application 57 : (Isomorphismes exceptionnels)
- $PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$
- $PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_4) = A_5$

C. Groupes orthogonaux.

On considère ici E un K-ev de dim finie et q une forme quadratique non dégénérée sur E.

Définition 58 : On note $O(q) = \{f \in GL(E) \mid q \circ f = q\}$

Proposition 59 : Si $f \in O(q)$ $|\det(f)| = 1$

Définition 60 : On note $SO(q) = O(q) \cap SL(E)$ on a $SO(q) \lhd O(q)$

Proposition 61 : (On suppose $K = \mathbb{R}$) si q est définie
$O(q) \simeq O_n(\mathbb{R})$ $SO(q) \simeq SO_n(\mathbb{R})$

Définition 62 : Une symétrie orthogonale est une symétrie dans $O(q)$

Définition 63 : Une réflexion orthogonale est une symétrie fixant un Hyperplan

Proposition 64 : $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales.

Application 65 : $Z(O(q)) = \{\pm id\}$

Définition 66 : Un retournement est une symétrie orthogonale qui fixe un espace de dim $n-2$

Proposition 67 : $SO(q)$ engendré par les retournements

Application 68 : $Z(SO(q)) = \begin{cases} \{Id\} & n \text{ impair} \\ \{\pm Id\} & n \text{ pair} \end{cases}$

Application 69 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

/ OVP 2

1.8 Leçon 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Applications.

Références utilisées :

- (1) *Algèbre* X.Gourdon
- (2) *Arithmétique modulaire* JP.Lamoitier
- (3) *Théorie des groupes* F.Ulmer
- (4) *Eléments de théorie des groupes* J.Calais

(2)

n désigne un entier naturel non nul

I Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

A. Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Proposition 1 : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est l'unique (à isomorphisme près) groupe cyclique de cardinal n.

Proposition 2 : Pour tout $d \mid n$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admet un unique sous groupe de cardinal d c'est le sous-groupe engendré par $\frac{n}{d}$.

Corollaire 3 : $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$

Application 4 : Soit K un corps et $G \subset K^*$ fini, alors G est cyclique

Proposition 5 : Soit n, m deux entiers, il y a $n \wedge m$ morphismes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Proposition 6 : Soit $k \in \mathbb{Z}$ alors $\bar{k}$ engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $k \wedge n = 1$.

B. L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Proposition 7 : Soit $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ssi $k \wedge n = 1$.

Théorème 8 : (Reste chinois) Soit n, m deux entiers alors :

$$n \wedge m = 1 \iff \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

Application 9 : Résolution d'un système de congruence

Proposition 10 : Si $n \wedge m = 1$ on a un morphisme de groupes

$$(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$$

Application 11 : φ est multiplicative

Corollaire 12 : $\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} (1 - \frac{1}{p})$ où le produit est pris sur les nombres premiers divisant n.

Proposition 13 : Les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $\frac{d\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ pour $d \mid n$

Proposition 14 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre ssi n premier.

Proposition 15 : $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

C. Dual et classification des groupes abéliens finis

(3)

D. Etude du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

Proposition 13 : Soit p un nombre premier alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique

Proposition 14 : Soit p un nombre premier impair alors $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ est cyclique

Proposition 15 : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times = \{1\}$ $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Pour $\alpha \geq 3$ $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{\alpha-2}\mathbb{Z}$

Proposition 16 : Soient $G_1 \dots G_K$ des groupes finis alors $G_1 \times \dots \times G_K$ cyclique $\iff \forall i$ G_i cyclique et $|G_i| \wedge |G_j| = 1$ $i \neq j$

Application 17 : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique ssi n est de la forme $1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$ $p \geq 3$ impair.

II Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

(1)

Proposition 18: Soit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$ alors $a^p \equiv a\ [p]$ (Théorème de Fermat)

Proposition 19: (Théorème d'Euler) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a premier avec n, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$

Application 20: Soient p, q deux nombres premiers distincts. Soient c, d deux entiers tels que $cd \equiv 1\ [\varphi(n)]$ alors pour $t \in \mathbb{Z}$ $t^{cd} \equiv t\ [n]$

(2)

Proposition 21: (Théorème de Wilson). Un nombre p est premier ssi $(p-1)! \equiv -1\ [p]$

Application 22: Si $p \equiv 1\ [4]$ alors -1 est un carré mod p

Théorème 24: (Théorème de Sophie Germain) Soit p premier tel que $q = 2p+1$ soit aussi premier. Alors l'équation $x^p + y^p = z^p$ n'a pas de solution non triviale (i.e. $xyz \not\equiv 0\ [p]$).

III Le cas où $n = p$ est premier

(3)

Définition 25: On note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Proposition 26: Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique corps de cardinal p^n, on le note $\mathbb{F}_{p^n}$ c'est le corps de décomposition de $X^{p^n} - X$ sur $\mathbb{F}_p$.

Définition 27: On note $\mathbb{F}_p^2$ l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_p$ et $\mathbb{F}_p^{*2}$ l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_p^*$.

Proposition 28:
- $\mathbb{F}_{2^k}^2 = \mathbb{F}_{2^k}$
- p impair $\mathbb{F}_p^{*2}$ est un sous-groupe de $\mathbb{F}_p^*$ de cardinal $\frac{p-1}{2}$. De plus $|\mathbb{F}_p^2| = \frac{p+1}{2}$

On suppose p impair jusqu'à la fin de la section

Définition 29: Soit $a \in \mathbb{Z}$ on définit son symbole de Legendre par $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \text{ carré mod } p \\ 0 \text{ si } p \mid a \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$

Proposition 30: $\left(\frac{a}{p}\right)$ ne dépend que de la classe de a mod p on peut ainsi définir $\left(\frac{a}{p}\right)$ pour $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Proposition 31: $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$

Application 32: La réciproque de l'application 22 est vraie.

Théorème 33: (Théorème des deux carrés) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors n est somme de deux carrés ssi $\forall p \mid n$, $p \equiv 3\ [4] \Rightarrow v_p(n)$ pair

Proposition 34: (Lois complémentaires)
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

Lemme 35: Tout élément de $\mathbb{F}_p$ est somme de deux carrés.

Application 36: Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_p$.

Application 37: Loi de réciprocité quadratique. Soit p, q deux nombres premiers distincts. Alors:
$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Application 38: $y^2 = 4x + 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Il y a une infinité de nombres premiers $\equiv 1\ [12]$.

IV Applications des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

A. Tests de primalité

(5)

Proposition 39 : S'il existe $1 < a < n$ tel que $a^{n-1} \not\equiv 1 [n]$ alors n n'est pas premier.
Un tel a est appelé témoin de Fermat de la non primalité de n

Proposition 40 : (Nombre de Carmichael). Les conditions suivantes sont équivalentes.

- $\forall p \mid n \quad p-1 \mid n-1$
- $\forall 1 < a < n \quad a^{n-1} \equiv 1 [n]$

Exemple 41 : 561 est le plus petit nombre de Carmichael

Proposition 42 : Soit n impair $n-1 = 2^s t$ t impair
S'il existe $1 < a < n$ tel que $a^t \not\equiv 1 [n]$ et $a^{2^i t} \equiv -1 [n]$ pour $i \in [\![0, s-1]\!]$ alors n est composé.
Un tel a est appelé témoin de Miller

Proposition 43 : Si n impair composé alors au moins $\frac{3}{4}$ des entiers $1 \leq k \leq n$ sont des témoins de Miller pour n.

B. Polynômes irréductibles.

- Critère réduction mod p
- exemple + contre exemple
- Eisenstein
- exemple, $\forall p$, $X^n - 2$

C. Equation polynomiale

- CW
- $2 \in 2$ | 02

(6)

D. Des nombres premiers très grand

Définition 50 : On appelle $q$ème nombre de Mersenne le nombre $M_q = 2^q - 1$
Proposition 51 : M_q premier $\Rightarrow$ q premier $2^{q-1} \mid 01$
Théorème 52 : M_q premier $\Leftrightarrow$ $(2+\sqrt{3})^{\cdot} \equiv -1 [M_q]$
où $\sqrt{3}$ est une racine de 3 dans une extension de $\mathbb{Z}/M_q\mathbb{Z}$ qui en contient une.

Proposition 53 : (Test de Lehmer-Lucas). Soit $(L_n)_n \in \mathbb{Z}/M_q\mathbb{Z}$ définie par $L_0 = 4$ $L_{n+1} = L_n^2 - 2 [M_q]$.
Alors M_q est premier ssi $L_{q-2} \equiv 0 [M_q]$.

(2)

Application 54 : (Chiffrement RSA)

1.9 Leçon 121 : Nombres premiers. Applications.

J'ai oublié le théorème de progression arithmétique de Dirichlet.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre* X.Gourdon
— (2) *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* G.Tennenbaum
— (3) *Théorie des groupes* F.Ulmer
— (4) *Théorie de Galois* I.Gozard
— (5) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (6) *Cours d'Algèbre* M.Demazure

La lettre p désignera toujours un nombre premier

I Définitions, généralités

Définition 1: On dit qu'un nombre est premier s'il n'admet que deux diviseurs positifs.

Remarque 2: 1 n'est donc pas premier

Proposition 3: Un nombre n est premier ssi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Corps

Théorème 4: Tout entier naturel admet une unique (à l'ordre des facteurs près) décomposition en facteurs premiers

Définition 5: Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^n$ les uniques entiers positifs tels que $a_1\mathbb{Z} + \dots + a_n\mathbb{Z} = M\mathbb{Z}$ sont respectivement $\bigcap_{i=1}^{n} a_i\mathbb{Z} = N\mathbb{Z}$

appelés le pgcd et ppcm des a_i. On les note $\bigwedge_{i=1}^{n} a_i$ et $\bigvee_{i=1}^{n} a_i$.

Définition 6: Deux nombres a et b sont dits premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Proposition 7: (Bézout) a et b sont premiers entre eux ssi il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$

Proposition 8: Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ alors il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = a \wedge b$

Remarque 9: En pratique on utilise l'algorithme d'Euclide pour trouver de tels u et v.

Exemple 10:

II Répartitions et fonctions arithmétiques

Proposition 11: Crible d'Eratosthène en annexe

Proposition 12: L'ensemble des nombres premier est infini

Définition 13: fonction de möbius

Définition 14: fonction φ d'Euler

Proposition 15: $\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, $\sum_{d \mid n} \mu(d) = \delta_{n,1}$

Définition 16: fonctions arithmétiques . et la loi $*$ définie par $(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{d}{n}\right)$

Proposition 17: inversion de Möbius

Définition 18: Série de Dirichlet $f_a(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$

Exemple 19: $f_{\varphi}(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ $\mathrm{Re}(s) > 2$

Proposition 20: $f_{a*b} = f_a f_b$

Application 21: On prend deux entiers uniformément de $\mathbb{N}^*$. La proba qu'ils soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$.

Théorème 22: Th nombre premier $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$ Admis

Théorème 23: Th Nombres premiers équivaut à $\sum_{n \geq 0} \frac{\mu(n)}{n}$ converge de somme nulle

(2)

Proposition 24 : $v_p(n!) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

Application 25 : (Théorème de Mertens).

$\ln\left(\sum_{p \le x} \frac{\ln(p)}{p}\right) = \ln(x) + O(1)$ $\quad$ $\ln\left(\sum_{p \le x} \frac{1}{p}\right) \sim \ln(\ln(x))$

Conjecture 26 : Il existe une infinité de nombres premiers p, q tels que $|p-q| = 2$

III Applications en théorie des groupes, p-sylow

(3)

Définition 27 : Un groupe G est un p-groupe si G fini et $|G|$ est une puissance de p.

Proposition 28 : Soit G un p-groupe alors $Z(G)$ non trivial et G possède des sous groupes d'ordre d pour tout $d \mid |G|$.

Application 29 : Un groupe d'ordre p^2 est abélien donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ ou $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Définition 30 : Soit G un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha m$ $p \wedge m = 1$ Un p-sylow de G est un sous-groupe d'ordre p^α de G

Théorème 31 : Soit G un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha m$ $p \wedge m = 1$ alors :
- G possède un p-sylow
- Si n_p désigne le nombre de p-sylow de G alors
  $n_p \equiv 1 [p]$
  $n_p \mid m$

Application 32 : Un groupe d'ordre :
- pqr p, q, r premiers n'est jamais simple
- pq

(3)

Application 33 : Un groupe d'ordre 225 est cyclique

Application 34 : A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60

Application 35 : Soit G un groupe abélien de cardinal n alors G admet des sous-groupes H de cardinal d pour tout d divisant n.

III L'outil de la réduction modulo p

Remarque 36 : Si une équation a des solutions dans $\mathbb{Z}$ alors elle a des solutions dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Application 37 : $x^2 + 5y = 7$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 38 : Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, s'il existe p premier tel que P irréductible dans $\mathbb{F}_p$ alors P irréductible dans $\mathbb{Z}$.

(4)

Application 39 : $X^4 - 15X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}$

Contre-exemple 40 : $\Phi_8 = X^4 + 1$.

(5)

Théorème 40 : On suppose $q = 2p+1$ premier alors $x^p + y^p = z^p$ n'a pas de solutions non triviales

IV Corps finis

(4)

Soit $q = p^n$ et $\mathbb{F}_{p^n}$ le corps à p^n éléments. On suppose p impair

Définition 41 : On note $\mathbb{F}_{p^n}^{*2}$ l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_{p^n}$ et $\mathbb{F}_{p^n}^{*\alpha}$ ceux de $\mathbb{F}_{p^n}^{*}$

Proposition 42 : $\mathbb{F}_{p^n}^{*2}$ sous-groupe de $\mathbb{F}_{p^n}^{*}$ de cardinal $\frac{p^n - 1}{2}$

$|\mathbb{F}_{p^n}^{*2}| = \frac{p^n - 1}{2}$

(41)

Définition 43 : Symbole de Legendre

Proposition 44 : $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}$

- -1 carré des $\mathbb{F}_p \iff p \equiv 1 [4]$
- $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Application 45 : Infinité de nb premiers $\equiv 1 [4]$

Théorème 46 : (Réciprocité quadratique) Soit q un nombre premier impair distincts de p alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

)02

Application 47 : $-y^2 = 13x + 3$ pas de solution dans $\mathbb{Z}$
Il existe une infinité de nombres premiers $\equiv 1 [12]$

Définition 48 : $\Phi_n(X) = \prod_{k \wedge n = 1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$

$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$ - $\Phi_d \in \mathbb{Z}[X]$.

Application 49 : Il existe une infinité de nombres premiers $\equiv 1 [n]$ (n quelconque).

V Tests de primalités

(61)

Proposition 50 : Soit $a \in \mathbb{N}$ premier avec p alors $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

Conséquence 51 : S'il existe $1 < a < n$ tel que $a^{n-1} \not\equiv 1 [n]$ alors n pas premier (Fermat)
Un tel a est appelé témoin de la non-primalité de n.

Proposition 52 : (Nombre de Carmichael) : les conditions suivantes sont équivalentes.

- $\forall p \mid n \quad p-1 \mid n-1$
- $\forall 1 < a < n \quad a^{n-1} \equiv 1 [n]$

Exemple 53 : 561 est le plus petit nombre de Carmichael

Proposition 54 : Soit n impair $n-1 = 2^s t$ t impair
S'il existe $1 < a < n$ tel que $a^t \not\equiv 1 [n]$ et $a^{2^i t} \equiv -1 [n]$ pour $i \in [0, s-1]$ alors n est composé.
On tel a est appelé témoin de Miller

Proposition 55 : Si n impair composé alors au moins $\frac{3}{4}$ des entiers $1 < a < n$ sont des témoins de Miller pour n.

VI Extensions de corps et constructibilité

Définition 56 : Extension de corps

Théorème 57 : Base télescopique

Définition 58 : Extension cyclotomiques

Définition 59 : Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et $M \in \mathbb{R}^2$. On dit que M est constructible à la règle et au compas à partir de A s'il existe deux éléments droites et cercles construit à partir de A tels que M soit le point d'intersection

Définition 60 : M constructible s'il existe $A_0 = \{0, 1\} \subset \dots \subset A_n$ tels que $M \in A_n$ et $A_i = A_{i-1} \cup \{M_i\}$ est constructible à partir de A_{i-1}

Théorème 61 : Wantzel

Théorème 62 : Gauss - Wantzel

/03

1.10 Leçon 122 : Anneaux principaux. Exemples et applications.

Le plan est probablement pas ouf mais je le mets quand même.

Références utilisées :

— (1) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
— (2) *Théorie des Nombres* D.Duverney
— (3) *Cours de Calcul Formel : Algorithmes fondamentaux* P.Saux Picart
— (4) *Algèbre* X.Gourdon
— (5) *Arithmétique* M.Hindry
— (6) *Cours d'Algèbre* M.Demazure

Anneaux Principaux. Applications.

122

A désigne un anneau commutatif unitaire intègre. K un corps

I Anneaux principaux.

A. Généralités

(1)

Définition 1: Soit $I \subset A$ un idéal. I est dit principal s'il existe $a \in A$ tel que $I = aA$

Définition 2: A est dit principal si tout idéal de A est principal

Exemple 3: $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal $\langle 2, X \rangle$ n'est pas un idéal principal.

Exemple 4: Soit K un corps alors K est principal.

B. Les anneaux euclidiens

(1)

Définition 5: A est dit euclidien s'il existe une application $\delta : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ (appelée stathme) telle que si $a, b \in A \setminus \{0\}$ il existe $(q, r) \in A^2$ tels que $a = bq + r$ $\delta(r) < \delta(b)$ ou $r = 0$

Exemple 6: $\mathbb{Z}$ est euclidien pour le stathme $\delta(n) = |n|$
$K[X]$ est euclidien pour le stathme $\delta(P) = \deg(P)$

Proposition 7: Si A est euclidien alors A est principal

Lemme 8: Soit A euclidien. Il existe $x \in A \setminus A^\times$ tel que la restriction à $A^* \cup \{0\}$ de la projection canonique $A \to \frac{A}{\langle x \rangle}$ soit surjective.

Application 9: L'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ est principal non euclidien.

Proposition 10: $A[X]$ est principal ssi A est un corps

Corollaire 11: $K[X_1, \dots, X_n]$ est principal ssi $n = 1$.

Application 12: Si E K-ev de dim finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut définir son polynôme minimal comme l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal non nul $I = \{P \in K[X] / P(f) = 0\}$

II Arithmétique dans les anneaux.

(1)

A. Propriétés élémentaires

Définition 13: Soit $(a, b) \in A^2$. On dit que a divise b et on écrit $a | b$ s'il existe $c \in A$ tel que $b = ac$

Proposition 14: $a | b \iff \langle b \rangle \subset \langle a \rangle$

Définition 15: Soit $(a, b) \in A^2$. On dit que a et b sont associés si $a | b$ et $b | a$

Proposition 16: a et b sont associés ssi il existe $u \in A^\times$ tel que $a = bu$.

Contre-Exemple 17: Faux si A pas intègre par exemple avec $A = \frac{K[X,Y,Z]}{\langle X(1-YZ) \rangle}$

(2)

Définition 18: On dit que $p \in A$ est premier si pour tout $(a, b) \in A^2$ $p | ab \implies p | a$ ou $p | b$

Définition 19: On dit que $p \in A$ est irréductible si $p \notin A^\times$ et $p = ab$ avec $(a, b) \in A^2$ implique $a \in A^\times$ ou $b \in A^\times$

Proposition 20: premier $\implies$ irréductible

Remarque 21: La réciproque est fausse 2 est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{x + iy\sqrt{5} / (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ mais pas premier

B. Les anneaux factoriels

(1)

Définition 22: A est dit factoriel si tout élément a de A s'écrit comme produit $a = u p_1 \cdots p_r$ avec $u \in A^\times$ et $p_1, \dots, p_r$ irréductibles. De plus cette décomposition est unique dans le sens suivant:

Si $a = u p_1 \cdots p_r = v q_1 \cdots q_s$ alors:

- $r = s$ $\exists \sigma \in S_r$, p_i et q_i associés.

Exemple 23: $\mathbb{Z}$ est factoriel

(1)

Proposition 24: Si A est principal alors A est factoriel

Remarque 25: Réciproque fausse : $K[X,Y]$

Proposition 26 : (A factoriel) irréductible $\Rightarrow$ premier

Définition 27: pgcd et a et b.

Définition 28: a et b sont dits premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

On suppose A principal

Proposition 28: (A Factoriel). En choisissant un système $\mathcal{P}$ de représentants alors tout $a \in A$ s'écrit de manière unique

$$a = u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(a)} \quad \text{avec } u \in A^\times \text{ et } (v_p(a))_p \text{ presque nulle}$$

Proposition 29 (A factoriel) Soit $a = u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(a)}$ $b = v \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(b)}$

alors $a \wedge b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$ $\quad a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(v_p(a), v_p(b))}$

Proposition 30: $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle a \vee b \rangle$

Remarque 31: $\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle X, Y \rangle \neq \langle 1 \rangle$ dans $\mathbb{R}[X,Y]$

Lemme 32: (Gauss). Si a|bc et $a \wedge b = 1$ alors a|c.

Proposition 33: (Bézout) Si $a \wedge b = 1$ il existe $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $xa + by = 1$.

(3)

Proposition 32: (Algorithme d'Euclide.) (A euclidien)

Soit a, b deux éléments non nuls de A. Soit (r_i) la suite définie par $r_0 = a$ $r_1 = b$ et r_{i+2} est le reste d'une division de r_i par r_{i+1}. Alors il existe un entier n minimal tel que $r_{n+1} = 0$ on a alors $r_n = a \wedge b$.

Exemple 33:

Proposition 34: Théorème chinois

Application 35: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ cyclique ssi $n \in \{2, 4, 2q^\alpha, q^\alpha\}$ q premier impair

III La principalité en algèbre linéaire

(4)

E est un K-ev de dim $n \in \mathbb{N}^*$ $f \in \mathcal{L}(E)$

A. Polynôme minimal

Définition 34: On note π_f le polynôme de l'application 12 et on l'appelle le polynôme minimal de f.

Proposition 35: (Lemme des Noyaux). Ecrivons $\pi_f = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$ $P_1, \dots, P_r$ irréductibles alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i^{\alpha_i}(f))$$

De plus les projections sur les $\ker(P_i^{\alpha_i}(f))$ sont des polynômes en f

Remarque 36: On obtient ses polynômes par une relation de Bézout.

Définition 37: f est dit semi-simple si tout sev stable par f admet un supplémentaire stable par f

Proposition 38: f est semi-simple ssi π_f est sans facteurs carrés

Corollaire 39: f est semi-simple ssi π_f est scindé à racine simple dans une extension de K. ($\mathrm{car}(K) = 0$ ou K parfait)

B. Polynôme minimal ponctuel

Définition 40: Soit $x \in E$. l'idéal $I_x := \{P \in K[X] \mid P(f) \cdot x = 0\}$ est engendré par unique polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ qu'on appelle polynôme minimal ponctuel de f en x.

Proposition 41: $\exists x \in E,\ \pi_{f,x} = \pi_f$

Définition 42: f est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, f^{n-1}(x))$ base de E

Proposition 43: f cyclique $\Leftrightarrow \deg(\pi_f) = n$.

(4)

Théorème 44 : (Réduction de Frobénius). Il existe des sev $F_1, \dots, F_r$ tels que :
- $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
- si $P_i := \pi_{b|F_i}$ alors $P_{i+1} | P_i$
- les P_i ne dépendent que de f, on les appelle les invariants de similitudes de f

Application 45 : Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitudes

Nombres algébriques

IV La principalité et les équations diophantiennes

A. Le Théorème des deux carrés.

(5,1)

But 46 : On veut savoir quels nombres peuvent s'écrire comme somme de deux carrés. On note $\Sigma = \{x^2+y^2 / (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$

Proposition 47 : Si $p \in \mathbb{C}$ est premier alors $p \equiv 1 [4]$

Définition 48 : (Anneau entier de Gauss). On définit l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ par $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib / (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$

Proposition 49 : $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien (donc principal) pour $N(z) = z\bar{z}$

Proposition 50 : $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$

Proposition 51 : Soit p premier impair, $p \in \Sigma$ ssi p est réductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

Théorème 52 : (Deux carrés) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$n \in \Sigma \Leftrightarrow \forall p | n \; p \equiv 3 [4] \Rightarrow v_p(n)$ pair

DVP 1

B. L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et l'équation $x^2+2=y^3$

Def $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$

Equation $x^2+2=y^3$

26 unique entier entre un cube et un carré.

V Réseaux

Proposition 56 : Soit $G < (\mathbb{R}^n, +)$ alors il existe $(e_1, \dots, e_r) \in \mathbb{R}^n$ linéairement indépendants tels que $G = \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_r$. $(r \leq n)$

Définition 57 : On dit que G est un réseaux si $r=n$

Exemple 58 :

Définition 59 : On définit le volume d'un réseau G comme la valeur absolue du déterminant d'une base de G

Théorème 60 : (Minkowski). Soit K compact convexe symétrique, supposons $\text{vol}(K^n) = \lambda(K)$ alors il existe $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ non nul

Théorème 61 : Plus généralement, si G réseau et $\text{vol}(K^n) \geq 2^n \text{vol}(G)$ alors il existe $x \in G \cap K$ non nul

Application 62 : On peut retrouver le théorème des 2 carrés.

Application 63 : (Théorème des 4 carrés). Tout entier n est somme de 4 carrés.

Rq : Fonction Θ de Jacobi

1.11 Leçon 123 : Corps finis. Applications.

Je pense qu'il faudrait rajouter un peu de codes correcteurs ou de RSA.

Références utilisées :

— (1) *Théorie de Galois* I.Gozard
— (2) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
— (3) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
— (4) *Exercices de mathématiques pour l'agrégation Volume 1* S.Francinou H.Gianella
— (5) *Cours d'Algèbre* M.Demazure
— (6) *Arithmétique* M.Hindry

Corps fini - Application

123

p désigne un nombre premier, n un entier naturel non nul.

I Corps fini

A. Premières définitions

Proposition 1 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ corps ssi n premier. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Proposition 2 : Soit K un corps fini. Alors $\mathrm{car}(K)$ est un nombre premier et son sous corps premier est $\mathbb{F}_p$.

Corollaire 3 : $|K| = p^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 4 : Il n'existe pas de corps à 6 éléments.

Théorème 5 : Il existe un unique corps (à isomorphismes près) de cardinal p^n. C'est le corps de décomposition de $X^{p^n} - X$ sur $\mathbb{F}_p$. On le note $\mathbb{F}_q$ où $q = p^n$.

Définition 6 : (Morphisme de Frobénius). L'application $\varphi : x \mapsto x^p$ est appelée morphisme de Frobénius

Proposition 7 : φ est un automorphisme de $\mathbb{F}_q$ qui vaut l'identité sur $\mathbb{F}_p$.

Proposition 8 : $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ est cyclique, engendré par φ.

Proposition 9 : $\mathbb{F}_q^*$ est cyclique.

B. Sous/sur-corps de $\mathbb{F}_q$.

Théorème 11 : (Théorème de la base téléscopique)

Soit $M | L | K$ des extensions de corps finies. Alors
$[M:K] = [M:L][L:K]$

Proposition 12 : $\mathbb{F}_{p^d}$ est un sous corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ ssi $d | n$

Exemple 13 : Sous-corps de $\mathbb{F}_{2^{20}}$ en annexe.

Proposition 14 : Soit $d | n$ alors $\mathbb{F}_{p^d} = \{x \in \mathbb{F}_{p^n} / x^{p^d} = x\}$

Proposition 15 : $\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{F}_{p^n}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$.

C. Construction explicite des corps finis

Proposition 16 : Soit $P \in \mathbb{F}_p[X]$ irréductible de degré n alors $\frac{\mathbb{F}_p[X]}{\langle P \rangle}$ est un corps à p^n éléments.

Proposition 18 : On a donc $\mathbb{F}_{p^n} \simeq \frac{\mathbb{F}_p[X]}{\langle P \rangle}$

Exemple 18 : $X^4 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2$

Donc $\mathbb{F}_{16} \simeq \frac{\mathbb{F}_2}{\langle X^4 + X + 1 \rangle}$. En notant $\alpha = \overline{X}$

$\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ est une $\mathbb{F}_2$ base de $\mathbb{F}_{16}$ et on peut faire les calculs dans $\mathbb{F}_{16}$.

II Carrés dans les corps fini

Définition 19 : On note $\mathbb{F}_{p^n}^{*2}$ les carrés de $\mathbb{F}_{p^n}$ et $\mathbb{F}_{p^n}^{\not *2}$ les carrés de $\mathbb{F}_{p^n}^*$

Proposition 20 : Si $p = 2$ $\mathbb{F}_{p^n}^{*2} \cdot \mathbb{F}_{p^n} \; \mathbb{F}_{p^n}^{\not *2} = \mathbb{F}_{p^n}$

Si $p \neq 2$ alors $\mathbb{F}_q^{*2}$ sous-groupe de $\mathbb{F}_q$ de cardinal $\frac{\mathbb{F}_q}{2}$

On suppose $p \neq 2$ dans dans toute la suite.

Proposition 21 : $x \in \mathbb{F}_p^{*2}$ ssi $x^{\frac{p^n-1}{2}} = 1$

Application 22 : -1 est un carré dans $\mathbb{F}_{p^n}^{*2}$ ssi $p \equiv 1 [4]$

Corollaire 23 : $\{p \text{ premier} / p \equiv 1 [4]\}$ est infini.

Définition 24 : On définit pour $a \in \mathbb{Z}$, $\left(\frac{a}{p}\right)$ par

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \equiv b^2 [p] \\ 0 \text{ si } p | a \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Proposition 25 : $\left(\frac{a}{p}\right)$ ne dépend que de la classe de a dans $\mathbb{F}_p$ donc $\left(\frac{a}{p}\right)$ a un sens pour $a \in \mathbb{F}_p$ et alors $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$

est un morphisme de groupes $\mathbb{F}_p^* \to \{\pm 1\}$

Proposition 26 : (Lois complémentaires)

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ $\quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Lemme 27 : Tout élément de $\mathbb{F}_q$ est somme de deux carrés

Application 28 : Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$

Théorème 29 : (Loi de Réciprocité quadratique). Soit p, q deux nombres premiers impairs alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)$$

/01

Application 30 : - $y^2 = 41x + 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

- 3 carré mod $p \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 [12]$
- Il y a une infinité de nombres premiers $\equiv 1 [12]$

III Dénombrement dans les corps finis

Proposition 31 : (compter la bonne)

- $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$ $\quad$ - $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$
- $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)|$ $\quad$ - $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{n \wedge (q-1)}$

Application 32 : $GL_n(\mathbb{F}_p)$ a un p-sylow : le sous-groupe des matrices triangulaire supérieur avec des 1 sur la diagonale.

Corollaire 33 : Tout Groupe fini admet des p-sylows.

Proposition 34 : On a les isomorphismes exceptionnels suivants :

Proposition 35 : Le nombre de matrices nilpotents sur $\mathbb{F}_q$ vaut q^{n^2-n}.

Proposition 32 : Le nombre de matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$ est :

$$\sum_{m_1 + \dots + m_r = n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{r} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

IV Polynômes irréductibles dans les corps fini

A. Généralités.

Proposition 33 : Soit $Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$. S'il existe un nombre premier p tel que $\bar{Q}^{(p)} := \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{a}_n^{(p)} X^n$ soit irréductible sur $\mathbb{F}_p$ alors Q est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$

Exemple 34 : $P = X^3 - 127X^2 + 3608X + 19 \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible

Contre-Exemple 35 : La réciproque est fausse, $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ mais est réductible sur tout $\mathbb{F}_p$.

Proposition 36 : On note $A(n,q)$ l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_q$ unitaires et de degré n. On note $I(n,q) = |A(n,q)|$. On a alors :

$$X^{q^n} - X = \prod_{d \mid n} \prod_{Q \in A(d,q)} Q \quad \text{et} \quad q^n = \sum_{d \mid n} d\, I(n,d)$$

Lemme 37 : On définit μ la fonction de Möbius par $\mu(n) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ \dots \end{cases}$

Alors si $g(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$ on a $f(n) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$

Proposition 38 : $I(n,q) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} q^d \mu\left(\frac{n}{d}\right)$. En particulier $I(n,q) > 0$ ie $A(n,q)$ non vide et $I(n,q) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{q^n}{n}$

Exemple 39: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2$ de degré 2: X^2+X+1 3: X^3+X^2+1, X^3+X+1

4: $X^4+X^3+X^2+X+1$ X^4+X^3+1 X^4+X+1

Proposition 40: Critère d'irréductibilité dans les extensions de degré $\geq \frac{n}{2}$ ($n=\deg(P)$)

B. Polynômes cyclotomiques.

Définition 41: On pose pour $n\in\mathbb{N}^*$ le nème polynôme cyclotomique par $\Phi_n = \prod_{k\wedge n} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$

Proposition 42: $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible et vérifie $X^n-1 = \prod_{d|n} \Phi_d$.

Exemple 43: $\Phi_6 = X^2-X+1$.

Définition 48. On définit $\Phi_{n,\mathbb{F}_p} = \overline{\Phi_n}^{(p)}$ où on a réduit les coefficients de Φ_n mod p.

Théorème 44: Les générateurs de $\mathbb{F}_q^*$ sont les zéros de $\Phi_{q-1,\mathbb{F}_p}$.

- Les polynômes minimaux des générateurs de $\mathbb{F}_q^*$ sont les diviseurs irréductibles de $\Phi_{q-1,\mathbb{F}_p}$. On les appelle polynôme primitifs de $\mathbb{F}_q$. Ils sont tous de degré n et chacune de leurs racines engendrent $\mathbb{F}_q$.

Théorème 45: ($n\wedge p=1$) $\Phi_{n,\mathbb{F}_p}$ irréductible sur $\mathbb{F}_p$ ssi $o(p)=\varphi(n)$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Corollaire 46: Si n n'est pas de la forme $\begin{cases} 2 \\ 2q^\alpha \\ q^\alpha \end{cases}$ q premier alors Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Z}$ mais réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout nombre premier p.

V Polynômes à plusieurs variables sur $\mathbb{F}_q$

$k=\mathbb{F}_q$ corps fini de caractéristique p.

Lemme 47: Pour $(x,m)\in k^n \times \mathbb{N}^n$ on note $x^m = x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}$

$\sum_{x\in k^n} x^m = 0$ sauf si tous les m_i sont non nuls et divisibles par $q-1$.

Théorème 48: (Chevalley-Warning). Soit $P\in k[X_1,\dots,X_n]$ $\deg(P)<n$ alors $|\{x\in k^n / P(x)=0\}| \equiv 0[p]$. En particulier si P homogène alors $P(x)=0$ a une solution non triviale.

Application 49: (Erdos-Ginzburg-Ziv) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,\dots,a_{2n-1}\in\mathbb{Z}$ des entiers. Il existe $I\subset[\![1,2n-1]\!]$ tel que:

- $|I|=n$
- $\sum_{i\in I} a_i \equiv 0[n]$

VI Applications: Des grands nombres premiers

Définition 48: Le nème nombre de Fermat est $F_n = 2^{2^n}+1$

Proposition 49: Soit $k\in\mathbb{N}^*$ F_k premier $\iff 3^{\frac{F_k-1}{2}} \equiv -1 [F_k]$

Définition 50: On appelle qème nombre de Mersenne le nombre $M_q = 2^q-1$

Proposition 51: M_q premier $\Rightarrow$ q premier DVP

Théorème 52: M_q premier $\iff (2+\sqrt{3})^{2^{q-1}} \equiv -1 [M_q]$) où $\sqrt{3}$ est est une racine de 3 dans une extension de $\mathbb{Z}/M_q\mathbb{Z}$ qui en contient une.

Proposition 53: (Test de Lehmer-Lucas). Soit $(L_n)_n \in \mathbb{Z}/M_q\mathbb{Z}$ définie par $L_0=4$ $L_{n+1}=L_n^2-2[M_q]$.
Alors M_q est premier ssi $L_{q-2}\equiv 0[M_q]$.

1.12 Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Pour la partie constructibilité, le Perrin explique tout bien, il faut alors savoir comment construire $\frac{x}{y}$ et $\sqrt{x}$ sachant construire x, y. les livres n'ont pas forcément la même méthode, il ne faut pas se mélanger.

Références utilisées :
- (1) *Théorie de Galois* I.Gozard
- (2) *Algèbre* X.Gourdon
- (3) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
- (4) *Exercices d'Algèbre* P.Ortiz
- (5) *Cours d'Algèbre* M.Demazure
- (6) *Cours de Calcul Formel : Algorithmes fondamentaux* P.Saux Picart

K désigne un corps (supposé commutatif)

I Extension de corps

A Définition et propriétés élémentaires

(1)

Définition 1 : Soit L un corps. On dit que L est une extension de K s'il existe un morphisme de corps (nécessairement injectif) $i : K \to L$. On note $L|K$.

Remarque 2 : Si $K \subset L$ alors L est une extension de K. Inversement, si $L|K$ extension K est isomorphe à un sous-corps de L, on confondra ces notions.

Exemple 3 : $\mathbb{C}|\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{C}(X) : \mathbb{C}$.

Exemple 4 : Un corps est une extension de son sous-corps premier.

Proposition 5 : Si $L|K$ on peut voir naturellement L comme un K-ev on note $[L:K] = \dim_K(L)$. On dit que $L|K$ est finie si $[L:K] < +\infty$.

Exemple 5 : $[\mathbb{C}:\mathbb{R}] = 2 \quad [\mathbb{R}:\mathbb{Q}] \geq +\infty$

Théorème 6 : (Théorème base télescopique)
Soit $K \subset E \subset L$ des extensions de corps. Alors :

$$[L:K] = [L:E]\,[E:K]$$

Application 7 : Si $[L:K]$ alors toute extension $K \subset E \subset L$ vérifie $E = K$ ou $E = L$

B. Sous extensions

Définition 8 : Si $L|K$ est une extension, tout corps vérifiant $L \subset E \subset K$ est appelée extension intermédiaire.

Définition 9 : Soit $L|K$ une extension et $P \subset L$. On note $K(P)$ plus petite extension de K contenant P.
Une extension E est dite de type finie si $E = K(\alpha_1, \alpha_n)$ monogène si $n = 1$.

Théorème 10 : (Élément primitif)
Supposons $\mathrm{car}(K) = 0$. Si $L|K$ est une extension finie alors elle est monogène.

(1)

Exemple : $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

(1)

C. Extensions algébriques et transcendantes

Soit $L|K$ une extension

Définition 11 : Soit $\alpha \in L$. L'application $ev_\alpha : K[X] \to L$, $P \mapsto P(\alpha)$ est un morphisme d'anneaux. On note $K[\alpha] = \mathrm{Im}(ev_\alpha)$

Définition 12 : On a deux cas :
ev_α injective : on dit que α est transcendant sur K
ev_α pas injectif. α est dit algébrique sur K

Exemple 13 : $\sqrt{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$

Théorème 14 : (Hermite et Lindemann) (Admis) e et π sont transcendants.

Définition 15 : Si α algébrique, on note $\pi_{\alpha,K}$ l'unique générateur unitaire de $\ker(ev_\alpha)$, on l'appelle polynôme minimal de α. C'est un polynôme irréductible.

Exemple 16 : $\alpha = 2^{\frac{1}{n}}$ $\quad \pi_{\alpha,\mathbb{Q}} = X^n - 2$.

Théorème 17 : Soit $\alpha \in L$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
i) α algébrique sur K
ii) $K[\alpha] = K(\alpha)$
iii) $[K : K[\alpha]] < +\infty$

Application 18
$M = \{ x \in L \mid x \text{ algébrique sur } K \}$ sous-corps de L

(1)

II Quelques extensions particulières

A. Corps de rupture

Définition 19 : Soit $P \in K[X]$ irréductible de degré ≥ 1.
On dit que L est un corps de rupture pour P si L est une extension de K qui contient une racine de P et telle que $L = K(\alpha)$.

Exemple 20 : $P = X^2 - 2$ $\quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(1)

(1) Proposition 21 Soit $P \in k[X]$ irréductible de degré ≥ 1. Alors il existe un unique (à isomorphisme près) corps de rupture pour P.

Proposition 22: On a $L = \frac{k[X]}{\langle P \rangle}$ ainsi $[L:k] = \deg(P)$.

Application 22 Soit $P \in k[X]$ de degré n. Alors on a équivalence
i) P est irréductible dans $k[X]$
ii) P n'a pas de racine dans les extensions L telles que $[L:k] \leq \frac{n}{2}$

Application 23 : soit $P \in k[X]$ de degré n irréductible.
Alors P irréductible dans toute extension L de degré m où $m \wedge n = 1$.

(1) Application 24: $P \in \mathbb{F}_p[X]$ irréductible de degré n alors:
P irréductible sur $\mathbb{F}_{p^k}[X] \iff k \wedge n = 1$.

B. Corps de décomposition

(1) Définition 24, Soit $P \in K[X]$ irréductible on dit que L est un corps de décomposition pour P s'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in L^n$ racines de P telles que $L = k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Théorème 25 Soit $P \in k[X]$ irréductible de degré n.
Alors il existe un unique (à isomorphisme) pe's corps de décomposition $D_k(P)$. De plus $[D_k(P):k] \leq n!$.

Exemple 26 $P = X^3 - 2$ $D_{\mathbb{Q}}(P) = \mathbb{Q}(j, \sqrt[3]{2})$

$P = X^4 - 2$ $D_{\mathbb{Q}}(P) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$

C. Clôture algébrique

(1) Définition 27: K est dit algébriquement clos si tout $P \in K[X]$ admet une racine dans K.

Théorème 28: (D'alembert-Gauss) $\mathbb{C}$ algébriquement clos.

Application 29: $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible $\iff$ ($\deg(P) = 1$ ou $\deg(P) = 2$ pas de racine).

Proposition 30: Si K algébriquement clos alors K infini.

Définition 31: Une extension $L|K$ est une clôture algébrique si L algébrique sur k et L algébriquement close.

Exemple 32: $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$.

Proposition 33: Il existe une unique clôture algébrique (Steinitz).

Exemple 34:
$A = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ algébrique sur } \mathbb{Q}\}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

(5) ## D. Extensions particulières

Définition 35:
On note $\mu_n^*(\mathbb{C}) = \{z \in U_n \mid o(z) = n\}$

Définition 36: On définit le nème-polynôme cyclotomique par $\Phi_n = \prod_{z \in \mu_n^*(\mathbb{C})} (X - z)$

Proposition 37: $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$

Théorème 38: $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et Φ_n irréductible sur $\mathbb{Q}$

Exemple 39:
$\Phi_1 = X - 1$ $\Phi_2 = X + 1$ $\Phi_3 = X^2 + X + 1$ $\Phi_4 = X^2 + 1$

(1) Définition 40:
Le corps $\mathbb{Q}(\xi_n)$ ne dépend pas de $\xi_n \in \mu_n^*(\mathbb{C})$, On l'appelle nème corps cyclotomique.

(4) Proposition 41: $[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$
Proposition 42: $\mathbb{Q}(\xi_n)\mathbb{Q}(\xi_m) = \mathbb{Q}(\xi_{n \vee m})$
$\mathbb{Q}(\xi_n) \cap \mathbb{Q}(\xi_m) = \mathbb{Q}(\xi_{n \wedge m})$.

(1) ## III Applications à la construction des corps finis.

Proposition 44
Soit p un nombre premier et $q = p^n$. Il existe un unique corps de cardinal q. C'est le corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$, on le note $\mathbb{F}_q$.

Proposition 45 Soit $\pi \in \mathbb{F}_p[X]$ irréductible de degré n.
Alors $\mathbb{F}_q \simeq \frac{\mathbb{F}_p[X]}{\langle \pi \rangle}$

(1) Proposition 46 $\mathbb{F}_{p^d}$ est un sous-corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ si et seulement si $d \mid n$

De plus si $d \mid n$ alors $\mathbb{F}_{p^d} = \{ x \in \mathbb{F}_{p^n} / \varphi^d(x) = x^{p^d} = x \}$

Définition 47 On note $A(n,q)$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaire de degré n sur $\mathbb{F}_q$ et $I(n,q) = |A(n,q)|$

Proposition 48

- $X^{q^n} - X = \prod_{d \mid n} \prod_{P \in A(n,q)} P$ - $I(n,q) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$
- En particulier $I(n,q) > 0$ et $I(n,q) \underset{A.+\infty}{\sim} \frac{q^n}{n}$

(5) Théorème 49: Soit $n \wedge p = 1$ alors $\Phi_n^{(q)}$ se décompose en produit de $\varphi(n)$ produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ ($q = p^k$) où $r = \overline{o(q)}$ $q \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

Application 50: (Dirichlet Faible). Soit $n \geq 1$, il existe une infinité de nombres premiers $\equiv 1 [n]$. réciprocité quadratique

IV Nombres premiers très grand.

(9,61)

- Mersenne -
- Fermat

V Construction à la règle et au compas.

On considère $\mathbb{R}^2$ muni des points $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On considère 2 types de figure constructible à partir de A.

- Les droites affines et les cercles

Définition 48:

On dit que $M \in \mathbb{R}^2$ est constructible à partir de A si M est un point d'intersection de figues citées plus haut.

Définition 49: Un point $M \in \mathbb{R}^2$ est dit constructible s'il existe $A_0 \subset \dots \subset A_n$ de parties de $\mathbb{R}^2$ avec:

a) $A_0 = \{O, I\}$ b) $M \in A_n$ c) $A_i = A_{i-1} \cup \{M_i\}$ M_i constructible à partir de A_{i-1}

Proposition 50 les points suivants sont constructibles

- $(n,0)$ $n \in \mathbb{N}$ - $(0,n)$ $n \in \mathbb{N}$ $(x,0)$ $x \in \mathbb{Q}$ $(0,x)$ $x \in \mathbb{Q}$

Si $x > 0$ est constructible, $\sqrt{x}$ l'est aussi.

Théorème 51: (Wantzel) x constructible ssi il existe $\mathbb{Q} = k_0 \subset k_1 \subset \dots \subset k_n$ extensions telles que $[k_i : k_{i-1}] = 2$ et $x \in k_n$.

Application 52: la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle sont impossibles.

Définition 53: Soit P_n le polygone régulier à n côtés de côté 1 dont 1 est un sommet. On dit que P_n est constructible si l'angle $\frac{2\pi}{n}$ l'est.

D2

Théorème 54: Soient p premier ≥ 3 et $r \geq 1$ entier.

Alors S_{p^r} constructible ssi $r = 1$ et $p = 2^{2^n} + 1$ (Nombre de Fermat)

Théorème 55: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

S_n constructible $\Leftrightarrow$ $n = 2^m p_1 \dots p_k$ (p_i): nombres de fermat premier distincts

1.13 Leçon 126 : Exemples d'équations en arithmétique.

On peut assez facilement enlever les deux dernières parties.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre* X.Gourdon
— (2) *Arithmétique modulaire* JM.Lamoitier
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Théorie de Galois* I.Gozard
— (5) *Arithmétique* M.Hindry
— (6) *Théorie des nombres* D.Duverney

But : Résoudre des équations dans $\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

I Equation diophantienne

A. Equation linéaire sur $\mathbb{Z}$.

(1)

Définition 1 : Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que a divise b et on note $a|b$ s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $b = an$

Proposition 2 : Soient $a \in \mathbb{Z}$ $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$a = bq + r \qquad r \in [\![0, b-1]\!]$$

Définition 3 : Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers. Il existe un unique entier naturel tel que $a_1\mathbb{Z} + \dots + a_n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. L'entier d s'appelle le pgcd de $a_1, \dots, a_n$ et on le note $\bigwedge_{i=1} a_i$.

Définition 4 : Si $\bigwedge_{i=1} a_i = 1$ on dit que $a_1, \dots, a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Théorème 5 : (Bézout) Soit $a_1, \dots, a_n$ des entiers, on a l'équivalence suivante :

$$\bigwedge_{i=1} a_i = 1 \iff \exists (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n, \ \sum_{i=1} a_i u_i = 1$$

Proposition 6 : On utilise l'algorithme d'Euclide pour trouver de tels nombres.

Exemple 7 : $12 \wedge 35 = 1$ et $12 \times 3 + (-1) \times 35 = 1$

Proposition 8 : L'équation diophantienne linéaire $ax + by = c$ des solutions ssi $a \wedge b \mid c$.

Proposition 9 : (Résolution de $ax + by = c$)

On suppose qu'il existe des solutions ie $a \wedge b \mid c$

Soit $d = a \wedge b$ et $a' = \frac{a}{d}$ $b' = \frac{b}{d}$. $a' \wedge b' = 1$ donc par Bézout il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$.

On a alors une solution particulière donnée par $(x_0, y_0) = (cud, cvd)$

Les solutions sont données par $(x, y) = (x_0 - bk, x_0 + ak)$ $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 10 : $3x + 20y = 5$

B. Equation linéaire sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On cherche à résoudre l'équation d'inconnue x : $ax \equiv b\ [n]$

Proposition 11 : L'équation $ax \equiv b\ [n]$ admet une solution si et seulement si $a \wedge n = 1$.

Proposition 12 : En pratique, pour trouver une solution de $ax \equiv b\ [n]$ on utilise l'algorithme d'euclide pour obtenir une relation de la forme $ua + nv = 1$ on a alors $x \equiv bu\ [n]$.

(2)

Exemple 13 : Les solutions de $5x \equiv 29\ [31]$ sont les $x = 12 + 31k$.

Théorème 14 : Soient $m_1, \dots, m_r$ des entiers premier entre eux 2 à 2. Alors le système :

$$\begin{cases} x \equiv a_1\ [m_1] \\ \vdots \\ x \equiv a_r\ [m_r] \end{cases}$$

admet une unique solution x modulo $m_1 \times \dots \times m_r$.

Exemple 15 : Les solutions de :

$$\begin{cases} x \equiv 1\ [2] \\ x \equiv 2\ [3] \\ x \equiv 4\ [5] \end{cases}$$

sont de la forme $x = 29 + 30k$ $k \in \mathbb{Z}$.

C. Triplets pythagoriciens.

Hindry

II Méthodes de résolutions.

A. Principe de la descente de Fermat

(2) Proposition 17 (Descente de Fermat)
Une suite strictement décroissante d'entiers naturels est nécessairement stationnaire

Application 18: $2q^2 = p^2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$ et donc $\sqrt{2}$ est irrationnel

(2) Application 19: L'équation $x^4 + y^4 = z^2$ n'a pas de solution non triviales ($xyz \neq 0$). En particulier le théorème de Fermat pour $n=4$ est vrai

Application 20: Si $n \in \mathbb{Z}$ est somme de deux carrés alors pour tout nombre premier p qui divise n. Si $p \equiv 3 [4]$ alors $v_p(n)$ est pair.

B. Réduction modulaire

Idée: Si une équation a des solutions dans $\mathbb{Z}$ alors elle en a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 1$.

Corollaire 21: S'il existe un n tel que l'équation n'admette pas de solution alors elle en admet pas non plus dans $\mathbb{Z}$.

Remarque 22: La réciproque est fausse.

Application 24 L'équation $x^2 + 5y = 7$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

(3) Proposition 25: (Théorème de Sophie-Germain)
Soit p un nombre premier tel que $q = 2p+1$ soit aussi premier. Alors l'équation $x^p + y^p = z^p$ n'admet pas de solution non triviale.

III Equations dans les corps finis.

(4)

A. Carrés dans les corps finis.

Soit p nombre premier et $q = p^n$.

Définition 26: On note:
$\mathbb{F}_q^2 = \{x^2 / x \in \mathbb{F}_q\}$ et $\mathbb{F}_q^{2*} = \{x^2 / x \in \mathbb{F}_q^*\}$

Proposition 27: Si $p=2$ $\mathbb{F}_q^2 = \mathbb{F}_q$
Si p impair $|\mathbb{F}_q| = |\mathbb{F}_q^{2*}| + 1 = \frac{p+1}{2}$

Définition 28: On définit pour p impair

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \text{ carré mod } p \\ 0 \text{ si } p | a \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Proposition 29: $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} [p]$

Application 30: -1 carré dans $\mathbb{F}_q \iff q \equiv 1 [4]$

Application 31: $\{p \text{ premier} / p \equiv 1 [4]\}$ est infini.

Lemme 31: Tout élément de $\mathbb{F}_q$ est somme de deux

Théorème 32: (Réciprocité quadratique)
On suppose p, q impairs distincts alors:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$

Proposition 33: $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Application 34: - Infinité nombre premier $\equiv 1 [12]$
- F_n premier $\iff 3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 [F_n]$

$M_q = 2^q - 1$.

M_q premier $\iff (2+\sqrt{3})^{2^{q-1}} \equiv -1 [M_q]$

B. Equations polynomiales dans les corps finis.

(5)

Théorème 48: (Chevalley - Warning). Soit $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ $\deg(P) < n$ alors $|\{x \in k^n / P(x) = 0\}| \equiv 0[p]$. En particulier si P homogène alors $P(x) = 0$ a une solution non triviale.

Application 49: (Erdos - Ginzburg - Ziv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_{2n-1} \in \mathbb{Z}$ des entiers. Il existe $I \subset [\![1, 2n-1]\!]$ tel que:
- $|I| = n$ et $\sum_{i \in I} a_i \equiv 0[n]$.

IV Théorème des deux carrés

(5)

Proposition 34: Si p est un nombre premier somme de deux carrés alors $p \equiv 1[4]$

Proposition 35: Si $n \in \mathbb{N}^*$ est somme de deux carrés.
Alors pour tout $p | n$ $p \equiv 3[4] \Rightarrow v_p(n)$ pair.

Définition 36: On définit l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss par $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib / (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$

Proposition 37: $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$

Proposition 38: $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien donc principal

Théorème 39: (Théorème des deux carrés)
Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $v_p(n)$ pair pour $p | n$ $p \equiv 3[4]$ alors n est somme de deux carrés. /02

(6)

Proposition 40: La seule solution de $x^3 = y^2 + 1$ est $(1, 0)$

V L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et l'équation $x^3 + 2 = y^2$.

Définition 41 On définit l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2} / (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$

Proposition 42: $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est principal

Proposition 43: L'équation $x^3 + 2 = y^2$ admet pour solution $(3, 5)$ et $(3, -5)$.

VI Equation de Pell-Fermat.

Cf Hindry.

VII Réseaux

(5)

Proposition 56: Soit $G < (\mathbb{R}^n, +)$ alors il existe $(e_1, \dots, e_r) \in \mathbb{R}^n$ linéairement indépendants tels que $G = \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_r$. $(r \leq n)$

Définition 57: On dit que G est un réseaux si $r = n$

Exemple 58:

Définition 59: On définit le volume d'un réseau G comme la valeur absolue du déterminant d'une base de G

Théorème 60: (Minkowski). Soit K compact convexe symétrique, supposés $\mathrm{vol}(K^n) \geq \lambda(K)$ alors il existe $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ non nul

Théorème 61: Plus généralement, si G réseau et $\mathrm{vol}(K^n) > 2^n \mathrm{vol}(G)$ alors il existe $x \in G \cap K$ non nul

Application 62: On peut retrouver le théorème des 2 carrés.

Application 63: (Théorème des 4 carrés). Tout entier n est somme de 4 carrés.

1.14 Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Références utilisées :

- (1) *Théorie de Galois* I.Gozard
- (2) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
- (3) *Exercices de mathématiques pour l'agrégation Volume 1* S.Francinou H.Gianella
- (4) *Cours d'Algèbre* M.Demazure

Polynômes irréductibles à une détermination. Corps de rupture. Exemples et Applications

141

A désigne un anneau commutatif unitaire. K un corps

I Polynômes irréductibles

A - Définition, critère

(A)

Définition 1: $P \in A[X]$ est dit irréductible si P est non constant et si ses seuls diviseurs dans $A[X]$ sont les aP pour $a \in A^\times$.

Exemple 2: $P = X+1$ est irréductible sur $\mathbb{R}[X]$

Proposition 3: (Irréductibles de $K[X]$). Soit $P \in K[X]$.

1/ Si $\deg(P) = 1$ P irréductible

2/ Si $\deg(P) > 1$ et P irréductible alors P n'a pas de racine dans K

3/ Si $\deg P \in \{2,3\}$ alors P irréductible ssi il n'a pas de racine dans K.

Contre-exemple 4: $P = (X^2+1)^2$ est réductible sur $\mathbb{R}$ mais n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Remarque 5: Si $P \in K[X]$ irréductible, P n'est pas nécessairement irréductible dans les sur-corps de K.

Proposition 6: Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Proposition 7: Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ou 2 et sans racine dans $\mathbb{R}$. App: toute matrices de $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ est produit de n matrices de dilatation

Définition 8: Soit A un anneau factoriel, on pose pour $P \in A[X] \setminus \{0\}$, $c(P)$ le pgcd des coefficients de P. On dit que P est primitif si $c(P) = 1$

Exemple 9: Un polynôme unitaire est primitif

Proposition 10: $\forall (P,Q) \in (A[X] \setminus \{0\})^2$ on a: $c(PQ) = c(P)c(Q)$

Proposition 9: Soit A factoriel et $P \in A[X]$ $\deg(P) \geq 1$ (1)

$K = \mathrm{Frac}(A)$.

P irréductible dans $A[X] \iff$ { P irréductible dans $K[X]$; $c(P) = 1$ }

Proposition 10 (Eisenstein) (2)

Soit $P \in A[X]$ A factoriel et $K = \mathrm{Frac}(A)$. On suppose qu'il existe $p \in A$ irréductible tel que $p \nmid a_k$ $k \in [\![0, n-1]\!]$ $p \mid a_n$ et $p^2 \nmid a_0$. Alors P irréductible sur $K[X]$ (1)

Exemple 11: $X^n - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible pour tout $n \geq 1$. (1)

Exemple 12: p premier $1 + \dots + X^{p-1}$ irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Théorème 13: Soit A Factoriel et $K = \mathrm{Frac}(A)$. Soit $P \in A[X]$ $\deg(P) \geq 1$ et $I \subset A$ idéal premier de A.

Soit $B = \frac{A}{I}$ et $L = \mathrm{Frac}(B)$. On suppose $\bar{a_n} \neq 0$.

Si $\bar{P}$ irréductible dans L alors il l'est dans K. (2)

Exemple 14: $P = X^3 - 127X^2 + 3608X + 14$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. (2)

Contre Exemple 15: $P = 2X \in \mathbb{Z}[X]$ $I = (3)$.

B. Polynômes minimaux et extension de corps

Définition 17: On dit que $L|K$ est une extension finie si $\dim_K L < +\infty$ on note $[L:K] = \dim_K(L)$ le degré de l'extension

Exemple 18: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ infini, $\mathbb{R}$ finie)

Théorème 19 (Base Télescopique).

Soit $K \subset L \subset M$ trois extensions on a:

$[M:K] = [M:L][L:K]$.

Définition 20: Soit $K \subset L$ une extension et $x \in L$. On note $K[x]$ l'image de $\mathrm{ev}_x : K[X] \to L$, $P \mapsto P(x)$

Par $A \subset L$ on note $K(A)$ le plus petit sous corps de L qui contient A

Définition 21: On dit x est transcendant sur K si ev_x est injectif, algébrique sinon.

(2) Exemple 22 : i est algébrique sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}$ sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 23 (Admis) : e et π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$.

Définition 24 : Si α est algébrique sur K alors il existe un unique polynôme P unitaire qui engendre $Ker(ev_\alpha)$. On note P $\pi_{\alpha,K}$ et on l'appelle le polynôme minimal de α sur K.

Exemple 25 : $\pi_{\sqrt{2},\mathbb{Q}} = X^2 - 2$ $\pi_{i,\mathbb{Q}} = X^2 + 1$.

Application 26 : Cf Hindry

II Corps de rupture, corps de décomposition

A. Corps de rupture

(1) Définition 27 : Soit $P \in K[X]$ irréductible de degré > 1. On dit que L est un corps de rupture pour P si L est une extension de degré 1 de K et contient une racine de P

Remarque 28 : On alors $L = K(\alpha)$

Proposition 29 : Soit $P \in K[X]$ irréductible de degré > 1. Alors il existe un unique (à isomorphisme près) corps de rupture pour P. Plus précisément, si $K(\alpha) = K(\beta)$ il existe un unique K-isomorphisme $\tau : K(\alpha) \to K(\beta)$ qui envoie α sur β.

Application 30 : Soit $P \in K[X]$ de degré n. Alors on a équivalence
i) P est irréductible dans $K[X]$
ii) P n'a pas de racine dans les extensions L telles que $[L:K] \leq \frac{n}{2}$

Application 31 : soit $P \in K[X]$ de degré n irréductible. Alors P irréductible dans toute extension L de degré m où $m \wedge n = 1$.

B. Corps de décomposition

(1) Définition 32 : Soit $P \in K[X]$ irréductible on dit que L est un corps de décomposition pour P s'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in L^n$ racines de P telles que $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

(1) Théorème 33 : Soit $P \in K[X]$ irréductible de degré n. Alors il existe un unique (à isomorphisme près) corps de décomposition $D_K(P)$. De plus $[D_K(P) : K] \leq n!$.

(2) Exemple 34 : $P = X^3 - 2$ $D_{\mathbb{Q}}(P) = \mathbb{Q}(j, \sqrt[3]{2})$

$P = X^4 - 2$ $D_{\mathbb{Q}}(P) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$

III Application à la construction des corps finis

(2) Définition 35 : Soit K un corps alors on appelle sous-corps premier de K le plus petit sous corps de K qui contient 1.

(1) Proposition 36 : Soit K un corps alors sa caractéristique est nulle ou un nombre premier. De plus si K fini alors $|K| = p^n$ avec $p = car(K)$.

Proposition 37 : Soit K un corps fini de caractéristique p. Alors $\mathbb{F}_p$ est le sous corps premier de K et $\varphi : x \mapsto x^p$ est un automorphisme de K qui vaut l'identité sur $\mathbb{F}_p$.

Proposition 38 :
Soit p un nombre premier et $q = p^n$. Il existe un unique corps de cardinal q. C'est le corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$, on le note $\mathbb{F}_q$.

Proposition 39 : Soit $\pi \in \mathbb{F}_p[X]$ irréductible de degré n. Alors $\mathbb{F}_q \simeq \frac{\mathbb{F}_p[X]}{\langle \pi \rangle}$

(1) Proposition 41 : $\mathbb{F}_{p^d}$ est un sous-corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ si et seulement si $d | n$

De plus si $d | n$ alors $\mathbb{F}_{p^d} = \left\{ x \in \mathbb{F}_{p^n} \mid \varphi^d(x) = x^{p^d} = x \right\}$

Définition 42 : On note $A(n,q)$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaire de degré n sur $\mathbb{F}_q$ et $I(n,q) = |A(n,q)|$

(3) Proposition 41 :
$- X^q - X = \prod_{d \mid n} \prod_{P \in A(n,q)} P - n I(n,q) = \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d$

$-$ En particulier $I(n,q) > 0$ et $I(n,q) \sim \frac{q^n}{n}$

(1) Exemple
$A(1,2) = \{X, X+1\}$ $A(2,2) = \{X^2+X+1\}$

B. Des grands nombres premiers.

(1) Définition 42 : Soit $a \in \mathbb{Z}$ p premier, on définit $\left(\frac{a}{p}\right)$ par

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & a \text{ carré mod } p \\ 0 & p \mid a \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad p \text{ impair}$$

Proposition 43 : $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \ [p]$

Proposition 44 : $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

Théorème 45 : (Réciprocité quadratique). Soit p, q premier impair alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$

Définition 46 : Pour $q \in \mathbb{N}$ on définit $M_q = 2^q - 1$

Proposition 47 : M_q premier $\Rightarrow (2+\sqrt{3})^{2^{q-1}} \equiv -1 \ [M_q]$.

/01

IV Polynômes cyclotomiques et extensions cyclotomiques

On note $p = \mathrm{car}(K)$, p est soit nul soit un nombre premier

A. Polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{C}$

(1) Définition 48 : On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, le $n$ième polynôme cyclotomique par $\Phi_n = \prod_{\substack{k \wedge n = 1 \\ k \le n}} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$

Exemple 49 : Si $n = p$ premier $\Phi_p = \sum_{i=0}^{p-1} X^i$

Proposition 50 : Φ_n est unitaire de degré $\varphi(n)$

(1) Proposition 51 : $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$, $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

Exemple 52 : $\Phi_6 = X^2 - X + 1$.

(2) Proposition 53 : Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Z}$. 102

B. Polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{F}_p$.

(1) Soit p premier $p \nmid n$ q une puissance de p.

Définition 54 : On définit $\Phi_{n,\mathbb{F}_p} = \overline{\Phi_n}^{(p)}$ où l'on a réduit les coefficients de Φ_n mod p.

Proposition 55 : Les générateurs de $\mathbb{F}_q^*$ sont les zéros de $\Phi_{q-1,\mathbb{F}_p}$.

(2) Proposition 56 : Φ_n se décompose sur $\mathbb{F}_q$ en produit de m facteurs irréductibles tous de degré $\frac{\varphi(n)}{m}$ où $m = o(q)$ $q \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$

(1) Corollaire 57 : Φ_n admet une racine sur $\mathbb{F}_q$ ssi $q \equiv 1 \ [n]$.

Corollaire 58 : Φ_n irréductible sur $\mathbb{F}_q$ ssi q engendre $\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right)^*$

Application 59 : (Dirichlet faible). Il existe une infinité de nombres premiers $\equiv 1 \ [n]$.

C. Extension cyclotomiques.

Définition 60 : Soit $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$ une racine primitive $n$ième de l'unité. On appelle extension cyclotomique le corps $\mathbb{Q}(\varepsilon)$

Proposition 61 : $\pi_\varepsilon = \Phi_n$ donc $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

Théorème 61 : (Wantzel)

Théorème 62 : (Gauss-Wantzel)

1.15 Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre* X.Gourdon
— (2) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Analyse* X.Gourdon
— (4) *Analyse complexe* E.Amar E.Mathéron
— (5) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (6) *Théorie de Galois* I.Gozard
— (7) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Racines d'un polynôme - fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

144

(1)

K corps

I Racine d'un polynôme

A. Généralités.

Définition 1 : Soit $P \in K[X]$ et $a \in K$, on dit que a est racine de P si $P(a)=0$

Proposition 2 : $a \in K$ est racine de P ssi $X-a$ divise P

Définition 3 : $a \in K$ est dit racine d'ordre m de $P \in K[X]$ si $(X-a)^m \mid P$ et $(X-a)^{m+1} \nmid P$. Si $m=1$ on parle de racine simple, si $m=2$ on parle de racine double si $m \geq 2$ de racine multiples.

Proposition 4 : Soit $P \in K[X]$ et $a_1, \dots, a_r$ les racines d'ordre $m_1, \dots, m_r$. Il existe $Q \in K[X]$ tel que $P = Q \prod_{i=1}^{r} (X-a_i)^{m_i}$ $Q(a_i) \neq 0$ pour $i \in [\![1, r]\!]$

Corollaire 5 : Soit $P \in K[X]$ de degré n alors P admet au plus n racines (comptées avec leur multiplicité).

Contre-Exemple 6 : Si K n'est pas un corps le résultat n'est pas forcément vrai. $P = 4X \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$

Définition 7 : $P \in K[X]$ est dit scindé si $P = \prod_{i=1}^{r} (X-a_i)^{m_i}$ $a_i \in K$. Il est dit simplement scindé si $m_1 = \dots = m_r = 1$.

Proposition 8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et π_A son polynôme minimal alors : A diagonalisable $\Leftrightarrow$ π_A scindé racine simple sur K

A trigonalisable $\Leftrightarrow$ π_A scindé sur K.

Proposition 10 : $P' \mid P \Rightarrow P = \lambda (X-a)^n$ $(\mathrm{car}(K) \nmid 0)$ (1)

Proposition 11 : $(\mathrm{car}(K) = 0)$ a racine d'ordre P ssi $P^{(i)}(a) = 0$ $i \in [\![0, m-1]\!]$ $P^{(m)}(a) \neq 0$

Contre-Exemple 12 : $P = X^3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$. Vrai sur n'importe quel corps dans le cas $m=1$.

Définition 13 : Un corps K est dit algébriquement clos si tout $P \in K[X]$ est scindé sur K.

Exemple 14 : Un corps fini n'est jamais algébriquement clos

Théorème 15 : (D'Alembert-Gauss) $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

Application 16 : Tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable

Théorème 17 : (Relations coeff-racines). Soit $P \in K[X]$ scindé. Ecrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)$

alors $\sigma_k := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$

Application 18 : $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Application 19 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de spectre $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(A)$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$.

Application 20 : La formule du crible.

B. Polynômes irréductibles.

Définition 20 : $P \in K[X]$ est dit irréductible si P non constant et $P = QR \Rightarrow Q$ ou R constant

Proposition 21 : Supposons $\deg(P) \in \{2, 3\}$ alors P irréductible ssi P n'admet pas de racines dans K

Contre-exemple 22 : $P = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ réductible mais sans racines dans $\mathbb{R}$.

C. Nombres algébriques :

Définition

exemple $\sqrt{2}$, i, π, e

algébrique $\Leftrightarrow$ $K(\lambda) = K(\lambda^2) \Leftrightarrow [K(\lambda) : K] < +\infty$

(1)

III Etude topologique des racines

(2) Définition 23: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ on définit la matrice compagnon de P par $C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Proposition 24: $\chi_{C_P} = P$ ainsi trouver les racines de P revient à trouver les valeurs propres de C_P

Proposition 25: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ alors $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{ii}, R_i)$. On appelle ces disques $\neq i$ les disques de Gershgörin.

(3) Théorème 26 (Rolle) Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue dérivable sur $]a,b[$ $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Application 27: Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' aussi.

Proposition 28: L'ensemble des polynômes scindé à racines simples de $\mathbb{R}[X]$ est un ouverts de $\mathbb{R}[X]$

(2) Application 29: L'intérieur des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des matrices à n valeurs propres distinctes.

Proposition 30: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. P est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi $\forall z \in \mathbb{C} \quad |P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^{\deg(P)}$

Cques bornes sup.

(2) Application 31: L'adhérence des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

(1) Théorème 32: (Rouché) Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert Ω et $D(z_0, r) \subset \Omega$. Supposes que pour $z \in D(z_0, r)$ $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$. Alors f et g ont le même nombre de zéros dans $D(z_0, r)$

Application 33: Si $f \in H(\Omega)$ est injective alors f' ne s'annule pas

(5) Théorème 34: (Gauss-Lucas). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ alors les racines complexes de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Application 35: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P'' divise P alors les racines de P sont alignées.

III Adjonction de racines

(6) Théorème 38 Soit $L | K$ deux extensions finies alors $L|K$ est fini et $[L:K] = [L:E][E:K]$.

Définition 39 Soit $P \in K[X]$ irréductible. On appelle corps de rupture de P toute extension L telle que P ait une racine α dans L et $L = K(\alpha)$.

Proposition 40: Il existe un corps de rupture par P.

Proposition 41: Soit $P \in K[X]$ $\deg(P) = n$. Alors P est irréductible ssi P n'admet pas de racines dans toutes extensions de degré $\leq \frac{n}{2}$.

Définition 42: Soit $P \in K[X]$ on dit que P est un corps de décomposition de P si P est scindé sur L et si L est la plus petite extension de K vérifiant cette propriété

(6)

Théorème 43 : Soit $P \in K[X]$ alors P possède un unique (à K isomorphisme près) corps de décomposition L. On a de plus $[L:K] \leq \deg(P)!$

Définition 44 : On note $L := D_K(P)$

Théorème 45 : Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique corps de cardinal p^n. On le note $\mathbb{F}_{p^n}$
On a $\mathbb{F}_{p^n} = D_{\mathbb{F}_p}(X^{p^n} - X)$.

Exemple 46 : Construction de $\mathbb{F}_4$.
$\mathbb{F}_4 = \frac{\mathbb{F}_2[X]}{\langle X^2+X+1 \rangle}$ $\alpha = \bar{X}$ $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2 = \alpha+1\}$

Définition 47 : Soit L/K une extension. On dit que L est une clôture algébrique de K si L algébriquement clos et si tout élément de L est algébrique sur K.

Exemple 48 : $\mathbb{C}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{R}$.

Théorème 49 : Tout corps admet une unique clôture algébrique (à isomorphisme près).

Théorème 50 : La clôture algébrique de $\mathbb{F}_{p^n}$ est $\bigcup_{j=0}^{+\infty} \mathbb{F}_{p^{j!}}$

IV. Etude des racines de polynômes particuliers

A. Polynômes orthogonaux.

(7)

Cadre : On se place dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_I P(t)Q(t)w(t)dt$ où $w : I \to \mathbb{R}^+$ est continue appelée fonction poids telle que $\sup_{n \geq 0} \int_I |x|^n w(x)dx < +\infty$

Proposition 51 : Il existe une unique famille de polynômes orthonormée (P_n) telle que $\deg(P_n) = n$.

(7)

Exemple 52 : (Polynôme de Tchebychev) $I =]-1, 1[$
$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $P_n = T_n$ où $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$

Exemple 53 : (Polynôme d'Hermite) $I = \mathbb{R}$
$P_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$ où $w(x) = e^{-x^2}$

Proposition 54 : $(P_n)_n$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Proposition 55 : Les racines de $(P_n)_n$ sont entrelacées.

Théorème 54 (Méthode de quadrature de Gauss) Soit $I = [0,1]$ $w = 1$. $n \in \mathbb{N}^*$. $x_1, \dots, x_n$ les racines de P_n. Il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$
$$\int_0^1 P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

B. Polynômes cyclotomiques

(6)

Définition 55 : On définit le $n$ième polynôme cyclotomique par $\Phi_n = \prod_{k \wedge n = 1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$

Proposition 56 : $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ $\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$

Théorème 57 : Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$

(5)

Application 58 : Ordre des éléments de $GL_n(\mathbb{Z})$

Théorème 58 : Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire dont toutes les racines de P sont de module ≤ 1 alors les racines non nulles de P sont des racines de l'unité

(6)

Corollaire 59 : Soit P un tel polynôme avec $P(0) \neq 0$ alors P est produit de polynômes cyclotomiques

Théorème 60 : Soit $n \geq 1$ fixé. Il existe une infinité de nombres premiers de la forme $\equiv 1 [n]$ $\sum a_n X^n = \prod \frac{1}{1-X^{f(n)}}$

/02

1.16 Leçon 148 : Exemples de décompositions de matrices. Applications

Pour la quasi-totalité des leçons d'algèbre linéaire, X-ENS Algèbre 2/3 contiennent plein d'exemples intéressants, pour des résultats sur les corps finis et actions de groupes, les H2G2 Tome 1/2 contiennent tout ce qu'il faut.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre* X.Gourdon
— (2) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Equations différentielles* F.Berthelin
— (5) *Réduction des Endomorphismes* R.Mansuy R.Mneimé
— (6) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
— (7) *Analyse numérique et optimisation* G.Allaire
— (8) *Introduction à l'analyse numérique matricielle* P.Ciarlet

Exemples de décompositions de matrices. Applications

158

$\mathbb{K}$ est un corps E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Décomposition en réduction

A. Diagonalisation des endomorphismes normaux

(1)

Supposons $(E, \langle\ \rangle)$ euclidien.

Proposition 1 : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $M^*M = MM^*$ alors il existe $P \in U_n(\mathbb{C})$ et D diagonale tels que $M = PDP^*$.

Proposition 2 : ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ normale. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & A_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A_m \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$$

tels que $M = PDP^T$.

Corollaire 3 : (Théorème spectral) Si $M \in S_n(\mathbb{R})$ alors M se diagonalise en base orthonormée.

(2)

Application 4 : (Courant - Fischer). Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, notons $Sp(M) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$ alors :

$$\lambda_k = \min_{\substack{\dim F = k \\ F \text{ sev de } \mathbb{R}^n}} \ \max_{\substack{\|x\| = 1 \\ x \in F}} \langle Ax, x \rangle$$

Application 5 : $M \mapsto \lambda_k(M)$ est continue sur $S_n(\mathbb{R})$.

(1)

Proposition 6 : Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{pmatrix}$ $A_i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}$ $A = PDP^T$ $b_i \neq 0$

Application 6 : Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$ alors $\det(A) \geq 0$ et $rg(A)$ pair

(1)

Proposition 7 : Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D de la forme $\begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_q & & \\ & & R(\theta_1) & \\ & & & \ddots \\ & & & & R(\theta_k) \end{pmatrix}$ $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\theta_i \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$

(2)

Application 8 : $\exp(A_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$

Application 9 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Les deux composantes connexes par arcs de O_n sont $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

Application 10 : $SO_n(\mathbb{R})$ est simple (n impair).

B. Décomposition de Dunford

(1)

Proposition 11 : (Décomposition de Dunford). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ χ_M scindé alors il existe D diagonale, N nilpotente qui sont des polynômes en M tels que $M = D + N$

(3)

Application 12 : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e^M d_2 ssi M d_2

Application 13 : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $e^M = I_n$ ssi $\begin{cases} M \ d_2 \\ Sp(M) \subset 2i\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

Application 14 : $M \in GL_n(\mathbb{C})$ $(M^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bornée ssi $\begin{cases} M \ d_2 \\ Sp(M) \subset \mathbb{U} \end{cases}$

Proposition 15 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

Application 16 : $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs.

Application 17 : Soit $G \subset \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^2)$ sous groupe (on prend une norme subordonnée quelconque). Alors $G = \{I_n\}$

(4)

Proposition 18 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $Sp(M) \subset \{Re(z) < -\alpha\}$ alors $\|e^{tM}\| = o(e^{-\frac{1}{2}\alpha t})$

Application 19 : (Nature des points d'équilibres de $X' = AX$)

C. Décomposition de Jordan

(5)

Théorème 20 : (Jordan). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ χ_M scindé, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $r_1 \leq \dots \leq r_n$ uniques tels que

- - - -

Proposition 21 : Le nombre de blocs J_λ de taille k vaut :

(5)

$2m_k^{(r)} + m_{k-1}^{(r)} - m_{k+1}^{(r)}$ où $m_k^{(\lambda)} = \dim(\ker(M-\lambda I_n)^k)$

Application 22 : A et B sont semblables ssi $\forall \lambda \in K \ \forall k \in \mathbb{N}$ $\dim(\ker(A-\lambda I_n)^k) = \dim(\ker(B-\lambda I_n)^k)$

Application 23. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$, alors M est semblable à $2M$ ssi M est nilpotente.

D. Décomposition de Frobénius.

(1,5)

Théorème 24 : (Décomposition de Frobénius). Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ alors M est semblable à une matrice de la forme.

$$M = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$$ où C_{P_i} est la matrice compagnon associée à P_i. De plus les P_i sont uniques, sont appelées invariants de similitudes et vérifient $P_{i+1} | P_i$.

Proposition 25 : Deux matrices A et B sont semblables ssi elles ont les mêmes invariants de similitudes.

Application 26 : $n \in \{2,3\}$. A et B semblables ssi $\begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \pi_A = \pi_B \end{cases}$

Proposition 27 : M cyclique ssi $K[M] = \mathcal{C}(M)$ (commutant)

Proposition 28 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ alors $\dim(\mathcal{C}(M)) \geq n$

Proposition 29 : $M \in \mathcal{M}_n(K)$ M semblable à ${}^tM$.

Proposition 30 : $(A,B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$ $L|K$ extension. Si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(L)$ alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(K)$.

II Décomposition polaire

(21)

Proposition 31 : Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe un unique couple $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$. De plus,

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto (O,S) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

Remarque 32 : De même $GL_n(\mathbb{C}) \to U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C})$

Remarque 33 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a l'existence mais pas l'unicité d'un tel couple

(7)

Application 34 : $O_n(\mathbb{R})$ est le plus gros sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$

Proposition 35 : Soit $B_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid |||M|||_2 \leq 1\}$.

Alors $Ext(B_n(\mathbb{R})) = O_n(\mathbb{R})$ (points extrêmaux de la boule unité)

Application 36 : $Conv(O_n(\mathbb{R})) = B_n(\mathbb{R})$

(1)

Proposition 37 : On a un homéomorphisme :

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$) DVP 1

où $O(p,q)$ groupe de la forme quadratique non dégénérée de signature (p,q).

Application 38 : $O(p,q)$ est compact ssi $pq = 0$

Proposition 39 : Soit $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$, alors M est produit de deux exponentielles de matrices.

III Décomposition en analyse numérique

(7)

A. Résolution de systèmes linéaires : méthode directe

Complexité Pivot de Gauss : $\simeq \frac{2n^3}{6}$ opérations

Proposition 40 : (Factorisation LU). Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ $\det((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}) \neq 0$ alors il existe une unique matrice L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et une matrice U triangulaire supérieure telles que $A = LU$

Remarque 41 : La résolution du système linéaire $Ax = b$ est donc équivalent à la résolution de deux systèmes triangulaires. complexité :

Proposition 42 : (Factorisation de Cholesky). Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe B triangulaire inférieure telle que $A = BB^T$, on peut choisir B de telle sorte à avoir $b_{ii} > 0$. B est alors unique

Remarque 43 : La méthode de Cholesky (factorisation + résolution système linéaire) nécessite $\simeq \frac{n^3}{6} + \frac{n^3}{6} \simeq \frac{n^3}{3}$ opérations

(7)

Remarque 44 : Une fois la factorisation de Cholesky obtenue on en déduit facilement le déterminant de la matrice.

Remarque 45 : La décomposition de Cholesky est une décomposition LU, l'intérêt ici est que l'on a la même matrice.

Proposition 46 : (Décomposition en valeur singulière).

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ il existe U, V orthogonale et $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} V$$

Remarque 47 : Les λ_i sont les racines des valeurs propres de ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition 48 : La résolution de $Ax = b$ par la méthode de la décomposition en valeur singulière nécessite $\hat{?}$

Remarque 49 : (Lien entre décomposition polaire (en valeur singulière).

Si $A = OS$ alors $S = PDP^T$ ie $A = OPDP^T = UDV$

Si $A = UDV = \underbrace{UV^T}_{O} \underbrace{V^TDV}_{S} = OS$

(Notations évidentes).

B. Résolutions de systèmes linéaires : méthodes itératives.

(7)

Cf 226.

C. Recherche de valeur propre : La décomposition QR

(8)

Cf 149

1.17 Leçon 149 : Valeurs propres. Vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre* X.Gourdon
— (2) *Analyse numérique et optimisation* G.Allaire
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Analyse numérique et équations différentielles* JP.Demailly
— (5) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (6) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (7) *Analyse mathématique* F.Testard

Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

1 à 4

(1)

(2)

(2)

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On identifiera endomorphisme et matrice.

I Premières définitions, Généralités.

A. Éléments propres

(1)

Définition 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda x$ alors on dit que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

On note $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

Proposition 2 : Soit $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \in Sp(A)$ ssi λ racine de χ_A.

Application 3 : $|Sp(A)| \leq n$

Définition 4 : On appelle rayon spectral de A la valeur

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$$

Proposition 5 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il y a équivalence entre :

i) $A^k \to 0$

ii) $\rho(A) < 1$

iii) $\sum_{k \geq 0} A^k$ converge

Proposition 6 : Soit $\|.\|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\rho(A) \leq \|A\|$.

Proposition 7 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une norme subordonnée $\|.\|$ telle que $\|A\| < \rho(A) + \varepsilon$

(1)

Proposition 8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)}$, où $\|.\|_2$ est la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$

B. Conditionnement

(2)

On se donne une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 9 : On appelle conditionnement de la matrice A la valeur $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Proposition 10 : $cond(I_n) = 1$

$cond(A) = cond(A^{-1})$

$cond(\lambda A) = cond(A)$ $\lambda \neq 0$

$cond(A) \geq 1$

Proposition 11 : Soit A hermitienne alors :

- $\|A\|_2 = \rho(A)$
- $cond(A) = \dfrac{\rho(A)}{\min_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|}$

Proposition 12 :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$. Soit x la solution de $Ax = b$

Alors si $A(x + \delta x) = b + \delta b$ on a $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq cond(A) \dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

(2)

II Connaissances exactes des éléments propres.

(1)

A. Aspects pratiques.

Définition 13 : Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ on définit la matrice compagnon de P par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 14 : $\chi_{C_P} = P$

Remarque 15 : Savoir déterminer le spectre des matrices revient à trouver les racines des polynômes, problème impossible par $n \geq 5$.

B. Aspects théoriques.

(3)

Théorème 16 : (Kronecker). Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire on suppose que les racines de P sont de module ≤ 1 alors les racines non nulles de P sont des racines de l'unité.

Proposition 17 : Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$ alors $|G| \leq N_n$ où N_n ne dépend pas de G

Proposition 18 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A^n = 0 \iff \forall k \geq 1, tr(A^k) = 0$

Théorème 19 : (Burnside) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini alors G est fini.

(3) Définition 20: (Matrices circulantes). On note $J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{n,1}$

une matrice circulante est une matrice de la forme $P(J)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$ deg $P \leq n$.

Proposition 21: Soit $A = P(J)$ une matrice circulante, alors A est diagonalisable et $Sp(A) = \{P(\omega^j) / j \in [\![0, n-1]\!]\}$ $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Application 22: Soit N impair et $(X_n)_n$ suite de va sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ telles que $X_0 = ps$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = k \pm 1 \mid X_n = k) = \frac{1}{2}$. Alors

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{U}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

DVP 1

(1) Proposition 23: Soit $(M_p)_p$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} M$.

Notons $(\lambda_i(p))_i$ les valeurs propres de M_p. Alors $\lambda_i = \lim_{p \to +\infty} \lambda_i(p)$ existe et $(\lambda_i) \in Sp(M)$

Application 24: L'adhérence des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

(3) Définition 25: On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si:

$\forall i,j \quad a_{i,j} \geq 0$

$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

Proposition 26: Soit A stochastique, si $\lambda \in Sp(A)$ alors $|\lambda| \leq 1$

De plus si $|\lambda| = 1$ alors λ est une racine de l'unité.

(1) Proposition 27: (Théorème de Perron). Soit A stochastique on suppose que tous les coefficients de A sont > 0. Alors 1 est racine simple du polynôme caractéristique de A.

(6) Théorème 28: (Courant-Fischer). Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, notons $Sp(A) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$ alors

$$\lambda_k = \min_{\dim(F) = k} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\| = 1}} \langle Ax, x \rangle$$

(6)

Application 29: Dans les conditions du théorème précédent, $M \mapsto \lambda_k(M)$ est continue

Proposition 30: Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En connaissant les valeurs propres de A on peut en déduire l'allure des solutions de $X' = AX$ (Cf Annexe).

(4) Théorème 31: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors 0 est un équilibre de $X' = AX$.

asymptotiquement stable ssi $\forall \lambda \in Sp(A) \quad Re(\lambda) < 0$

stable ssi $\forall \lambda \in Sp(A) \quad Re(\lambda) \leq 0$ et $Re(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ non défective.

(5) Théorème 32. (Lyapunov). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$. On note $A = Jac(f)(0)$. On suppose que pour $\lambda \in Sp(A) \quad Re(\lambda) < 0$. Alors pour x voisin de 0 l'unique solution maximale de $\begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = x \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0.

III Calculs approchés

(2) Lemme 33 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour $i \in [\![1,n]\!]$ $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ alors A est inversible

Application 34: (Disque de Gershgörin). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} / |z - a_{i,i}| < \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|\}$

B. Méthode de la puissance.

Cadre 35: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$ et λ_1 la plus grande valeur propre en module de multiplicité p. On suppose que pour $\lambda \neq \lambda_1 \quad |\lambda| < |\lambda_1|$

Algorithme 36: (Méthode de la puissance)

(2)

Théorème 37 : (Convergence de la méthode de la puissance). Avec les notations précédentes, la suite $(x^{(k)})_k$ converge un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1. De plus la suite $(\beta^{(k)})_k$ converge vers λ_n.

C. Méthode QR.

(2)

Proposition 38 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A on peut écrire $A = QR$ avec Q orthogonale /unitaire et R une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 39 : L'application $GL_n(\mathbb{C}) \to U_n(\mathbb{C}) \times T_n^+(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme.

Algorithme 40 : (Méthode QR)

Théorème 41 : On suppose que les valeurs propres de A sont telles que $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$. Alors la suite $(A^{(k)})_k$ vérifie

$$\lim_{k \to +\infty} \mathrm{Diag}(A^{(k)}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Si de plus A symétrique alors $(A^{(k)})_k$ converge vers une matrice diagonale.

OVP 2

IV Applications : convergences de méthodes itératives

A. Méthodes itératives

(2)

Cadre 42 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ $b \in \mathbb{K}^n$. On veut résoudre $Ax = b$.

On écrit $A = M - N$ avec M^{-1} facile à inverser alors résoudre $Ax = b$ revient à résoudre $Mx = Nx + b$

Définition 43 : On considère la suite $(x^{(k)})_k$ définie par

$$x^{(k+1)} = M^{-1}N x^{(k)} + M^{-1}b.$$

Proposition 44 : $(x^{(k)})_k$ converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$

Définition 45 : (Méthode de Jacobi). On écrit $A = D - E - F$ D la diagonale de A, $-E$ la partie sous diagonale et $-F$ sa partie sur diagonale. $M = D$, $N = E + F$

Proposition 46 : Si A est à diagonale strictement dominante alors la méthode de Jacobi converge vers la solution de $Ax = b$

Définition 47 : (Méthode de Gauss-Seidel) On pose $M = D - E$ $N = F$

Proposition 48 : Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors la méthode de Gauss-Seidel converge vers la solution de $Ax = b$

(7)

B. Gradient à pas optimal

Cadre 49 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ $b \in \mathbb{R}^n$, on veut minimiser $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. Notons $\bar{x}$

Algorithme 50 : (Gradient à pas optimal)

OVP 3 ?

Proposition 51 : (Inégalité de Kantorovich)

Théorème 52 : (Convergence méthode gradient pas optimal).

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|x_k - \bar{x}\| \leq \sqrt{\mathrm{cond}_2(A)} \left(\frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1} \right)^k \|x_0 - \bar{x}\|$$

1.18 Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.

Attention à ne pas faire trop d'analyse. Au début d'année je mettais le théorème des Extrémas liés en développement mais après réflexion, je pense que ce n'est pas un bon développement pour cette leçon.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre* X.Gourdon
— (2) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Cours d'Algèbre* D.Perrin

Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.

151

$\mathbb{K}$ est un corps. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Espaces vectoriels et dimension.

A. Familles libres, génératrices

Définition 1: $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ est dite libre si

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad \left[\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0\right]$$

Exemple 2: $(X^n)_n$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$

Définition 3: $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice si:

$$\forall x \in E \ \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \ x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Définition 4: Si $(e_i)_i$ est libre et génératrice alors on dit que c'est une base de E.

Proposition 5: Soit $(e_i)_{i\in I} \in E^I$. Il y a équivalence:
- $(e_i)_i$ base de E
- $(e_i)_i$ génératrice minimale
- $(e_i)_i$ libre maximale

B. Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 6: E est dit de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de E.

Théorème 7: (Base incomplète). Soit E de dimension finie et L une partie libre, G une partie génératrice de E. Alors il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset L \cup G$.

Corollaire 8: Un ev est de dim finie ssi il admet une base finie

Lemme 9: Toute base d'un ev de dim finie est finie

Lemme 10: Soit $(a_1, \dots, a_p)$ des vecteurs libres de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_q)$

Alors $a_1, \dots, e_p \in \mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_p)$.

Théorème 11: Dans un ev de dim finie toutes les bases ont le même cardinal, on appelle dimension de E et on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ce cardinal commun.

Exemple 12: $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$ $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$.

Proposition 12: Soit E de dim n. Toute famille libre possède au plus n vecteurs. Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.

Application 13: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E de dim finie alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(f) = 0$.

Proposition 14: Soit E de dim finie et $F \subset E$ un sev. Alors F est de dim finie.

Proposition 15: Soit E de dim n. Alors sont équivalents
- B base de E
- $|B| = n$ et B libre
- $|B| = n$ et B génératrice

Application 16: Si E de dim n et $F \subset E$ de dim n alors $F = E$

Proposition 17: Soit E $\mathbb{K}$-ev de dim n alors $E \simeq \mathbb{K}^n$

Application 18: Soit $\mathbb{K}$ un corps fini alors $|\mathbb{K}|$ est une puissance d'un nombre premier.

C. Calcul de dimension

On suppose E de dim finie.

Proposition 19: Soit $F \subset E$ un sev. Alors F admet un supplémentaire G et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Corollaire 20: Si F, G en somme directe alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Théorème 21: (Formule de Grassmann). Soit $F, G \subset E$ des sevs. Alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Proposition 22: Soient $F, G \subset E$ deux sevs. Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées alors elles le sont toutes

ii) $F \cap G = \{0_E\}$ iii) $E = F+G$ iii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

Proposition 23 : $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

Proposition 24 : $\dim\left(\frac{E}{F}\right) = \dim(E) - \dim(F)$

II Applications linéaires en dimension finie, rang

Soit E de dim n et F de dim p et $f \in \mathcal{L}(E,F)$

A. Résultats fondamentaux

Proposition 25 : $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np$

Définition 26 : On appelle rang de f et on note $rg(f)$ la dimension de $Im(f)$.

Proposition 27 : $rg(f) \leq \min(n,p)$

Théorème 28 : (Théorème du rang).

$$n = \dim(Ker(f)) + rg(f)$$

Application 29 : Supposons $n=p$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- f injective
- f surjective
- f bijective

Application 30 : Supposons $E = F$. Il y a équivalence entre

- $Ker(f) = Ker(f^2)$
- $Im(f) = Im(f^2)$
- $E = Ker(f) \oplus Im(f)$

Application 31 : Soit $x_1, \dots, x_n$ distincts et $y_1, \dots, y_n$ des réels. Il existe un unique polynôme P de degré $\leq n-1$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

B. Dualité

C. Rang et matrices

III Quelques applications.

A. Réduction en algèbre linéaire

148

B. Analyse

219

C. Constructibilité.

125

1.19 Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Références utilisées :

- (1) *Algèbre* X.Gourdon
- (2) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H. Gianella S.Nicolas
- (3) *Analyse* X.Gourdon
- (4) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H. Gianella S.Nicolas
- (5) *Objectif Agrégation* V.Beck J.Malick G.Peyré
- (6) *Théorie de l'intégration* M.Briane G.Pagès
- (7) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière

E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I Formes multilinéaires, déterminants

A. Formes multilinéaires alternées

(11)

Définition 1 : $f : E^p \to \mathbb{K}$ est dite multilinéaire alternée si f est p-linéaire et $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que $x_i = x_j$ pour $i \neq j$

On note $\Lambda_p(E)$ l'ensemble de ces applications.

Proposition 2 : Soit $f \in A_p(E)$. Alors pour $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ $\sigma \in S_p$

$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$

Proposition 3 : Si $(x_1, \dots, x_p)$ lié et $f \in \Lambda_p(E)$ alors $f(x_1, \dots, x_p) = 0$

B. Déterminants

(11)

Théorème 4 $\dim(A_n(E)) = 1$

Proposition 10 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E, il existe un unique $f \in \Lambda_n(E)$ qui vaut 1 sur $\mathcal{B}$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ cette unique application et on la note $\det_{\mathcal{B}}$.

Proposition 11 Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ avec

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j \text{ Alors}$$

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}$$

Proposition 12 : Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Théorème 13. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) $(x_1, \dots, x_n)$ libre

ii) $\exists$ base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

iii) $\forall$ base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

Définition 14 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ $f \in \Lambda_n(E)$ on pose $f_u \in \Lambda_n(E)$ par $f_u(x_1, \dots, x_n) = f(u(x_1), \dots, u(x_n))$

Proposition 15 Il existe $\lambda_f \in \mathbb{K}$ tel que $f_u = \lambda_f f$. En réalité λ_f ne dépend que de u.

(11)

Définition 16 On appelle déterminant de u et on note $\det(u)$ le scalaire λ_f.

Proposition 17 Pour tout $f \in \Lambda_n(E)$, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$

$$f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) f(x_1, \dots, x_n)$$

Proposition 18 Pour toute base $(e_1, \dots, e_n)$ de E,

$$\det(u) = \det_{(e_i)}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

Exemple 19 : Si $u(e_i) = \lambda_i e_i$ alors $\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

Proposition 20, Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

- $\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det(u)\det(v)$
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
- $\det(u) \neq 0 \iff u$ inversible. et $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$

B. Déterminant d'une matrice

Définition 21 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit $\det(M)$ par :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i),i}$$

Notation 22 : On note $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Exemple 23 : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Proposition 24 : $\det(M)$ est le déterminant de n'importe quel endomorphisme qui a dans une base quelconque de E la matrice M.

Proposition 25 : Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$\det(MN) = \det(M)\det(N)$

$M \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(M) \neq 0$ dans ce cas $\det(M^{-1}) = \det(M)^{-1}$

Proposition 27 : $\det(M) = \det({}^tM)$

II Calcul pratique du déterminant d'une matrice.

A. Cas général

(1) **Proposition 28** $\det(A)$ est inchangé si on ajoute à une colonne (ligne) de A une combinaisons linéaires des autres

Proposition 29: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ on note $A_{i,j}$ la matrice extraite de A où on a supprimé la $i$ème ligne et la $j$ème colonne. Alors:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

Proposition 30: Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_p(K)\times\mathcal{M}_n(K)$ alors:

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Proposition 31: (Vandermonde). Soit $a_1,\dots,a_n \in K$ alors

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & \cdots & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$$

(2) **Application 32**: ($\mathrm{car}(k)=0$). $A \in \mathcal{M}_n(k)$ $\forall k \geq 1$ $\mathrm{tr}(A^k)=0 \Rightarrow A^n=0$

Proposition 33: (Déterminant Circulant). Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_n & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n} P(\omega^k) \quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

Application 34:

(1,2) **Proposition 35**: (Déterminant de Cauchy). Soit $(a_i,b_j) \in K$ avec $a_i + b_j \neq 0$ alors

$$\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right) = \frac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)\prod_{i<j}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)}$$ /DVP

Déterminant de Smith.

Application 36: (Théorème de Mentz) Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de réels ≥ 1. Alors:]DVP

$\mathrm{Vect}(x^{\lambda_n} / n\geq 1)$ dense dans $C^0([0,1])$ $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\lambda_n}$ diverge

(3)

III Interprétation géométrique.

(1,3) **Proposition 37**: $\det(x_1,\dots,x_n)$ est le volume du parallélépipède engendré par $(x_1,\dots,x_n)$.

Proposition 38: (Inégalité d'Hadamard).

$$|\det(x_1,\dots,x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|_2$$

Définition 39: Soit E euclidien. Pour $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$ on définit la matrice de Gramm de $(x_1,\dots,x_p)$ par

$$\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_p) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq p}$$

et $G(x_1,\dots,x_n) = \det(\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_n))$.

Proposition 40: $\mathrm{Gram}(x_1,\dots,x_p) \in S_p^+(\mathbb{R})$

$G(x_1,\dots,x_n) > 0 \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_p)$ libre.

Proposition 41: Soit $F \subset E$ un sev et $(x_1,\dots,x_p)$ une base de F. Alors pour $x \in E$ $d(x,F)^2 = \frac{G(x,x_1,\dots,x_p)}{G(x_1,\dots,x_p)}$

(1) **Application 42**: $\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n}\int_0^1 (1+a_1x+\cdots+a_nx^n)^2dx = \frac{1}{n+1}$

(1) **Définition 43**: Soit E euclidien et $(e_i)_i$ une bon de référence. On dit que $(e_i')_i$ est une bon directe si $\det_{(e_i)}(e_i') > 0$ et indirect si $b(e_i)(e_i') < 0$.

IV Application en algèbre

A. Comatrice.

(1) **Définition 44**: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On définit $\mathrm{com}(A) \in \mathcal{M}_n(K)$ par $\mathrm{com}(A)[i,j]_t = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$

Proposition 45: $\mathrm{com}(A)A = A\,\mathrm{com}(A) = \det(A)I_n$

(1)

Proposition 46 : Si A inversible, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{com}(A)$

Application 47 : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k)$ Alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ab-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Application 48 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ alors :

$$A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \iff \det(A) = \pm 1$$

B. Systèmes linéaires.

(1)

Proposition 49 : (Formule de Cramer). Soit $A \in GL_n(K)$ et x solution de $Ax = b$. Alors

$$x_k = \frac{\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$$

C. Polynôme caractéristique.

(1)

Définition 50 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ on définit χ_A par :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \quad XI_n - A \in K(X).$$

Proposition 51 : $\chi_A \in K[X]$ est appelé polynôme caractéristique de A.

Exemple 52 : $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

$\chi_{C_P} = P$

Proposition 53 : (Cayley - Hamilton) $\chi_A(A) = 0$

D. Réciprocité quadratique

(5)

Définition 54 : On définit le groupe spécial linéaire par

$$SL_n(K) = \det^{-1}(\{1\}) \trianglelefteq GL_n(K)$$

Définition 55 : Pour $a \in \mathbb{Z}$ p premier :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \text{ carré mod } p \\ 0 \text{ si } p | a \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

(5)

Théorème 56 : (Frobénius Zolotarev). Pour $\varphi \in GL_n(\mathbb{F}_p)$

$$\varepsilon(\varphi) = \left(\frac{\det(\varphi)}{p}\right)$$

Application 57 : $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

/ DVP

V Applications en analyse

(6)

Théorème 58. (Changement de variable)
Soit φ un C^1 difféomorphisme sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et f intégrable sur U. Alors :

$$\int_{\varphi(U)} f(x)\,dx = \int_U f(\varphi(x)) |J(\varphi)(x)|\,dx$$

Application 59 : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Proposition 60 $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue

Application 61 : $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert non connexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(7)

Proposition 62 : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$d(\det)(M) \cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{com}(M)\, H).$$

Application 63. Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et $y_1, \dots, y_n$ solutions de $y' = A(t)y$. Alors.

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = W(y_1, \dots, y_n)(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))\,ds}$$

Proposition 64 : $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$.

VI Coordonnées barycentriques

cf 181

1.20 Leçon 153 : Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Pas forcément facile, il faut éviter de faire une simple leçon de réduction.

Références utilisées :

— (1) *Réduction des Endomorphismes* R.Mansuy R.Mneimé
— (2) *Algèbre* X.Gourdon
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Histoires hédéonistes de groupes Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
— (5) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (6) *Equations différentielles* F.Berthelin
— (7) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Second* P.Caldero J.Germoni

Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications

154

E est un K-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On identifiera constamment endomorphismes et matrices.

I Polynômes d'endomorphismes

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

A. L'algèbre $K[f]$

Définition 1 : Pour $P = \sum a_k X^k$ on associe l'endomorphisme $P(f)$ défini par $P(f) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k f^k$ avec la convention $f^0 = id_E$.

Exemple 2 : $P = X^3 + 2X - 1$ $\quad P(f) = f^3 + 2f - id_E$

Proposition 3 : $\Phi_f : K[X] \to \mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'algèbre
$P \mapsto P(f)$

Définition 4 : On note $K[f] = Im(\Phi_f)$ l'algèbre commutative des polynômes en f.

Proposition 5 : $K[f]$ est un ev de dimension finie

Application 6 : $\exp(f) \in K[f]$.

Théorème 7 : (Lemme des Noyaux)

B. Polynôme annulateur

Proposition 8 : $\ker(\Phi_f)$ est un idéal non nul de $K[X]$, on l'appelle l'idéal des polynômes annulateur de f.

Remarque 9 : Si $\dim(E) = +\infty$ cet idéal peut être nul : $P \mapsto P'$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Définition 10 : L'unique générateur unitaire de $\ker(\Phi_f)$ est appelé polynôme minimal de f, on le note π_f. $P(f) = 0 \iff \pi_f | P$

Exemple 11 : $f = \lambda id_E$: $\pi_f = X - \lambda$

f nilpotent d'indice p : $\pi_f = X^p$

f projecteur non trivial $\pi_f = X^2 - X$

Proposition 12 : On a un isomorphisme $K[f] \simeq \frac{K[X]}{\langle \pi_f \rangle}$

Application 13 : $K[f]$ sev de dim $\deg(\pi_f)$

Application 14 : $K[f]^\times = \{ Q \in K[X] \,/\, Q \wedge \pi_f = 1 \}$

Corollaire 15 : $K[f]$ corps ssi π_f irréductible

Proposition 16 : (Théorème Chinois) Soit $\pi_f = \prod_{i=1}^{r} P_i^{d_i}$ sa décomposition en facteur irréductible alors :

$$K[f] \simeq \frac{K[X]}{\langle P_1^{d_1} \rangle} \times \dots \times \frac{K[X]}{\langle P_r^{d_r} \rangle}$$

Proposition 17 : Soit $F \subset E$ sev stable par f. Alors $\pi_{f|F} \mid \pi_f$

Proposition 18 : Si $E = F \oplus G$ F, G stable par f alors :
$\pi_f = \text{ppcm}(\pi_{f|F}, \pi_{f|G})$.

C. Utilisation polynome annulateur

Proposition 19 : Si $f \in GL(E)$ $f^{-1} \in K[f]$

Proposition 20 : (calcul de puissance). Si $\pi_f = (X-a)(X-b)$ $a \neq b$ alors $f^m = \frac{a^m - b^m}{a-b} f + \frac{ba^m - ab^m}{b-a} Id_E$

D. Polynôme caractéristique / valeur propre

Définition 21 : On définit le polynôme caractéristique par $\chi_f = \det(X Id_E - f)$

Proposition 22 : $\chi_{fog} = \chi_{gof}$

Corollaire 23 : Si f et g semblables $\chi_f = \chi_g$

Exemple 24 : Si f nilpotente $\chi_f = X^n$

Proposition 25 : Si $E = F \oplus G$ avec F, G f stables alors $\chi_f = \chi_{f|F} \chi_{f|G}$

Théorème 26 (Cayley-Hamilton) $\pi_f | \chi_f$

Proposition 27 : Soit P un polynôme annulateur de f et $\lambda \in K$.
λ valeur propre de $f \iff \pi_f(\lambda) = 0 \iff \chi_f(\lambda) = 0 \implies P(\lambda) = 0$

Corollaire 28 Si $K = \mathbb{C}$ f admet une valeur propre

Proposition 29 : (Décomposition en sous espaces caractéristiques).
Supposons $\chi_f = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i}$ scindé alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
où $F_i = \ker((u-\lambda_i Id_E)^{m_i})$ sous-espace caractéristique stable par f.

II Diagonalisation d'un endomorphisme

A. Diagonalisation

(1)
Définition 30 : On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Théorème 31 : (Critère de diagonalisation). Les énoncés suivants sont équivalents :
- f diagonalisable
- π_f scindé à racines simples
- Il existe P annulateur de f et scindé à racines simples
- χ_f scindé et pour tout $\lambda \in Z(\chi_f)$ λ non défective.

(3)
Application 32 : (Burnside) Soit G un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors G est fini.

Proposition 33 : f est diagonalisable ssi $\exists \ell \in \mathbb{N}^*$, $K[f] \simeq K^\ell$

B. Si $K = \mathbb{F}_q$ corps fini.

(4)
Proposition 34 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dz ssi $f^q = f$

Application 35 : (Nombres de matrices dz sur $\mathbb{F}_q$) Le nombre de matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$ vaut :

$$\sum_{m_1+\dots+m_r=n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{m_1}(\mathbb{F}_q)| \times \dots \times |GL_{m_r}(\mathbb{F}_q)|}$$

Remarque 36 : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$

C. Codiagonalisabilité.

(2)
Proposition 37 : Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ dz alors f et g sont co-dz (diagonalisables dans une même base) ssi $f \circ g = g \circ f$.

Proposition 38 : f, g co dz $\Rightarrow f+g$ dz et $f \circ g$ dz

(3)
Application 39 Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ d'ordre fini et abélien alors G est conjugué à un sous-groupe de matrices diagonalisables

Application 40 ($Car(K) \neq 2$) Si $GL_n(K) \simeq GL_m(K)$ alors $n = m$

D. Diagonalisabilité et semi-simplicité

(2.3)
Définition 41 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi-simple si tout $F \subset E$ sev stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Proposition 42 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence :
i) f semi-simple
ii) π_f sans facteur carré $\quad K$ Parfait

Corollaire 43 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple ssi f est diagonalisable dans une extension de K.

Proposition 44 : Si f semi-simple alors $K[f]$ produit de corps.

E. Réduction des endomorphismes normaux.

(2)
Supposons E euclidien. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on note u^* son adjoint.

Théorème 45 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, alors u se diagonalise en base orthonormée. u normal ssi $u^* \in K[u]$.

Théorème 46 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & A_1 & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & A_m \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}, \ b_i \neq 0$$

De plus si :
$u^* = u$ A_i est diagonale
$u^* u = u u^* = Id_E$ $\lambda_i \in \{\pm 1\}$ $A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$
$u^* = -u$ $\lambda_i = 0$

(5)
Proposition 47 : (Décomposition polaire) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe un unique $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $M = OS$
De plus $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorphisme
$M \longmapsto (O,S)$

Application 48. $O_n(\mathbb{R})$ est le plus gros sous-groupes compact de $GL_n(\mathbb{R})$

(3) Proposition 50 : $\exp : S_n \to S_n^{++}$ homéomorphisme

(5) Proposition 51 : Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors $\det(A) > 0$ ssi $\mathrm{rg}(A)$ pair

Application 52 $\exp(A_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$

Application 53 $SO_n(\mathbb{R})$ connexe

Application 54 : Soit n impair alors $SO_n(\mathbb{R})$ simple.

III Le cas où χ_u scindé : trigonalisation

A. Trigonalisation

(2) Définition 55 Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Théorème 56 (Critère de trigonalisation) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre :

i) f trigonalisable (ii)

ii) χ_f scindé sur k.

Proposition 57 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les racines de χ_f dans un corps de décomposition de χ_f. Alors

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(e^f) = e^{\mathrm{tr}(f)}$$

B. Décomposition de Dunford

(2) Théorème 58 (Décomposition de Dunford) : Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$ avec χ_A scindé. Alors il existe un unique couple (D, N) tels que D diagonalisable, N nilpotent et $A = D + N$. De plus D et N sont des polynômes en A.

(3) Application 59 Si $G \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$ sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ alors $G = \{I_n\}$. (On prend une norme subordonnée quelconque).

Proposition 60 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est d_2 ssi e^A l'est

Application 61 : Les solutions de $e^A = I_n$ sont les matrices diagonalisables à spectre inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

(2) Proposition 62 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Sp(A) \subset \{Re(z) < -\alpha\}$ alors $\|e^{tA}\| = o(e^{-\frac{\alpha}{2}t})$

Remarque 63 Résultat crucial dans la preuve sur la nature des équilibres de $X' = AX$.

(8) Proposition 64 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

IV Décomposition de Frobénius

(2) Définition 65 f est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, \dots, f^{n-1}(x))$ base de E.

Définition 66 : On note $\pi_{f,x}$ l'unique générateur unitaire de $\{P \in k[X] \mid P(f).x = 0\}$

Lemme 67 Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{f,x} = \pi_f$

Application 68 : f est cyclique ssi $\pi_f = \chi_f$

Théorème 69 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe $F_1, \dots, F_r$ de sev tels que :

- $E = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$
- $f|_{F_i}$ cyclique de polynôme minimal P_i et de plus $P_{i+1} | P_i$

La suite $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de f et s'appelle la suite des invariants de similitudes de f.

DUP

Proposition 70 $A, B \in \mathcal{M}_n(k)^2$ sont semblables ssi elles ont les mêmes invariants de similitudes

Proposition 71 : $n \in \{2,3\}$ $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$ $A \sim B \iff \begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \pi_A = \pi_B \end{cases}$

Proposition 72. Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(k)$ est semblable à sa transposée.

Proposition 73 Si $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$ sont semblables sur $L \supset k$ alors elles le sont sur k.

(7) Proposition 74 Soit $d_1, \dots, d_k$ les degrés des invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\dim(\mathcal{C}(f)) = \sum_{i=1}^{k} (2d_i - 1)$

Application 75 (Théorème du bicommutant) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

$\{g \mid \forall h \in \mathcal{C}(f),\ h \circ g = g \circ f\} = k[f]$

1.21 Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Pas si facile que ça en a l'air.

Références utilisées :

— (1) *Réduction des Endomorphismes* R.Mansuy R.Mneimé
— (2) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Algèbre* X.Gourdon
— (4) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (6) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Second* P.Caldero J.Germoni

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications

154

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On identifiera constamment endomorphismes et matrices.

I Définitions, généralités

A. Sous-espaces stables

(1)

Définition 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un sev. On dit que F est stable par f (ou f-stable) si $f(F) \subset F$

Exemple 2 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\ker(P(f))$ et $\mathrm{Im}(P(f))$ sont f-stables

Proposition 3 : Si F stable par f et g alors F stable par $f+g$ et $f \circ g$.

Exemple 4 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On note $E_x = \mathrm{Vect}(f^k(x) \mid k \in \mathbb{N})$. C'est le plus petit sous espace stable par f contenant x.

B. Quelques exemples particuliers

(2)

Proposition 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\mathbb{K}x$ est stable par f ssi x est un vecteur propre de f ($x \neq 0$).

Proposition 6 : Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ stabilisant tous les sevs de dimension k. Alors f est une homothétie

Proposition 7 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$ alors les sous-espaces de E stables par f sont les $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ où $F_i \subset E_{\lambda_i}$

Application 7 : Si f a n vp distinctes alors f admet 2^n sous-espaces stables.

Proposition 8 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotente d'indice maximal alors les sous-espaces stables par f sont les $(\ker(f^i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ en particulier f n'admet qu'un nombre fini de sev stable

Proposition 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors trouver les hyperplans de E stable par f revient à trouver les vecteurs propres de ${}^t f$

Application 10 : sous-espaces stables par la matrice :

C. Propriétés de l'endomorphisme induit.

(1)

Proposition 11 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ avec E_i stable par f alors dans une base adaptée à cette décomposition la matrice de f est diagonale par blocs.

Proposition 12 : Si $E = F \oplus G$ avec F, G f-stables alors $\pi_f = \mathrm{ppcm}(\pi_{f|G}, \pi_{f|F})$ et $\pi_{f|F} \mid \pi_f$

Application 13 : Si f diagonalisable alors $f_{|F}$ aussi

Proposition 14 : Si $E = F \oplus G$ avec F, G f-stables alors $\chi_f = \chi_{f|F}\, \chi_{f|G}$ donc $\chi_{f|F} \mid \chi_f$.

Application 15 : Si f trigonalisable alors $f_{|F}$ aussi.

II Application à la réduction

(3)

A. Trigonalisation / Diagonalisation

Proposition 16 : (Lemme des noyaux). Soit $P_1, \dots, P_r$ des polynômes premier entre eux 2 à 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\ker(P_1 \cdots P_r)(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(f))$$

De plus les projecteurs sont des polynômes en f.

Remarque 17 : Si $P_1 \cdots P_r$ annule f alors on a écrit E comme une somme directe de sous-espaces stables.

Proposition 18 : Les conditions suivantes sont équivalentes

f trigonalisable (ssi)

- χ_f scindé sur $\mathbb{K}$
- ${}^t\pi_f$ scindé sur $\mathbb{K}$
- il existe un polynôme annulateur de f scindé sur $\mathbb{K}$

Proposition 19 : f est trigonalisable ssi f stabilise un drapeau ie une suite $(F_i)_i$ de sev de E tels que $F_i \subset F_{i+1}$, $\dim(F_i) = i$

Proposition 20 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

f diagonalisable

- ${}^t\pi_f$ scindé à racines simples
- χ_f scindé et toutes les valeurs propres sont non défectives.

B. Stabilité et commutativité.

Proposition 21: Si $f \circ g = g \circ f$ alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Proposition 22: ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Si f et g commutent alors f et g ont un vecteur propre commun.

Proposition 23: (co-diagonalisable) Soit f, g diagonalisables. Alors f, g sont co diagonalisables ssi ils commutent.

Application 24: ($\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$) $GL_n(\mathbb{K}) \simeq GL_m(\mathbb{K}) \Rightarrow n = m$.

Application 25: $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un injective.

Proposition 26: Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ sous les conditions suivantes, A et B sont co-trigonalisables.

- $AB = BA$
- $AB - BA \in \text{Vect}(A, B)$
- $\text{rg}(AB - BA) \leq 1$
- $AB = 0$

Théorème 27: (Lie-Kolchin) Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe connexe résoluble alors les éléments de G sont co-trigonalisables.

C. Réduction des endomorphismes normaux.

Proposition 28: Supposons E euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ si $F \subset E$ est f stable alors $F^\perp$ est f^* stable

Proposition 29: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ normal et $\lambda \in Sp(f)$ alors $E_\lambda^\perp$ est stable par f.

Théorème 30 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & A_1 & \\ & & & & \ddots \\ (0) & & & & A_m \end{pmatrix} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}, \; b_i \neq 0$$

Application 31 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) (Théorème spectral) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tels que $A = PDP^T$

Proposition 32 Décomposition polaire Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe un unique $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $M = OS$

De plus $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorphisme

$M \mapsto (O, S)$

Application 33. $O_n(\mathbb{R})$ est le plus gros sous-groupes compact de $GL_n(\mathbb{R})$

Application 34. On a un homéomorphisme.

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$

Proposition 35: Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$ alors M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} (0) & & (0) \\ & A_1 & \\ & & \ddots \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$ $A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}$ $a_i \neq 0$

Application 36 Si $M \in A_n(\mathbb{R})$ $\text{rg}(M)$ pair et $\det(M) \geq 0$.

Proposition 37: Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors M est orthogonalement semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & (0) \\ & -I_q & & \\ & & R(\theta_1) & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\theta_i \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$.

Application 38 $\exp(A_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$

Application 39 $SO_n(\mathbb{R})$ connexe

Application 40 : Soit n impair alors $SO_n(\mathbb{R})$ simple.

III Endomorphismes remarquables pour la stabilité

A. Endomorphismes simples

Définition 41: $f \in \mathcal{L}(E)$ est simple si ses seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et E.

Proposition 42: f est simple ssi χ_f irréductible.

B. Endomorphismes semi-simples

Définition 43: f est dit semi-simple si tout espace

(2) Stable par f admet un supplémentaire stable.

Proposition 44 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors il y a équivalence

i) f diagonalisable

ii) χ_f scindé et f semi-simple

Remarque 45 : Ainsi sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme diagonalisable est semi-simple.

Proposition 46 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence : DVP

1) f semi-simple

ii) π_f sans facteur carré

Corollaire 47 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple ssi f est diagonalisable dans une extension de K. ($car(K) = 0$)

C. Endomorphismes cycliques

(3) Définition 48 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ on dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x := Vect(f^k(x) / k \in \mathbb{N}) = E$. Un tel vecteur est dit u-cyclique

Exemple 49 : Si f nilpotent d'indice max alors f cyclique

Exemple 50 : Si f diagonalisable avec n valeurs propres distinctes alors f cyclique.

Définition 51 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\pi_{f,x}$ l'unique générateur de $I_x := \{P \in K[X] / P(f)(x) = 0\}$

Proposition 52 Il existe $x \in E$ tel que $\pi_{f,x} = \pi_f$

Application 53 : f est cyclique ssi $\pi_f = \chi_f$

Proposition 54 : Les endomorphismes cycliques forment un ouvert dense connexe par arcs.

Application 55 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\dim(\mathcal{C}(f)) \geq n$

(2) Proposition 56 : On note $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}$ alors f est cyclique ssi $K[f] = \mathcal{C}(f)$.

Proposition 57 : (K infini) f cyclique ssi f a un nombre fini de sous-espaces stables.

Proposition 58 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique ssi il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon

D. Réduction de Frobénius

(3) Théorème 59 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe $F_1, \dots, F_r$ de sev tels que : DVP

- $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
- $f|_{F_i}$ cyclique de polynôme minimal P_i et de plus $P_{i+1} | P_i$

La suite $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de f et s'appelle la suite des invariants de similitudes de f.

Proposition 60 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ Alors M est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sont des matrices compagnons.

Proposition 61 : $A, B \in \mathcal{M}_n(K)^2$ sont semblables ssi elles ont les mêmes invariants de similitudes

Proposition 62 : $n \in \{2,3\}$ $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ $A \sim B \iff \begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \pi_A = \pi_B \end{cases}$

Proposition 63 : Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est semblable à sa transposée.

Proposition 64 : Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ sont semblables sur $L \supset K$ alors elles le sont sur K.

Proposition 65 : Réduction de Jordan

(3)

Autre app :

- Toute matrice est produit de deux matrices symétriques
- Dimension du commutant
- Bicommutant
- f cyclique $\iff K[f] = \mathcal{C}(f)$
- $\dim(\mathcal{C}(f)) \geq n$

1.22 Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

La décomposition en valeur singulière peut trouver sa place ici. On peut supprimer la partie topologie et répartir les résultats dans le plan.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre* X.Gourdon
— (2) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S. Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas
— (4) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
— (5) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S. Francinou H.Gianella S.Nicolas

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

155

E désigne un K-ev de dim $n \in \mathbb{N}^*$. On identifiera constamment endomorphismes et matrices.

I Endomorphismes diagonalisables

A. Généralités

(1)

Définition 1 : On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si E est la somme directe de ses sous-espaces propres. C'est équivalent à avoir une base de E formée de vecteurs propres de f.

Exemple 2 : Un projecteur et une symétrie ($car(K) \neq 2$) sont diagonalisables.

Proposition 3 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi π_f scindé à racines simples.

Application 4 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dz et $F \subset E$ sev de E stable par f. Alors $f|_F$ dz.

Proposition 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre
i) f dz
ii) χ_f scindé et $\forall \lambda \in Sp(f)$ λ non défectif

Exemple 6 :

Proposition 7 : Si χ_f scindé racine simple alors f dz

Contre-exemple 8 : $f = \lambda Id_E$

Proposition 9 : Si f est nilpotente et diagonalisable alors $f = 0$

(2)

Application 10 : (Théorème de Burnside) Soit G un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors G est fini : $|G| \leq n^{n^2}$.

Application 11 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, si $M^n = I_2$ alors $M^{12} = I_2$.

B. Co-diagonalisabilité

(1)

Proposition 12 Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ dz alors f et g sont co-dz (diagonalisables dans une même base) ssi $f \circ g = g \circ f$.

Remarque 13 On étend le résultat à une famille $(f_i)_{i \in I}$.

Proposition 14 Si f, g co dz alors $f+g$ dz

Contre-Exemple 15 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)

Application 16 Soit $G \subset GL_n(K)$ d'ordre fini et abélien alors G est conjugué à un sous-groupe de matrices diagonalisables

Application 17 ($Car(K) \neq 2$) Si $GL_n(K) \simeq GL_m(K)$ alors $n = m$

B. Diagonalisabilité sur les corps finis

(1)

Ici $K = \mathbb{F}_q$ corps fini à q éléments.

Proposition 18 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dz ssi $f^q = f$

(2)

Application 19 : (Nombres de matrices dz sur $\mathbb{F}_q$) Le nombre de matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$ vaut :

$$\sum_{m_1 + \dots + m_r = n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{m_1}(\mathbb{F}_q)| \times \dots \times |GL_{m_r}(\mathbb{F}_q)|}$$

Remarque 20 : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$

C. Diagonalisabilité et cyclicité

(1)

Définition 21 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, \dots, f^{n-1}(x))$ base de E. Ex : nilpotent d'indice n.

Proposition 22 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors f est cyclique ssi $\pi_f = \chi_f$

Proposition 23 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dz alors f cyclique f a n valeurs propres distinctes.

Remarque 24 : Dans le cas précédent, en notant $(x_1, \dots, x_n)$ une base de vecteurs propres de f, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ est un vecteur cyclique de f.

D. Diagonalisabilité et semi-simplicité

(1,2)

Définition 25 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi-simple si tout $F \subset E$ sev stable par f admet un supplémentaire stable par f.

(1,2)

Proposition 26: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors il y a équivalence
i) f diagonalisable
ii) χ_f scindé et f semi-simple

Remarque 27: Ainsi sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme diagonalisable est semi-simple.

Proposition 28: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ il y a équivalence:
i) f semi-simple
ii) Π_f sans facteur carré

Corollaire 29: $f \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple ssi f est diagonalisable dans une extension de K.

E. Matrice circulante

Définition 30: Une matrice circulante est de la forme $P(J)$ pour $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 31: Soit $M = P(J)$ une matrice circulante, alors M est diagonalisable et $Sp(M) = \{P(\omega^k) \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$ $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Application 32: (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

) DVP

II. Réduction des endomorphismes normaux

(1)

Supposons E euclidien. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on note u^* son adjoint.

Théorème 33. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, alors u se diagonalise en base orthonormée.

Théorème 34 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & A_1 \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & A_m \end{pmatrix} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \quad b_i \neq 0$$

(1)

Application 35 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) (Théorème spectral) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^T$.

(3)

Proposition 36 : (Décomposition polaire) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe un unique $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $M = OS$

De plus $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéomorphisme

$M \longmapsto (O,S)$

Application 37. $O_n(\mathbb{R})$ est le plus gros sous-groupes compact de $GL_n(\mathbb{R})$

(2)

Proposition 38 : $\exp : S_n \to S_n^{++}$ homéomorphisme) DVP

Application 39 : On a un homéomorphisme :

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$

(4)

(1)

Proposition 40: Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$ alors M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} (0) & & (0) \\ & A_1 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & A_r \end{pmatrix}$ $A_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}$ $a_i \neq 0$

Application 41: Si $M \in A_n(\mathbb{R})$ $rg(M)$ pair et $\det(M) \geq 0$.

Proposition 42: Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors M est orthogonalement semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & (0) \\ & -I_q & & \\ & & R(\theta_1) & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\theta_i \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$.

(5)

Application 43: $\exp(A_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$

Application 44: $SO_n(\mathbb{R})$ connexe

Application 45: Soit n impair alors $SO_n(\mathbb{R})$ simple.

III. Décomposition de Dunford

(1)

Théorème 46: (Décomposition de Dunford). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé. Alors il existe un unique couple (D,N) tels que D diagonalisable, N nilpotent et $A = D+N$. De plus D et N sont des polynômes en A.

(2) Application 47 : Soit G un sous groupe borné de $GL_n(\mathbb{C})$ alors toutes les matrices de G sont diagonalisables et leur spectre est inclus dans $\mathbb{U}$.

Application 48 : Si $G \subset B(I_n, \|\cdot\|_2)$ sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ alors $G = \{I_n\}$. (On prend une norme subordonnée quelconque).

Proposition 49 : $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dz ssi e^A l'est

Application 50 : Les solutions de $e^A = I_n$ sont les matrices diagonalisables à spectre inclus dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 51 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $Sp(A) \subset \{Re(z) < -\alpha\}$ alors $\|e^{tA}\| = o(e^{-\frac{\alpha}{2}t})$

Remarque 52 : Résultat crucial dans la preuve sur la nature des équilibres de $X' = AX$.

(2) Proposition 53 : $exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Proposition 54 : Résolution d'un système différentielle

IV Résultats de topologies

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelconque.

(2) Proposition 55 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $S(A)$ la classe de similitude de A. Alors A dz ssi $S(A)$ fermée.

Définition 56 : On note $T_n(\mathbb{K})$ / $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 57 : $\overline{D_n(\mathbb{C})} = M_n(\mathbb{C})$

Application 58 : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors $\chi_A(A) = 0$

Application 59 : Soit $\Phi : A = D + N \mapsto D$ alors Φ n'est pas

Continue.

Proposition 60 : $\overline{D_n(\mathbb{K})^\circ} = \{M \in D_n(\mathbb{K}) \mid |Sp(M)| = n\}$

Proposition 61 : $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

Proposition 62 : L'ensemble des endomorphismes cycliques est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

Application 63 : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ $\dim(\mathcal{C}(f)) \geq n$ où $\mathcal{C}(f) = \{g \mid g \circ f = f \circ g\}$

1.23 Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Références utilisées :

— (1) *Réduction des Endomorphismes* R.Mansuy R.Mneimé
— (2) *Algèbre* X.Gourdon
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Un Max de Math* M.Zavidovique
— (5) *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel* S.Gonnord N.Tosel
— (6) *Equations différentielles* F.Berthelin
— (7) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre

I Exponentielle de matrices

A. Propriétés élémentaires

(1)

Définition 1 : On définit pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'exponentielle de A par $\exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{n!}$

Préproposition 2 : $\exp(A)$ est bien définie pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

Exemple 3 : $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Exemple 4 : $\exp(\lambda I_n) = e^{\lambda} I_n$

Proposition 4 : Soit $(P, A) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :
$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$$

Corollaire 5 : $\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{tr}(A)}$. En particulier $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition 6 : Si (A, B) commutent alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$

Remarque 7 : L'hypothèse de commutativité est importante
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Corollaire 8 : $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

Proposition 9 : $\exp(A)$ est un polynôme en A.

B. Calcul d'exponentielle

Proposition 10 : Si N est nilpotente alors $\exp(N) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$ où r est l'indice de nilpotence de N.

Corollaire 11 : Si $A = \lambda I_n + N$ est unipotente alors $\exp(A) = e^{\lambda}\exp(N)$.

Proposition 12 : Si A est diagonalisable $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$ alors $\exp(A) = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{-1}$. En particulier $Sp(e^A) = \{e^{\lambda} / \lambda \in Sp(A)\}$

(1)

Proposition 13 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet $D + N$ pour décomposition de Dunford alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$.

(2)

Exemple 14 : Calcul de $\exp\begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 36 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 15 : $\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

II Propriétés avancées

A. Injectivité / Surjectivité

(1)

Proposition 15 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas injective pour $n \geq 2$.

(3)

Proposition 16 : $\exp|_{D_n(\mathbb{R})}$ où $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est injective.

(4)

Proposition 19 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Proposition 20 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{P^2 / P \in GL_n(\mathbb{R})\}$

(1)

Application 19 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$ $\exists B \in GL_n(\mathbb{C})$, $A = B^p$

Théorème 20 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

B. Dunford et exponentielle de matrice

(3)

Proposition 21 : Soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford alors la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est
$$\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$$

Application 22 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $e^A \to 2$ ssi $A \to 2$

Application 23 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $e^A = I_n \Leftrightarrow A \to 2$

Application 24 : Résolution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\exp(M) = -I_n$

C. Regularité de l'exponentielle

(5)

Proposition 25 : $A \mapsto \exp(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Proposition 26 : exp est différentiable en 0 et $d\exp(0) = Id$

Application 27 : $GL_n(\mathbb{C})$ n'admet pas de sous-groupes arbitrairement petits.

Application 28 : Si $f : (\mathbb{R}, +) \to (GL_n(\mathbb{R}), \times)$ morphisme continu alors $f(t) = e^{tA}$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

III Applications aux systèmes différentiels

(8)

But 28 : On veut résoudre le système linéaire à coefficients constants $X' = AX$. $(\star)$

Proposition 29 : Les solutions de $(\star)$ sont de la forme $t \mapsto \exp(tA)V$ où $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Proposition 30 : L'unique solution de $(\star)$ vérifiant $X(t_0) = X_0$ est donnée par
$$t \mapsto \exp((t-t_0)A)X_0$$

Exemple 31 : Les solutions de $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ sont de la forme
$$\begin{cases} x(t) = \alpha \dfrac{e^{3t} + e^{-t}}{2} + \beta \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ y(t) = \alpha \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{2} + \beta \dfrac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

(6)

Proposition 32 : Les solutions de $X' = AX$ tendent toutes vers 0 ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$ $Re(\lambda) < 0$

Proposition 33 : Les solutions de $X' = AX$ sont bornées ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$ $Re(\lambda) \leq 0$ et $Re(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ non ss.

(6)

Proposition 34 : L'unique solution de $\begin{cases} X' = AX + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ est donnée par
$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds$$

IV Exponentielle et sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(3)

Rappel 35 : On a un homéomorphisme $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$

Proposition 36 exp réalise un homéomorphisme $S_n \to S_n^{++}$
De même exp : $H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ homéo. → 02

Corollaire 37 : On a un homéomorphisme
$$GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$
De même : $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U_n^{++}(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C})$

(18)

Définition 38 : $O(p,q)$

Théorème 39 : On a un homéomorphisme :
$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$

Proposition 40 : L'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices unipotentes

(91) Proposition 41 : $\exp : A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est une surjection mais pas une injection ($n \geq 2$)

(?) Définition 42 : Soit $G \subset Gl_n(\mathbb{R})$ un sous groupe fermé, on lui associe $\mathcal{L}_G = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tM} \in G\}$

Exemple 43 : $\mathcal{L}_{SO_n(\mathbb{R})} = A_n(\mathbb{R})$

Lemme 44 : Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ alors :

- $\exp(A+B) = \lim_{p \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p$
- $\exp(AB-BA) = \lim_{p \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\exp\left(-\frac{A}{p}\right)\exp\left(-\frac{B}{p}\right)\right)^{p^2}$

Proposition 45 : Soit G un sous-groupe fermé de $Gl_n(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{L}_G$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ stable par $(A,B) \mapsto AB-BA$.

(51) Théorème 46 : Cartan Von-Neumann.

1.24 Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Références utilisées :

- (1) *Réduction des Endomorphismes* R.Mansuy R.Mneimé
- (2) *Algèbre* X.Gourdon
- (3) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (4) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Second* P.Caldero J.Germoni

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

157

$\mathbb{K}$ corps. E $\mathbb{K}$-ev de dim $n \in \mathbb{N}^*$. On identifiera constamment endomorphisme et matrices. On note $\begin{cases} \pi_f \text{ polynôme minimal de } f \\ \chi_f \text{ son polynôme caract} \end{cases}$

I Endomorphismes trigonalisables

A. Généralités

(1)

Définition 1: Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Définition 2: Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieur.

Proposition 3: Lemme des noyaux. Soit P, Q premiers entre eux alors $\ker(PQ)(f) = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f))$.

Théorème 4: (Critère de trigonalisation) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre:

i) f trigonalisable (f tz)

ii) f admet un polynôme annulateur scindé

Proposition 5: Supposes $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors tout $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable

(2)

Proposition 6: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors il existe une extension $L | \mathbb{K}$ telle que M soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(L)$.

Application 7: (Cayley-Hamilton). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\chi_f(f) = 0$

(1)

Proposition 8: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors

f tz $\iff$ χ_f scindé sur $\mathbb{K}$ $\iff$ π_f scindé sur $\mathbb{K}$.

Proposition 9: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tz et $F \subset E$ sev stable par f alors $f|_F$ est tz

Proposition 10: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les racines de χ_f dans un corps de décomposition de χ_f. Alors

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \det(e^f) = e^{\mathrm{tr}(f)}$$

(1)

Définition 11: (Matrice compagnon). Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n$ on définit la matrice compagnon associée à P par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{on a } \chi_{C_P} = P$$

Théorème 12: (Kronecker). Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire avec $Z(P) \subset D(0,1)$ alors les racines non nulles de P sont des racines de l'unités.

Application 13: On note a_n le nombre de tels polynômes de degré n et dont aucune racine n'est nulle. Alors pour $|t| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - t^{\varphi(n)}}$$

(1)

Proposition 14: Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est tz ssi f stabilise un drapeau $(F_1, \dots, F_n)$ ie une suite croissante de sev tels que $\dim(F_i) = i$.

Proposition 15: (Factorisation QR). On a un homéomorphisme

$$\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$$
$$(Q, R) \mapsto QR$$

Proposition 16: (Méthode QR) } DVP

B. Co-trigonalisation

(2)

Définition 17: On dit que $f, g \in \mathcal{L}(E)^2$ sont co-trigonalisables (co-tz) s'il existe une base de E qui trigonalise f et g.

Proposition 18: Si f, g co-tz $f+g$ et $f \circ g$ sont co-tz

Proposition 19: Si $f \circ g = g \circ f$ alors g laisse stable les sous-espaces propres de f et f, g sont co tz

Remarque 20: Réciproque fausse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3)

Proposition 21: Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors dans les cas suivants

(3)

A et B sont co-Tz :
- $AB = 0$
- $rg(AB - BA) \leq 1$
- $AB - BA \in Vect(A, B)$

Théorème 22 : (Lie - Kolchin) Soit G un sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ alors tous les éléments de G sont co trigonalisables

C. Topologie

(3)

Proposition 23 : $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$ où $D_n(\mathbb{K})$ (resp. $T_n(\mathbb{K})$) est l'ensemble des matrices diagonalisables (resp trigonalisables) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 24 : $\overline{D_n(\mathbb{C})} = T_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Application 25 : Cayley-Hamilton dans un $\mathbb{C}$-ev.

Proposition 25 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$ il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $T = PMP^{-1}$ soit triangulaire supérieur avec $|t_{ij}| < \varepsilon$ pour $i \neq j$

Application 26 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $S(M) = \{PMP^{-1} / P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ alors M diagonalisable ssi $S(M)$ fermée.

(3)

II Endomorphismes nilpotents

A. Généralités

(1,2)

Définition 27 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Le plus petit indice vérifiant ça est appelé indice de nilpotence et se note $d(f)$.

Proposition 28 : $d(f) \leq n$

Proposition 29 : $d(f)$ est l'entier à partir duquel la suite $(\ker(f^p))_{p \geq 1}$ est stationnaire.

Proposition 30 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent alors :

$\chi_f = X^n$ $\quad \pi_f = X^{d(f)}$.

(1)

Exemple 31 : $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice n.
$P \mapsto P' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

Corollaire 32 : Un endomorphisme nilpotent est trigonalisable

(3)

Proposition 34 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors :

f nilpotent $\iff \begin{cases} Sp(f) = \{0\} \\ f$ Tz $\end{cases}$

DVP

Proposition 35 : (car$(\mathbb{K}) \neq 0$) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors :

f nilpotent $\iff \forall k \geq 1 \quad tr(f^k) = 0$

Remarque 36 : C'est faux en carac non nulle.

Théorème 37 : (Burnside) Soit $G < GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini. Alors G est fini

B. Structure de l'ensemble des nilpotents.

(1)

On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 38 : (car$(\mathbb{K}) = 0$) $Vect(\mathcal{N}_n(\mathbb{K})) = \ker(tr)$

Proposition 39 : Si $M, N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ commutent alors $M + N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$

Remarque 40 : Réciproque fausse $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3)

Proposition 41 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors

$M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \iff 0 \in \overline{S(M)}$

Lemme 42 : Si $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul soit r l'entier max tel que $(X, \dots, M^{r-1}X)$ libre. Alors $M^r X = 0$.

Proposition 43 : $|\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n^2 - n}$

III Réduction de Dunford

118

IV Réduction de Jordan

148

V Réduction de Frobénius 155

A. Endomorphismes cycliques

B. Réduction de Frobénius.

1.25 Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Références utilisées :

- (1) *Algèbre* X.Gourdon
- (2) *Invitations aux formes quadratiques* C.Séguin Pazzis
- (3) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (4) *Géométrie* M.Audin
- (5) *Histoires hédéonistes de groupes Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
- (6) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
- (7) *Analyse numérique et optimisation* G.Allaire

Matrices symétriques. Matrices hermitiennes.

158

(1)

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E $\mathbb{K}$-ev de dim $n \in \mathbb{N}^*$.

I Définitions, résultats fondamentaux.

Définition 1: On note $S_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) / {}^tM = M\}$

$A_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tM = -M\}$

$H_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / {}^t\overline{M} = M\}$

Les éléments de $S_n(\mathbb{R})$ sont des matrices symétriques réelles ceux de $H_n(\mathbb{C})$ sont les matrices hermitiennes.

Exemple 2: Matrice de covariance, laplacien discret. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \in M_n$

Remarque 3: $H_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-ev mais pas un $\mathbb{C}$-ev

Proposition 4: $\dim_{\mathbb{R}}(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ $\dim_{\mathbb{R}}(H_n(\mathbb{C})) = n^2$

Proposition 5: Supposons $(E, \langle , \rangle)$ euclidien alors pour $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ pour $(x,y) \in E^2$

Définition 6: u est auto-adjoint si $u = u^*$

Proposition 7: u est auto-adjoint ssi sa matrice dans une bon est symétrique ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitienne ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Théorème 8: (Spectral) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, alors u se diagonalise en bon.

Corollaire 9: Si $M \in S_n(\mathbb{R})$ (resp. $H_n(\mathbb{C})$) il existe D diagonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ (resp $U \in U_n(\mathbb{C})$) tels que $M = PDP^{-1}$ (resp. UDU^*)

Remarque 10: Si $M \in H_n(\mathbb{C})$ alors $Sp(M) \subset \mathbb{R}$.

Proposition 11: les orbites de l'action $O_n(\mathbb{R})$ (resp $U_n(\mathbb{C})$) sur $S_n(\mathbb{R})$ (resp $H_n(\mathbb{C})$) sont déterminées par le polynôme caractéristique

(3)

Théorème 12: (Courant Fischer) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint.

Notons $Sp(u) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$ alors:

$$\lambda_k = \min_{\dim F = k} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\| = 1}} \langle u(x), x\rangle$$

Application 13: $M \mapsto \lambda_k(M)$ sur $S_n(\mathbb{R})$ / $H_n(\mathbb{C})$

(2)

II Lien avec les formes quadratiques

Définition 14: Une forme quadratique est une application $q: E \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe $b: E^2 \to \mathbb{K}$ bilinéaire symétrique vérifiant $q(x) = b(x,x)$. Un tel b est unique et on l'appelle forme polaire de q. Si b est hermitienne $\overline{b(x,y)} = b(y,x)$ alors q est une forme hermitienne.

Définition 15: Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E. On appelle matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(q) = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ Elle est symétrique réelle / hermitienne.

Proposition 16: En se fixant une base de E on a un isomorphisme entre $S_n(\mathbb{K})$ et les formes quadratiques sur E.

Proposition 17: Soit q une forme quadratique sur E, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ alors

$$Mat_{\mathcal{B}'}(q) = P\, Mat_{\mathcal{B}}(q)\, {}^tP$$

on parle alors de matrice congruente.

Proposition 18: Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ alors il existe (p,q) deux entiers et Q inversible tels que:

$$M = Q \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} {}^tQ$$

Théorème 19: (Loi d'inertie de Sylvester) Le couple (p,q) ne dépend que de M et on l'appelle la signature de M.

Corollaire 20: Deux matrices symétriques réelles sont congruentes ssi elles ont même signature.

Définition 21: Une forme quadratique / hermitienne est positive (resp. définie positive) si $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) > 0$)

Définition 22: On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) / $H_n^+(\mathbb{C})$ resp. $(H_n^{++}(\mathbb{C}))$ si la forme quadratique / hermitienne associée à q est positive (resp définie positive).

(1) Théorème 23 : (Diagonalisation simultanée) . ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Soit q une forme quadratique et q' une forme quadratique définie positive. Alors il existe une base de E orthogonale pour q et q'.

Application 24 : Classification coniques euclidiennes (Annexe 1)

III Etude de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ / $H_n^{++}(\mathbb{C})$

A. Structure

Proposition 25 : Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ resp $H_n(\mathbb{C})$ alors
- $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $H_n^+(\mathbb{C})$) $\iff Sp(M) \subset \mathbb{R}^+$
- $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp $H_n^{++}(\mathbb{C})$) $\iff Sp(M) \subset \mathbb{R}^{+*}$

Proposition 26 : $S_n^{++}(\mathbb{R})$, $H_n^{++}(\mathbb{C})$ sont convexes

Application 27 : Si $X \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $conv(X) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$, cf l'étude des sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

(3) Théorème 28 : (Critère de Sylvester) . Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $\det((m_{ij})_{1 \le i,j \le k}) > 0$.

Application 29 : $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

Proposition 30 : On a un homéomorphisme exp : $S_n \to S_n^{++}$ et $\exp : H_n \to H_n^{++}$

(3) Proposition 32 : Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors $m_{i,i} \ge 0$ et

$$\det(M) \le \prod_{i=1}^{n} m_{i,i}$$

Proposition 33 : Soit $\alpha > 0$ et $S_\alpha = S_n^{++}(\mathbb{R}) \cap \{\det > \alpha\}$

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors

$$\inf_{S \in S_\alpha} Tr(AS) = n(\alpha \det(A))^{\frac{1}{n}}$$

Application 34 : (Inégalité de Minkowski) Soit $(A,B) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}} \le (\det(A+B))^{\frac{1}{n}}$

OVP 1

B. Décomposition polaire

(8) Proposition 35 Pour $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ il existe $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ unique tel que $M = A^2$. De plus si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On note sans ambiguïté $A = \sqrt{M}$.

Théorème 36 (Décomposition polaire). Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe $(S,O) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ tels que $M = OS$

De plus, $GL_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

De même, $GL_n(\mathbb{C}) \simeq H_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C})$

Proposition 37 : Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$ alors on peut écrire $M = OS$ avec $O \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$

Application 38 : Tout $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$ est produit de deux exponentielles de matrices

Application 39 $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

(5) Application 40. On a un homéomorphisme :

$$O(p,s) \simeq O(p) \times O(s) \times \mathbb{R}^{ps}$$

où $O(p,s)$ groupe orthogonal de la forme quadratique (p,s)

Application 41 : $O(p,s)$ compact ssi $ps = 0$

(3) Proposition 42 Les points extrémaux de $B_n(\mathbb{R}) = \{M / \|M\|_2 \le 1\}$ sont $O_n(\mathbb{R})$

Proposition 43 . $B_n(\mathbb{R}) = conv(O_n(\mathbb{R}))$

C. Décomposition de Cholesky

(7) Proposition 44 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $H_n^{++}(\mathbb{C})$) . Alors il existe T triangulaire supérieure telle que $A = TT^*$. Si de plus les éléments diagonaux de T sont tous positifs alors R est unique.

(7)

Algorithme 45 : (Factorisation de Cholesky)

(7)

Proposition 46 : Il y a besoin de $\sim \frac{n^3}{6}$ additions, $\frac{n^3}{6}$ multiplications, $\frac{n^2}{2}$ divisions et extraction de racines carrés pour la factorisation de Cholesky. Ce qui est mieux que la méthode de gauss.

IV Application à l'optimisation.

A. Matrice Hessienne.

(6)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ C^2.

Définition 47 : On définit pour $x \in U$ la Hessienne de f en x. $\mathrm{Hess}(f)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$. C'est une matrice symétrique.

Proposition 48 : f est convexe sur U ssi $\forall x \in U$ $\mathrm{Hess}f(x) \in S_n^+$

Proposition 49 : Soit $x \in U$ un point critique de f. Alors
- $\mathrm{Hess}(f)(x) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow x$ minimum local
- x minimum local $\Rightarrow \mathrm{Hess}(f)(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$

Contre-Exemple 50 : Si $\mathrm{Hess}(f)(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$ on ne peut rien dire. $f(x) = x^3$.

Proposition 51 : Lemme de Morse

Application 52 : $x \in U$ point critique de f x est un minimum ssi $\mathrm{Hess}(f)(x)$ est de signature $(n,0)$.

B. Minimisation de fonction.

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ on considère

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

Proposition 53 : $\nabla f(x) = Ax - b$ donc f admet un unique point critique $\bar{x}$ qui vérifie $A\bar{x} = b$.

(9)

Proposition 54 : (Inégalité de Kantorovich)

On note $Sp(A) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$ et $\|X\|_A^2 = {}^t XAX$. Alors

$$\|X\|^2 \leq \|X\|_A^2 \|X\|_{A^{-1}}^2 \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} \right)^2 \|X\|^2$$

DVP

(7)

Définition 55

Pour X_0 et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on note : $R_0 = AX_0 - B$

Tant que $\frac{\|R_k\|}{\|R_0\|} > \varepsilon$ faire

$\alpha_{k+1} = \frac{\|R_k\|^2}{\|R_k\|_A^2}$ $\quad \|R_k\|_A = \langle AX, X \rangle$

$X_{k+1} = X_k - \alpha_{k+1} R_k$

$R_{k+1} = AX_{k+1} - B$.

Théorème 56

$(X_n)_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X$ solution de $AX = B$ et

- $\forall k \in \mathbb{N}$ $\|X_k - \bar{X}\| \leq \sqrt{\mathrm{cond}_2(A)} \left(\frac{\mathrm{cond}(A)-1}{\mathrm{cond}(A)+1} \right)^k \|X_0 - \bar{X}\|$

Remarque 57 : $\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$

(11)

C. Matrice de Gramm.

Distance (Avant)

1.26 Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Attention à ne pas faire trop d'analyse.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre* X.Gourdon
— (2) *Analyse* X.Gourdon
— (3) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas
— (4) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (5) *Objectif Agrégation* V.Beck J.Malick G.Peyré

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

159

E est un K espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

I Formes linéaires. Espace dual

A. Formes linéaires. Hyperplans

(1)

Définition 1: On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire $\varphi : E \to K$.

Exemple 2: $E = \mathbb{R}_n[X]$ $P \mapsto p^{(i)}(0)$

Proposition 3: Une forme linéaire est soit nulle soit surjective.

Définition 4: On note $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E et on appelle E^* le dual de E.

Définition 5: Un Hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Proposition 6: Soit $H \subset E$ un sev. Il y a équivalence entre:
- H est un hyperplan
- Pour tout $x \in E \setminus H$ $E = H \oplus Kx$
- $\dim(H) = n-1$.

Proposition 7: Soit $(H_1, \dots, H_p)$ p hyperplans de E. Alors $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) \geq n-p$ avec égalité ssi pour tout φ_i tels que $H_i = \ker(\varphi_i)$, $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre.

(3)

Définition 8: On appelle dilatation d'Hyperplan H, de droite D et de rapport λ un élément $u \in GL(E)$ tel que $H = \ker(u - Id)$ et $D = \ker(u - \lambda Id)$ $\lambda \neq 1$.

Définition 9: Si $\lambda = -1$ u est appelée une reflexion.

Définition 10: On appelle transvection un élément de $SL(E)$ fixant un hyperplan et différent de l'identité.

Proposition 11: Les transvections engendrent $SL(E)$. Les transvections et dilatations engendrent $GL(E)$.

Application 12: $Z(GL(E)) \simeq K^*$ $Z(SL(E)) \simeq \{\lambda \mid \lambda^n = 1\}$

Application 13: $PSL(E) := \frac{SL(E)}{Z(SL(E))}$ est simple pour $n \geq 3$ où $n = 2$ et $|K| \geq 4$.

Soit q une forme quadratique non dégénérée.

Définition 14: On appelle reflexion orthogonale une reflexion de $O(q)$.

Définition 15: On appelle renversement orthogonal une symétrie du groupe orthogonal vérifiant $\dim(S - Id) = n-2$

Proposition 16: $O(q)$ est engendré par les reflexions orthogonales $SO(q)$ est engendré par les renversement orthogonaux.

Application 17: $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

(8)

B. Espace dual

(1)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E

Définition 18 On note pour $i \in [\![1, n]\!]$, e_i^* l'unique forme linéaire sur E telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$

Proposition 19 $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelé base dual de $(e_1, \dots, e_n)$

Corollaire 20 $\dim(E) = n$

Remarque 21 $\forall x \in E$ $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$

Proposition 22 $\Phi : E \to E^*$ $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i^*$ est un isomorphisme non canonique entre E et E^*

Remarque 23 si $\dim(E) = +\infty$ $E \not\simeq E^*$

Proposition 24 Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. La base $(\Phi^{-1}(\beta_i))_i$ est appelée base antéduale de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

Exemple 25 $E = \mathbb{R}_n[X]$ $e_i = X^i$ $e_i^*(P) = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$.

Exemple 26

Définition 27 On appelle bidual de E l'espace $E^{**} = (E^*)^*$.

Proposition 28: $\Phi : E \to E^{**}$ $x \mapsto (\beta \mapsto \beta(x))$ est un isomorphisme canonique entre E et E^{**}.

(1)

Proposition 29 (Dual de $\mathcal{M}_n(K)$) - On a un isomorphisme
$\mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)^*$ $A \mapsto (M \mapsto \mathrm{tr}(AM))$.
Application 30 Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$
Application 31 Si $f \in \mathcal{M}_n(K)^*$ vérifie $f(XY) = f(YX)$ alors $f = \lambda \mathrm{tr}$.

(2)

Proposition 32 (Théorème de Riesz). On suppose E euclidien
Alors $E \to E^*$ $a \mapsto (x \mapsto \langle a, x \rangle)$ est un isomorphisme.
Application 33 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$.
Alors $df(a) \in (\mathbb{R}^n)^*$ donc il existe $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ $df(a).h = \langle \nabla f(a), h \rangle$. On appelle $\nabla f(a)$ vecteur gradient.

II Orthogonalité.

(1)

Définition 34 : $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x) = 0$
Définition 35 : Pour $F \subset E$ on note $F^\perp = \{\varphi \in E^* / \varphi_{|F} = 0\}$
Pour $G \subset E^*$ on note $G^\circ = \{x \in E / \forall \varphi \in G \ \varphi(x) = 0\}$
Exemple 36 : $\{\varphi\}^\circ = \ker(\varphi)$
Proposition 37 : $F_1 \subset F_2 \subset E \Rightarrow F_2^\perp \subset F_1^\perp$
$G_1 \subset G_2 \subset E^* \Rightarrow G_2^\circ \subset G_1^\circ$.
$\mathrm{Vect}(A)^\perp = A^\perp$ $\mathrm{Vect}(G)^\circ = G^\circ$.
Proposition 38 : Soit $F \subset E$ sev et $G \subset E^*$ sev.
$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(G) + \dim(G^\circ) = n$.
Application 39 : $(F^\perp)^\circ = F$ $(G^\circ)^\perp = G$
Application 40 : Soit q une forme quadratique sur E, de forme polaire b. Soit $\Phi : E \to E^*$, $x \mapsto (y \mapsto b(x,y))$. Pour $F \subset E$ sev on note $F^\perp = \{x / \forall y \in F \ b(x,y) = 0\}$
Alors $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n + \dim(F \cap \ker(\Phi))$ et $F^{\perp\perp} = F + \ker(\Phi)$

Application 41 : Soit $f_1, \dots, f_k, f$ des formes linéaires sur E.
Alors : $f \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{k} \ker(f_i) \subset \ker(f)$

DVP 1

(4)

Théorème 42 : (Extrêmums liés).
Soit $f, g_1, \dots, g_p$ de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $X = \bigcap_{i=1}^{p} \{g_i = 0\}$. Supposons $f_{|X}$ admet un extremum en $a \in X$ et tels que les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ soient libres.
Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i dg_i(a)$

(5)

Application 43 : (Théorème spectral). Soit E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors u se diagonalise en bon.

(6)

Application 44 : (Inégalité d'Hadamard). Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire canonique et $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$. Alors
$$|\det_{\mathcal{B}_c}(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|$$
il y a égalité ssi les $(v_i)_i$ forment une base orthogonale de E.

(1)

Proposition 45 : Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in (E^*)^p$ et $r = \mathrm{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$. Alors $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)\right) = n - r$
Si $F \subset E$ sev de dim q alors il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ libre tels que $F = \bigcap_{i=1}^{n-q} \ker(\varphi_i)$.

III Application transposée

(1)

Définition 46 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ on définit ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ par ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$.
Proposition 47 : $\mathrm{Im}({}^t u) = \ker(u)^\perp$ ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$
$\ker({}^t u) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ ${}^t \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{E^*}$
Application 48 : Lemme de factorisation.
Proposition 48 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $G \subset E$ sev.

(1)

Alors G est stable par u ssi $G^\perp$ stable par ^tu

Application 49: (Réduction des endomorphismes normaux). Soit E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal alors u se diagonalise en bon.

Application 50: (Théorème de Frobenius)

Application 51: A et B sont semblables ssi elles ont les mêmes invariants de similitude.

Application 52: Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(K)$ $n \in \{2,3\}$ alors A et B sont semblables ssi $\chi_A = \chi_B$ et $\pi_A = \pi_B$

Application 53: Soit L/K une extension de corps et $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ semblables sur L alors elles le sont sur K.

Application 54: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ Alors $\dim(C(A)) \geq n$

Proposition 54: Soit B base de E B' base de F, B^* et B'^* les bases duales associées. Alors

$$Mat(^tu)_{B'^*}^{B^*} = {}^tMat(u)_B^{B'}$$

Application 55: $rg(^tu) = rg(u)$.

IV Les formes linéaires en analyse : le théorème de Hahn-Banach géométrique

Proposition 56: (Hahn Banach géométrique). Soit C un convexe fermé de E et $x \notin C$ alors il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) > \sup_{y \in C} \varphi(y)$.

Application 57: C est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.

Application 58: L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices vérifiant $|||M|||_2 \leq 1$.

Corollaire 60: Les points extrêmaux de $\{|||M|||_2 \leq 1\}$ sont $O_n(\mathbb{R})$.

V Dualité et formes quadratiques

Soit q une forme quadratique sur E, $car(K) \neq 2$

Théorème 61 (Réduction de Gauss). Il existe des formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ linéairement indépendantes sur E^* tels que

$$q = \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i^2$$

Définition 62: On dit que deux matrices symétriques sur K sont congruentes si $A = PB^tP$ par $P \in GL_n(K)$.

Théorème 63: Deux matrices symétriques sur $\mathbb{C}$ sont congruentes ssi elles ont même rang.

Théorème 64: Deux matrices symétriques sur $\mathbb{R}$ sont congruentes ssi elles ont même signature.

Théorème 65: (p premier impair, q puissance de p) Deux matrices symétriques inversibles sur $\mathbb{F}_q$ sont congruentes ssi elles ont même discriminant.

1.27 Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

Références utilisées :

— (1) *Espaces vectoriels Euclidiens* JD.Eiden
— (2) *Algèbre* X.Gourdon
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
— (5) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien (en dimension finie).

160

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Endomorphismes adjoints et exemples :

A. Adjoint, propriétés élémentaires

Proposition 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique u^* tel que :
$\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$

Définition 2 : u^* s'appelle l'adjoint de u

Exemple 3 : Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors ${}^tA = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$.

Proposition 4 : L'application $u \mapsto u^*$ est une involution linéaire

Proposition 5 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a les propriétés élémentaires suivantes :
- $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*)$, $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(u^*)$, $\pi_u = \pi_{u^*}$ $\chi_u = \chi_{u^*}$
- $\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ - $\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$

Proposition 6 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un sev stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Remarque 7 : Ce résultat permet de faire des récurrences pour montrer des résultats de réductions.

Définition 8 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ u est dit normal si $uu^* = u^*u$

Définition 9 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est :
- auto-adjoint si $u = u^*$
- une isométrie si $uu^* = \mathrm{id}_E$

Exemple 10 : Un endomorphisme auto-adjoint / unitaire est normal

Définition 11 : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est auto-adjointe / unitaire normale si l'endomorphisme $X \mapsto AX$ l'est.

Proposition 12 : u normal $\Rightarrow \|u(x)\| = \|u^*(x)\| \quad \forall x \in E$.

B. Les projections orthogonales

Définition 12 : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, on dit que p est un projecteur si $p^2 = p$, on dit de plus que p est une projection orthogonale si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux.

Proposition 13 : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur on a l'équivalence
- p projecteur orthogonal - $p^* = p$
- $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$

Proposition 14 : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal et k $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$. Alors pour $x \in E$ $p(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$

De plus, $p(x)$ est l'unique vecteur y vérifiant $d(x, \mathrm{Im}\,p) = \|x - y\|$

Définition 15 : Pour $(x_1, \dots, x_k)$ on appelle matrice de Gram la matrice $G(x_1, \dots, x_k) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Proposition 16 : $\det(G(x_1, \dots, x_k)) \neq 0 \iff (x_1, \dots, x_k)$ libre

Proposition 17 : Soit $F \subset E$ sev et $(x_1, \dots, x_k)$ base de F. Alors pour $x \in E$:
$$d(x,F)^2 = \frac{\det G(x_1, \dots, x_k, x)}{\det G(x_1, \dots, x_k)}$$

Exemple 18 : $\inf_{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}} \int_0^{+\infty} (a_0 + \dots + a_n x^n)^2 e^{-x} dx = \frac{1}{n+1}$

II Une première classe d'endomorphisme remarquables : les isométries

Proposition 16 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- u est une isométrie
- $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$
- $\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

Remarque 17 : Soit $c \in E$ de norme $x \mapsto \|x\|$ conserve la norme mais n'est pas une isométrie

Proposition 18 : L'ensemble des isométries de E est un sous-groupe de $GL(E)$ noté $O(E)$ et appelé le groupe orthogonal de E.

Définition 19 : On note $O_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n \}$

Proposition 20 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ on a alors $u \in O(E) \iff M \in O_n(\mathbb{R})$

(1)

(1)

(1)

Contre exemple 21 Le fourque B soit une bon est primordial.
$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y,x)$ $\quad B = ((1,-1),(1,0))$ $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin O_n(\mathbb{R})$

Définition 22. On note $SO(E) = \{ u \in O(E) \mid \det(u) = 1 \} \subset O(E)$ appelé groupe spécial orthogonal. De même pour $SO_n(\mathbb{R})$.
Exemple 23 $-id_E \in SO(E) \iff n$ pair
Exemple 24 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$

Théorème 25 (Réduction des isométries). Soit $u \in O(E)$ il existe une bon B, des entiers p et q et $\theta_1, \dots, \theta_k \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ tels que :

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} I_p & (0) & (0) & & \\ (0) & -I_q & (0) & & \\ (0) & (0) & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

De plus p et q sont uniques
Corollaire 26: Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que PMP^T soit une matrice de la forme précédente.
Proposition 27 $M \in SO_n(\mathbb{R}) \iff q$ pair.
Application 28 $\exp(A_n(\mathbb{R})) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective
Application 29 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs
Application 30: $SO_n(\mathbb{R})$ n impair est simple. $(n \geq 3)$
Corollaire 30 : $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs
Application 31. Classification de $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ $n \in \{2,3\}$

On a $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \theta \in \mathbb{R} \right\} \simeq \frac{\mathbb{R}}{2\mathbb{Z}}$
matrice de rotation

$$O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \theta \in \mathbb{R} \right\}$$
symétrie orthogonal d'axe d'angle $\frac{\theta}{2}$

$$SO_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$O_3(\mathbb{R}) = SO_3(\mathbb{R}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

III Réduction des endomorphismes normaux

A. Endomorphisme normaux

Lemme 32 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, si E_λ est un sous-espace propre (associé à une valeur propre λ) alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Lemme 33 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et E de dim 2, u normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Dans toute base B orthonormale de E la matrice u à la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad b \neq 0$$

Théorème 34 (Réduction endomorphisme normaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, il existe une bon B de E telle que

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \tau_1 & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & \tau_k \end{pmatrix} \quad (*)$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\quad \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ $\quad b_i \neq 0$

Corollaire 35:
Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ normale alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que PMP^T soit de la forme $(*)$.

(3)

Application 35
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que
${}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \tau_n & \\ & & & \tau_r \end{pmatrix}$ $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$ $b_i \neq 0$

Application 36
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors $rg(A)$ pair et $\det(A) \geq 0$

B. Endomorphismes symétriques

(2)

Définition 37 On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Théorème 38 (Théorème spectral)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique alors u se diagonalise en base orthonormée
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale

(3)

Application 39 : (Inégalité d'Hadamard)
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Proposition 41 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $X \mapsto {}^tXAX$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. De même $q(x) = \langle x, u(x) \rangle$ est une forme quadratique sur E.

C. Endomorphismes symétriques (définis) positifs

(3)

Définition 42 Soit $u \in S(E)$ on dit que u est symétrique si sa forme quadratique associée est positive, définie positif si sa forme quadratique associée est définie positive.
On note $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp symétrique définie positive).
Remarque 43 : On définit de même $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$
Remarque 44 : $S^{++}(E) = S^+(E) \cap GL(E)$
Proposition 45 Soit $u \in S(E)$
- $u \in S^+(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$
- $u \in S^{++}(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$

(3)

Proposition 46 Critère de Sylvester
Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi $\forall k \in [\![1, n]\!]$
$\det((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}) > 0$

Application 47
$S_n^{++}(\mathbb{R})$ est ouvert dans $S_n(\mathbb{R})$

Proposition 48 :
$\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

(4)

Application 49 : Décomposition de $O(p,s)$.

D2 103

Proposition 50
Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = M^2$. (On notera alors $\sqrt{A} := M$)

(3)

Remarque 51 Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\sqrt{A} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Application 52 : Décomposition polaire. L'application
$O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
$(O, S) \longmapsto OS$

(5)

Application 53 :
$O_n(\mathbb{R})$ est le plus gros sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$

Application 54 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est :
$\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid |||M|||_2 \leq 1 \}$.

1.28 Leçon 161 : Distances dans un espace affine euclidien. Isométries.

Références utilisées :

- (1) *Géométrie* M.Audin
- (2) *Algèbre* X.Gourdon
- (3) *Espaces vectoriels euclidiens* JD.Eiden
- (4) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (5) *Histoires hédéonistes de groupes Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
- (6) *Eléments de Théorie des Groupes* J.Calais
- (7) *Théorie des groupes* F.Ulmer

Isométrie dans un espace euclidien affine. Distances.

161

On considère E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

I Généralités

A. Applications affines

(1)

Proposition 5: Une application $f: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine ssi elle conserve les barycentres.

Proposition 6: Une application affine qui fixe $n+1$ affinements indépendants est l'identité.

Proposition 7: Une application affine qui fixe un repère affine est l'identité.

B. Le groupe affine

(1)

Proposition 8: Soit $f: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine, alors f est injective / surjective / bijective ssi $\vec{f}$ est injective / surjective / bijective.

Proposition 9: Si $f: \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine bijective alors f^{-1} est affine et $\vec{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$

Définition 10: On note $GA(\mathcal{E})$ l'ensemble des bijections affines de $\mathcal{E}$ sur lui même.

Proposition 12: $GA(\mathcal{E})$ est un groupe et $GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$, $f \mapsto \vec{f}$ est un isomorphisme de groupes.

C. Isométrie affine.

(1)

Définition 13: Une application affine $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie affine si pour tout $(A,B) \in \mathcal{E}^2$.

$$d(f(A), f(B)) = d(A,B)$$

On note $Isom(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines.

Proposition 14: $f \in Isom(\mathcal{E}) \iff \vec{f} \in O(E)$

(1)

Proposition 15: $Isom(\mathcal{E}) < GA(\mathcal{E})$

Exemple 16: translation, rotation, symétrie centrale

Définition 17: $Isom^+(\mathcal{E}) = Isom(\mathcal{E}) \cap \{ \det(\vec{f}) = 1 \} \lhd Isom(\mathcal{E})$

Définition 18: Une symétrie orthogonale est une symétrie qui est une isométrie.

Définition 19: Une réflexion est une symétrie orthogonale fixant un Hyperplan (affine).

II Distance et matrice de Gram -

(2,4)

Définition 20: (Matrice de Gram) Soit $(x_1, \dots, x_k) \in E^k$, on définit la matrice de Gram par $G(x_1, \dots, x_k) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \le i,j \le k}$.

Proposition 21: $G(x_1, \dots, x_k) \in S_k^+(\mathbb{R})$

Proposition 22: $G(x_1, \dots, x_k) \in S_k^{++}(\mathbb{R}) \iff (x_1, \dots, x_k)$ libre

Proposition 23: Soit $F \subset E$ et $(x_1, \dots, x_k) \in F$ base de F. Alors pour $x \in E$.

$$d(x,F)^2 = \frac{\det(G(x, x_1 \dots x_k))}{\det(G(x_1, \dots, x_k))}$$

Exemple 24: Théorème de Muntz $\inf \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right)^2 e^{-x} dx =$

III Etudes des isométries vectorielles

(1)

A. Le groupe orthogonal $O(E)$

Définition 25 On note $O_n(\mathbb{R})$ le groupe $\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_n \}$ et $SO_n(\mathbb{R}) = \{ M \in O_n(\mathbb{R}) / \det M = 1 \}$

Proposition 26 Si on se fixe une bon $\mathcal{B}$ de E alors $O(E) \simeq O_n(\mathbb{R})$ $SO(E) \simeq SO_n(\mathbb{R})$ par $f \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(f)$

Proposition 27 Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact

Proposition 28 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f \in O(E)$ ssi $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $(x,y) \in E^2$.

(1)

Proposition 29: Soit s une symétrie de E. Alors $s \in O(E)$ ssi $\ker(s-id) + \ker(s+id)$.

Définition 30 Quand $\ker(s+id)$ est une droite vectorielle on parle de réflexion d'hyperplan $x^\perp$.

Proposition 31. Soit $x \in E$ de norme 1. Alors la réflexion d'hyperplan $H = x^\perp$ est $\sigma_x(y) = y - 2\langle y, x\rangle x$.

Proposition 32 Tout $f \in O(E)$ est produit d'au plus $n = \dim E$ réflexions.

Corollaire 34 Si $\dim E = 2$ $f \in SO(E)$, alors f est la composée de deux réflexions, si $f \in O(E) \setminus SO(E)$ alors c'est une réflexion.

(4)

Théorème 36 Réduction des isométries.

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors il existe $(p,q,r) \in \mathbb{N}^3$ $(\theta_1, \dots, \theta_k) \in]0, 2\pi[^k$ tels que

$$M \sim \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & R(\theta_1) \dots R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

où $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin(\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$

Application 37 $\exp(A_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$

Corollaire 38 $SO_n(\mathbb{R})$ connexe par arcs, $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs, $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$.

IV Etude en petite dimension

A. $n = 2$

(1)

Proposition 39

On a un isomorphisme $SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U}$ où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Corollaire 40 $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif

Corollaire 41 $SO_2(\mathbb{R}) = \{ R(\theta) / \theta \in [0, 2\pi] \}$

Remarque 42 Les matrices $R(\theta)$ sont des matrices de rotations

Définition 43 On définit par $\theta \in \mathbb{R}$, $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ matrice de retournement.

Proposition 45

Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$ alors si $M \in SO_2(\mathbb{R})$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = R(\theta)$. Si $M \notin SO_2(\mathbb{R})$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = S(\theta)$.

B. $n = 3$

Proposition 46: Soit $M \in SO_3(\mathbb{R})$, alors M est semblable à $\begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\theta \in \mathbb{R}$

En notant $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base dans laquelle l'endomorphisme f associé à M est de cette forme on peut donner une description géométrique de l'action de f. C'est une rotation d'angle θ et d'axe $\mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.

Exemple 49 Soit $E = \mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe $(1,1,1)$

Théorème 50: Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple | DVP 1

Proposition 51:

Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$, alors M est semblable à une matrice de la forme

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{réflexion}}$ ou $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & R(\theta) \end{pmatrix}}_{\text{anti-rotation}}$

V Classification des isométries affines

A. Cas général

(1)

Proposition 52 : Toute isométrie affine peut s'écrire comme produit d'au plus $n+1$ réflexions

Théorème 53 : Soit f une isométrie affine de $\mathcal{E}$, il existe une isométrie linéaire φ et une translation t_v telle que :
- l'ensemble $\mathcal{F}$ des points fixes de φ est un sea non vide de direction F.
- $v \in F$
- $f = t_v \circ \varphi$

B. Classification des isométries affines du plan.

(1)

$n=2$

	Translation	rotations	réflexions	symétries glissées
ensemble invariant	pas de point	un unique point fixe	une droite de points fixes	pas de point
droites invariantes	une droite	pas de droite	une direction de droites	une unique droite invariante

C. Classification des isométries de l'espace

(1)

- Translation
- réflexion par rapport à un plan
- anti-rotation
- symétrie glissée
- rotation
- vissage.

VI Isométrie laissant stable une partie du plan.

A. Généralités.

(5)

Soit $X \subset \mathbb{R}^3$ une partie $\mathbb{R}^3 = \mathcal{E}$

Définition 54 : On dit que $f \in Isom(\mathcal{E})$ laisse stable X si $f(X) \subset X$. On note $Is(X)$ ces éléments. $Is^+(X) = Isom^+(\mathcal{E}) \cap Is(X)$

Proposition 55 : Si O est un centre de symétrie de X alors
$$Is(X) \simeq Is^+(X) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Exemple 56 : X triangle isocèle $Is(X) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Exemple 57 : X triangle équilatéral $Is(X) \simeq S_3$

Proposition 58 : Soit Δ_4 un tétraèdre régulier alors :
$$Is(\Delta_4) \simeq S_4 \qquad Is^+(\Delta_4) \simeq A_4$$

Proposition 59 : Soit C_6 un cube alors :
$$Is(C_6) \simeq S_4 \qquad Isom^+(C_6) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

DVP 2

B. Groupe dièdral

(1)

Définition 38 Notons P_n un polygone régulier à n sommets dans $\mathbb{R}^2$. On note $D_n = Isom(P_n)$.

Proposition 39 : D_n est fini d'ordre $2n$, non abélien pour $n \geq 3$ $n \geq 3$.

Proposition 40 : D_n est engendré par r = rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s une symétrie telle que $o(rs) = 2$

Proposition 41 Si G est un groupe engendré par deux éléments (a,b) tels que $o(a) = n$ $o(b) = 2$ et $o(ab) = 2$ alors $G \simeq D_n$.

C. Sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ / $SO_2(\mathbb{R})$ / $SO_3(\mathbb{R})$

(7)

Proposition 62 Les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ sont cycliques.

Proposition 63 : Les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ pas inclus dans $SO_2(\mathbb{R})$ sont isomorphes à D_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 64 : Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ sont

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, D_m, A_4, S_4, A_5 $m \in [\![2, m]\!]$

Application : solide platonicien

1.29 Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre Linéaire* J.Griffone
— (2) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
— (4) *Algèbre* X.Gourdon
— (5) *Analyse numérique et optimisation* G.Allaire
— (6) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (7) *Méthodes numériques* A.Quarteroni R.Sacco F.Saleri

Systèmes d'équations linéaires - Opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques

162

(1)

E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

I Systèmes linéaires

A. Définitions, généralités

Définition 1 : On appelle système d'équations linéaires un système du type :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

Définition 2 : On peut réécrire le système sous la forme $AX = B$ avec $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le p} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle A la matrice du système. Si $n = p$ le rang du système est le rang de A.

Exemple 3 : $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 3 : On dit que le système (ou A) est échelonné si les lignes commencent par un nombre de 0 strictement croissant à mesure que l'indice des lignes augmente (croissant dès qu'il y a une ligne de 0).

Remarque 4 : Un système échelonné est plus facile à résoudre.

Exemple 5 : Les solutions de :

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3t = 2 \\ z - 2t = 1 \end{cases}$$

sont les $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2\lambda + \mu \\ \lambda \\ 1 + 2\mu \\ \mu \end{pmatrix}$ $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

B. Opérations élémentaires et méthode du pivot

Proposition 6 : L'ensemble des solutions d'un système linéaire

Les solutions d'un système linéaire sont échangées si
- on échange des lignes
- on multiplie par un scalaire non nul
- on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres

(1)

Définition 7 : On appelle pivot le premier coefficient non nul de la première équation (existe toujours quitte à changer l'ordre).

Exemple 8 : le système $\begin{cases} 2x + y - 2z + 3t = 1 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3t = 5 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} 2x + y - 2z + 3t = 1 \\ y + 4z - 5t = 5 \\ 0 = -8 \end{cases}$ qui n'admet pas de solutions.

Proposition 9 : Tout système linéaire peut être ramené à un système échelonné.

Proposition 10 : Echelonner une matrice avec le pivot nécessite $O(n^3)$ opérations.

C. Système de Cramer

(1)

Définition 11 : Un système est dit de Cramer si A est carré et inversible.

Proposition 12 : L'unique solution est alors $x = A^{-1}b$.

Proposition 13 : (Formule de Cramer). Pour un système de Cramer on a $x_i = \dfrac{\det(C_1 | \dots | C_{i-1} | b | C_{i+1} | \dots | C_n)}{\det(A)}$.

(4)

Proposition 14 : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{com}(A)$

Exemple 15 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Proposition 16 : Les formules de Cramer ont une complexité $O(n!)$ donc sont inutilisables en pratiques.

D. Une première application

Oev conique

DVP1

II Conséquences théoriques du pivot de Gauss.

A. Générateurs de $GL_n(K)$ / $SL_n(K)$.

(2)

Définition 17: On définit les matrices de transvection $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ $i \neq j$

Définition 18: On définit les matrices de dilatation $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1) E_{i,i}$ $\alpha \neq 0$.

Proposition 19: Cf Annexe.

Proposition 20: $SL_n(K)$ engendré par les transvections

Proposition 21: $GL_n(K)$ engendré par les dilatations

Application 22: $Z(GL_n(K)) = \{\lambda I_n / \lambda \in K^*\}$

Application 23: $Z(SL_n(K)) = \{\lambda I_n / \lambda^n = 1\}$

Application 24: $D(GL_n(K)) = D(SL_n(K)) = SL_n(K)$ $n \geq 2$ ou $|K| > 4$

Application 25: $PSL_n(K)$ simple ($n \geq 2$ $|K| \geq 3$)

Application 26: $SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs

Application 27: $GL_n(\mathbb{R})$ pas connexe par arcs, $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ oui. $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) / \det(M) > 0\}$.

Proposition 28: L'ensemble des matrices de rang $r \in [\![0, n-1]\!]$ est connexe par arcs. ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

B. Actions de groupes

(3)

Proposition 29: Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Alors:

$\exists P \in GL_m(K)$, $A' = PA \iff Ker(A) = Ker(A')$

De plus, toute orbite contient une matrice échelonnée en colonne;

Proposition 30 Soit $(A, A') \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$. Alors

$\exists P \in GL_n(K)$, $A' = AP \iff Im(A) = Im(A')$

De plus, toute orbite contient une matrice échelonnée en colonne.

C. Lien avec la dualité.

(4)

Définition 31 Soit $F \subset E$, on définit $F^\perp = \{\varphi \in E^* / \varphi_{|F} = 0\}$

Définition 32 Soit $G \subset E^*$, on définit G° par:

$$G^\circ = \{x \in E / \forall \varphi \in G \ \varphi(x) = 0\}$$

Proposition 33: Soit $F \subset E$ et $G \subset E^*$ alors:

i) $\dim F + \dim F^\perp = n$ $(F^\perp)^\circ = F$

ii) $\dim(G) + \dim(G^\circ) = n$ $(G^\circ)^\perp = G$

Application 34 Soit $F \subset E$ un sev de dimension q. Il existe $n-q$ formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ linéairement indépendantes telles que: $F = \bigcap_{i=1}^{n-q} \ker(\varphi_i)$

III Conséquences pratiques

(1)

Exemple 35 Si $E = \mathbb{R}^3$ $F = Vect(1,2,3)$ alors

$F = \{z - 3x = 0\} \cap \{y - 2x = 0\}$

Exemple 36: Une base de $F = \{x + y + z = 0\} \cap \{2x + 3y - z = 0\}$ est $(-5, 4, 1)$

Exemple 37: Déterminer une base de $F + G$

Exemple 38: La famille $(1, -2, -3)$, $(2, 3, -1)$, $(3, 2, 1)$ est libre.

IV Résolution de systèmes linéaires

A. Méthode directe.

(5)

Proposition 39: Soit $A \in GL_n(K)$, avec tous ses mineurs non nuls, alors il existe L triangulaire inférieure, U triang sup $u_{i,i} = 1$ tels que $A = LU$. L et U sont uniques

Définition 40: Une telle décomposition s'appelle décomposition LU.

Proposition 41: La décomposition LU nécessite $\simeq \frac{n^3}{3}$ opérations

(5)

Proposition 42 : La résolution de $Ux = b$ nécessite $O(n^2)$ opérations ;

Proposition 43 : (Décomposition de Cholesky). Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors il existe B triangulaire inférieur telle que $A = B^t B$. avec $b_{ii} > 0$.

Proposition 44 : La décomposition de Cholesky demande $\simeq \frac{n^3}{6}$ opérations.

(6)

Proposition 45 : (Décomposition QR). Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe Q unitaire, R triang sup $r_{ii} > 0$ $A = QR$. De plus Q, R uniques

Application 46 : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ alors

$$|\det(x_1 | \dots | x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|_2$$

Application 47 : (Méthode QR).

) DVP 2 ?

B. Méthodes itératives

(7)

Cadre 48 On veut résoudre $Ax = b$ d'inconnue x où $A \in GL_n(\mathbb{C})$ $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

Définition On décompose $A = P - N$ P "facile à inverser" et on définit la suite $x^{(n)}$ par.

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{C}^n \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + P^{-1} r^{(k)} \end{cases} \quad \text{où } r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

Proposition 49. Si $x^{(k)} \to x$ alors $Ax = b$. On dit que la méthode converge si $r^{(k)} \to 0$.

Proposition 50. La méthode converge ssi $\rho(I - AP^{-1}) < 1$ ssi $\rho(NP^{-1}) < 1$

Définition 51 : (Méthode de Jacobi).

$P = D = \mathrm{Diag}(A)$ $N = \dots$

Définition 52 : (Méthode de Gauss-Seidel).

$P = D - E$ $N = P - A$ $D = \mathrm{Diag}(A)$ $E = (-a_{ij}\delta_{i>j})$

Définition 53 (Méthode de relaxation). $(\omega \neq 0)$

$P = \frac{D}{\omega} - E$ $N = P - A$

Proposition 54 Si $A \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ alors la méthode de relaxation converge ssi $0 < \omega < 2$.

(7)

C. Méthode du gradient, minimisation de fonctionnelles

But 55 Résoudre $Ax = b$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Définition 56 Soit $f(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

Proposition 57 f est convexe coercive et atteint son minimum en un unique point X qui vérifie $AX = b$

Définition 58. On considère $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \rho \nabla(f(X^{(k)}))$ où $\rho > 0$. On l'appelle méthode de gradient à pas fixe.

Définition 59 $X^{(n+1)} = \underset{U \in x^{(k)} + F_k}{\mathrm{argmin}}\, f(u)$ où $F_k = \mathrm{Vect}(\nabla(f(X^{(k)})))$

méthode de gradient à pas optimal.

Lemme 60 (Inégalité de Kantorovich). Notons $S_p(A) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$ alors pour $X \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|X\|^4}{\|X\|_A^2 \, \|X\|_{A^{-1}}^2} \geq \frac{4\lambda_1\lambda_n}{(\lambda_1+\lambda_n)^2}$$

où $\|X\|_A^2 = \langle AX, X \rangle$.

Proposition 61. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $X_{k+1} = X_k - \alpha_{k+1} R_k$

$$\alpha_{k+1} = \frac{\|R_k\|^2}{\|R_k\|_A^2} \qquad R_k = AX_k - B.$$

Alors $\|X_k - \bar{X}\| \leq \sqrt{\mathrm{cond}_2(A)} \left(\frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1} \right)^k \|X_0 - \bar{X}\|$ où

$A\bar{X} = b$ $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\mu_n}{\mu_1}$.

/ DVP 3

1.30 Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Le théorème de Witt n'est vraiment pas un passage obligatoire.

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie

170

K est un corps de caractéristique différente de 2. E K-ev de dim n

I Définition, généralités

Définition 1 : Une application $b : E^2 \to K$ est une forme bilinéaire symétrique si pour $x \in E$ $b(x,\cdot)$ et linéaire et si pour tout $(x,y) \in E^2$ $b(x,y) = b(y,x)$

Exemple 2 : Soient $(f,g) \in (E^*)^2$ $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire sur E.

Définition 3 : $q : E \to K$ est une forme quadratique si $q(x) = b(x,x)$ pour b bilinéaire symétrique.

Exemple 4 : $\det : \mathcal{M}_2(K) \to K$ est une forme quadratique

Exemple 5 : Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $h \mapsto d^2f(x)(h,h)$ est une forme quadratique. Variance en proba, app inégalités classiques

Définition 6 : Soit q une forme quadratique alors sa forme polaire associée est $b : (x,y) \mapsto \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$ c'est une forme bilinéaire symétrique.

Proposition 7 : On a la relation :

$$b(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4}$$

Définition 8 : Soit q une forme quadratique de forme polaire b et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E alors la matrice de q est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) := (b(e_i), b(e_j))_{1 \le i,j \le n} \in$

Proposition 9 : On a la relation $b(x,y) = {}^tXAY$

Proposition 10 : Soit $\mathcal{B}_1$ $\mathcal{B}_2$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(q) = {}^tP M_{\mathcal{B}_1}(q) P$

Exemple 11 : Si $q_x = d^2f(x)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(q) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$

Définition 12 : Deux formes quadratiques $q : E \to K$ $q' : F \to K$ sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme $u : E \to F$ tel que $q' \circ u = q$

Proposition 13 : Deux formes quadratiques sont équivalentes ssi elles ont même matrices dans des bases différentes ok

Définition 14 : On définit l'action de $GL_n(K)$ sur $S_n(K)$ par congruence par la formule $P \cdot M = PM {}^tP$. Deux matrices dans la même orbites sont dites congruentes.

Proposition 15 : Dans une base donnée, une forme quadratique se représente de manière unique par un polynôme homogène symétrique de degré 2.

II Vecteurs et sous-espaces isotropes

A. Noyau, cône

Définition 16 : Le noyau de q est défini comme le noyau de l'application Φ_q :

$$E \to E^* \qquad x \mapsto \left| \begin{array}{l} E \to K \\ y \mapsto b(x,y) \end{array} \right.$$

Donc $\ker(q) := \ker(\Phi_q) = \{ x \in E \mid \forall y \in E \ b(x,y) = 0 \}$

Proposition 17 : Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ où $\mathcal{B}$ base de E. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\Phi_q) = n - \dim(\ker(q))$. On appelle cette quantité $\mathrm{rang}(q)$.

Remarque 18 : si q et q' équivalentes alors $\mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}(q')$

Définition 19 : On dit que q est non dégénérée si Φ_q est un isomorphisme, dégénérée sinon.

Définition 20 : Un déterminant de q est un déterminant de n'importe qu'elle matrice de q.

Définition 21: Le discriminant de q noté $\text{disc}(q)$ est l'image d'un déterminant dans $\frac{K}{K^{*2}}$

Exemple 22: Le discriminant de $ax^2+bxy+cy^2$ est $4ac-b^2$

Définition 20: Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $q(x)=0$
Le cône isotrope de q noté $C(q)$ est l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

Exemple 21: $C(\det) = \{\text{matrices non inversibles}\}$

Exemple 22: $q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2+bc$ alors $C(q)$ est le cône des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(K)$.

Remarque 23: $\text{Ker}(q) \subset C(q)$ inclusions pouvant être strictes comme le montre $q(x,y) = x^2-y^2$

Proposition 24: Si $K = \mathbb{C}$ et $C(q) = C(q')$ alors q et q' sont proportionnelles

Remarque 25: C'est faux sur un corps quelconque mais vrai si on suppose q et q' non dégénérées et $C(q)$ non nul.

B - Orthogonalité

On se fixe q une forme quadratique et on note b sa forme polaire

Définition 26: Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $b(x,y)=0$ on note alors $x \perp y$.

Définition 27. Pour $A \subset E$ $A^\perp$ l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A \; x \perp a\}$$

Exemple 28: $b(M,N) = \text{Tr}(MN)$ alors $S_n(K)^\perp = A_n(K)$

Proposition 29: Soit $A \subset E$ sev alors:
i) $\dim(A) + \dim(A^\perp) = n + \dim(A \cap \text{Ker}(q))$ ii) $A^{\perp\perp} = A + \text{Ker}(q)$

Définition 30: Un sous espace A est dit isotrope si $A \cap A^\perp \neq \{0\}$. C'est équivalent à avoir $q_{|A}$ dégénérée

Définition 31. Un sous-espace A est dit totalement isotrope si $A \subset A^\perp$ (ssi) $(q_{|A} = 0)$
A est dit un sous-espace totalement isotrope maximal (ssi) si A est maximal pour l'inclusion

Définition 32: On appelle indice de q l'entier $d(q)$ maximum des dimensions des sous-espaces totalement isotropes de q

Proposition 33: Si q non dégénérée alors $d(q) \leq \frac{n}{2}$.

Théorème 34 (Théorème de Witt)
Soit $F, F' \subset E$ deux sevs les conditions suivantes sont équivalentes:
i) $\exists u \in \mathcal{L}(E)$ $q \circ u = q$, $u(F) = F'$.
ii) $q_{|F} \sim q_{|F'}$
iii) Il existe $\sigma : F \to F'$ isomorphisme tel que $q'_{|F} \circ u = q_{|F}$

Corollaire 35:
i) Tout setsi est contenu dans un setsim
ii) Si F setsi F' setsim $\dim F \leq \dim F'$
iii) Tous les setsim sont de dimension $d(q)$

III Classification des formes quadratiques

Théorème 36: (Réduction de Gauss) Soit q une forme quadratique Il existe $l_1, \dots, l_n \in K^n$ et $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires indépendantes telles que $q = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i^2$

Remarque 37: Il existe un algorithme pour calculer cette décomposition.

Exemple 38: $xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$

Application 39: Soit q une forme quadratique, alors il existe

une base orthogonale pour q.

Théorème 40 : (Classification sur $\mathbb{C}$.)
Soit q une forme quadratique de rang r alors il existe une base de E dans laquelle $Mat_B(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En particulier deux formes quadratiques sont équivalentes ssi elles ont le même rang.

Théorème 41 : (Classification sur $\mathbb{R}$) Soit q une forme quadratique alors il existe une base de B de E dans laquelle

$$Mat_B(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 42 : (Loi d'inertie de Sylvester) les entiers p et s ne dépendent que de q on appelle le couple (p,s) la signature de q. Deux formes quadratiques réelles sont équivalentes ssi elles ont la même signature.

Remarque 43 : $rg(q) = p+s$

Proposition 44 : (Lemme de Morse). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^3. On suppose $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u = \varphi(x)$ sur un voisinage de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i^2(x) - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2(x)$$

En particulier 0 est un minimum local ssi $p = n$
maximum local ssi $p = 0$

Définition 45 : le discriminant de q est l'image dans K^*/K^{*2} du déterminant de n'importe quelle matrice représentant q

Théorème 46 : Classification forme quadratiques sur $\mathbb{F}_q$.
Il existe une base de E dans laquelle $Mat_B(q) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$
En particulier, deux formes quadratiques non dégénérées sont équivalentes ssi elles ont même discriminant.
Application 47 : (Loi de réciprocité quadratique) p, q premiers impairs distincts $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ /01

IV Groupe orthogonal $O(q)$

Soit q une forme quadratique non dégénérée.

Définition 48 : On note $O(q) = \{u \in GL(E) \mid q \circ u = q\}$ le groupe orthogonal de q. De même $SO(q) = O(q) \cap \{\det(q) = 1\}$.

Proposition 49 : $P \in O(q) \iff {}^tP M_q P = M_q$

Définition 50 : $u \in GL(E)$ est une symétrie orthogonale si u est une symétrie de $O(q)$. Si $\dim(\ker(u - id_E)) = n-1$ alors u est une réflexion orthogonale.

Théorème 51 : (Cartan Dieudonné). Tout élément de $O(q)$ est produit de réflexions orthogonales.

Application 52 : $SO_3(\mathbb{R})$ simple

Théorème 53 : Soit $G < GL_n(\mathbb{R})$ compact alors $G \subset O(q)$ pour une forme quadratique q non dégénérée.

Théorème 54 : (Décomposition polaire)

$$O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{est un homéomorphisme.}$$
$$(O, S) \mapsto OS$$

Application 55 : Soit $O(p,q)$ le groupe orthogonal de la forme quadratique non dégénérée de signature (p,q) alors :

$$O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$ /02

1.31 Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

La dernière partie est largement améliorable.

Références utilisées :
— (1) *Invitations aux formes quadratiques* C.Séguin Pazzis
— (2) *Géométrie* M.Audin
— (3) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (4) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas

Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

171

E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Formes quadratiques réelles cf 170

Définition 1: Une forme quadratique $q : E \to K$ est une application de la forme $q(x) = b(x,x)$ où b est une forme bilinéaire symétrique sur E^2. On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

Exemple 2: Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ alors $h \mapsto d^2f(x)\cdot(h,h)$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 3: Soit q une forme quadratique on appelle forme polaire associée à q la forme bilinéaire $b(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$

Définition 4: On appelle noyau de q le noyau de la forme linéaire $\Phi_q : E \to E^*$ $x \mapsto (y \mapsto b(x,y))$. On définit $rg(q) = n - \dim(\ker(q))$

Définition 5: Soit $\mathcal{B}$ une base de E on appelle matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $M_{\mathcal{B}}(q) = (b(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}$ c'est une matrice symétrique

Proposition 6: Si $\mathcal{B}'$ autre base de E et P matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ alors $Mat_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tP M_{\mathcal{B}}(q) P$

Proposition 7: En se fixant une base de E on a un isomorphisme entre $Q(E)$ et $S_n(\mathbb{R})$.

Définition 8: Deux formes quadratiques q et q' sont dites équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ $q' \circ u = q$.

Définition 9. Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux (et on note $x \perp_q y$) si $b(x,y) = 0$. Si $x \perp_q x$ x est dit isotrope. On note $C(q) = \{x \in E \mid x \perp_q x\}$ le cône isotrope de q.

Définition 10: On dit que q est non dégénérée si Φ_q est injective.

Exemple 11: $A \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$ est non dégénérée

$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ est dégénérée

Définition 12: On dit qu'une forme quadratique q est positive (resp définie positive) si $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $q(x) \ge 0$ (resp $q(x) > 0$)

q est dite (définie) négative si $-q$ l'est

Exemple 13: $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est définie positive

Définition 14: On définit $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$, $S_n^-(\mathbb{R})$, $S_n^{--}(\mathbb{R})$ comme les matrices $M \in S_n(\mathbb{R})$ dont la forme quadratique associée : $X \mapsto {}^tXMX$ est (définie) positive ou (définie) négative.

Proposition 15: (Critère de Sylvester). Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi tous les mineurs de M sont strictement positifs

Application 16: $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$

II Classifications des formes quadratiques

Proposition 17: (Réduction de Gauss). Soit q une forme quadratique alors il existe une base de E orthogonale pour q.

Remarque 18: En pratique on trouve cette base en appliquant l'algorithme de Gauss à q.

Exemple 19:

Proposition 20: (Diagonalisation simultanée) Si q est une forme quadratique définie positive et q' une forme quadratique quelconque alors il existe une base de E qui diagonalise q et q'.

Application 21: (Théorème spectral)
Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $M = PDP^t$.

Proposition 22: Soit q une forme quadratique, alors il existe une base de E, des entiers $s, t \ge 0$ tels que :

(1)

$Mat_B(q) = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème 23: (Loi d'inertie de Sylvester) Les entiers s et t de la proposition précédente ne dépendent que de q et pas de B. On appelle le couple (s,t) la signature de q.
On a $s+t = rg(q)$

Proposition 24: (Classification sur $\mathbb{R}$) Deux formes quadratiques q et q' sont équivalentes ssi elles ont même signature et même rang.

(3)

Application 25: (Lemme de Morse) Soit $f \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$ alors il existe un C^1 difféomorphisme φ entre deux voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que:

$$\forall x \in U \quad f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2$$

Application 26: f présente un minimum (resp. maximum) ssi $p = n$ (resp $p = 0$).

(4)

Application 27: On note $\Omega(E)$ les formes quadratiques non dégénérées de E et $\Omega_k(E)$ celles de signatures $(k, n-k)$
Alors les $\Omega_k(E)$ sont les composantes connexes de $\Omega(E)$ DVP

III Groupe orthogonal

(5)

On considère une forme quadratique non dégénérée q.

Définition 28: On appelle groupe orthogonal de q le groupe

$$O(q) := \{ u \in GL(E) \mid q \circ u = q \}$$

Proposition 29: Si B base de E et $M = Mat_q(B)$ alors

$$O(q) \simeq \{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tPMP = M \}$$

(5)

Proposition 30: Si $u \in O(q)$ $|\det(u)| = 1$

Définition 31: On appelle groupe spécial orthogonal le sous-groupe $SO(q) = O(q) \cap \{\det(u) = 1\} \lhd O(q)$

Définition 32: Une symétrie de $O(q)$ est une symétrie orthogonale

Définition 33: Une réflexion orthogonale est une symétrie fixant un hyperplan.

Proposition 34: $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales

Corollaire 35: $SO(q)$ est engendré par les renversements orthogonaux ie les symétries orthogonales telles que $\dim(\ker(s+Id)) = 2$.

Application 36: $Z(O(q)) = \{\pm Id\}$ $Z(SO(q)) = \begin{cases} \{Id\} & n \text{ impair} \\ \{\pm Id\} & n \text{ pair} \end{cases}$

Remarque 37: Si q est définie positive alors $O(q) = O_n(\mathbb{R})$

Proposition 38: $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe compact non connexe dont les composantes connexes sont $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$

Proposition 39: $SO_n(\mathbb{R})$ est simple pour n impair

Application 40:

Lemme 41: $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Application 42: On suppose q de signature (p,s).
Alors $O(p,s) \simeq O(p) \times O(s) \times \mathbb{R}^{ps}$
où $O(p,s) = O(q)$
$O(s) = O_s(\mathbb{R})$ $O(p) = O_p(\mathbb{R})$

Application 43: $O(p,s)$ est compact ssi $ps = 0$

Proposition 44: Soit $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ compact alors G est conjugué d'un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$

Application 44: Soit $G \supset O_n(\mathbb{R})$ sous-groupe compact de

(5) (2)

$GL_n(\mathbb{R})$ - Alors $G = O_n(\mathbb{R})$.

IV. Coniques

$\mathcal{E}$ est un plan affine euclidien

A. Caractérisation par les formes quadratiques

(2)

Définition 45: Une conique est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $f(M) = 0$ où f est un polynôme du second degré i.e $f(M) = q(\vec{OM}) + l(\vec{OM}) + C_0$ où $O \in \mathcal{E}$, $q \neq 0$

Remarque 46: La définition de f donnée précédemment ne dépend pas de O.

Définition 47: Une conique définie par $f = q + l + C$ est dite propre si la forme quadratique définie par $Q(U,Z) = q(U) + l(U)Z + CZ^2$ est non dégénérée.

Exemple 48: $\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ définit une conique propre

Définition 49: Un centre d'une conique est un vecteur $\Omega \in \mathcal{E}$ tel que $f(\vec{\Omega M}) = q(\vec{\Omega M}) + C_\Omega$. Si Ω existe et est unique on dit que c'est une conique à centre et Ω est appelé centre de la conique.

Proposition 50: Une conique est à centre ssi q est non dégénérée.

Proposition 51: ($\mathcal{E}$ euclidien). Soit C une conique à centre alors il existe un repère orthonormé d'origine le centre tel que l'équation de la conique soit de la forme:

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)

Proposition 52: Si la conique est propre et pas à centre alors il existe un repère dans lequel orthonormé la conique a pour équation $y^2 = 2px$.

Proposition 53: (Lien avec la signature) coniques propres

Q	q	Equation	nom
$(3,0)/(0,3)$	$(2,0)/(0,2)$	$x^2+y^2=-1$	$\varnothing$
$(2,1)/(1,2)$	$(2,0)/(0,2)$	$x^2+y^2=1$	ellipse
$(2,1)/(1,2)$	$(1,1)$	$x^2-y^2=1$	hyperbole
$(2,1)/(1,1)$	$(1,0)/(0,1)$	$y^2=2px$	parabole

Proposition 54: (Lien avec la signature) Coniques impropres

Q	q	Equation	nom

B. Définition géométrique.

Proposition 55: Soit C une conique propre non vide qui n'est pas un cercle. Alors il existe F un point et D une droite qui ne passe par F et un réel $e > 0$ tel que

$$C = \{ M / FM = e\,d(M,D) \}$$

Traversant, la donnée de tels points définissent une Conique

Proposition 56:

Si $e = 1$ on a une parabole

Si $e < 1$ c'est une ellipse

Si $e > 1$ c'est une hyperbole

1.32 Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Références utilisées :

— (1) *Algèbre et Géométrie* P.Boyer
— (2) *Géométrie Analytique classique* JD.Eiden
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas
— (5) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Barycentre dans un espace affine réel de dimension finie. Applications.

181

(1)

E est un $\mathbb{R}$-ev de dim n et $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

I Barycentre

Définition 1: Soit $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{E}^n$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ de somme non nulle. On appelle barycentre de $((a_i,\alpha_i))_i$ l'unique $g\in\mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = \vec{0}$.

Proposition 2: Si $g = \mathrm{bar}((a_i,\alpha_i))_i$ alors pour $O\in\mathcal{E}$, $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\overrightarrow{Og} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{Oa_i}$.

Exemple 3: Le milieu de $[A,B]$ est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,1)$.

Définition 4: Si $\alpha_1=\dots=\alpha_n$ on parle d'isobarycentre.

Proposition 5: (Associativité du barycentre). Soit $(a_1,\dots,a_n)$ $(b_1,\dots,b_m)\in\mathcal{E}^{n+m}$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $(\beta_1,\dots,\beta_m)\in\mathbb{R}^{n+m}$. Alors $\mathrm{Bar}((a_i,\alpha_i),(b_i,\beta_i)) = \mathrm{Bar}((a_i,\alpha_i),(b,\beta))$ où $\beta=\sum_{j=1}^{m}\beta_j$ et b est le barycentre de $((b_i,\beta_i))$.

Proposition 6: Soit $S\subset\mathcal{E}$, alors le sous-espace affine engendré par S est l'ensemble des barycentres d'un nombre fini de points de S.

Proposition 7: Soit $f:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ une application. Alors f est affine ssi elle conserve les barycentre ie $f(\mathrm{Bar}((a_i,\alpha_i))) = \mathrm{Bar}((f(a_i),\alpha_i))$.

Application 8: $f(\langle S\rangle) = \langle f(S)\rangle$ pour f affine.

Proposition 9: Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

II Coordonnées barycentriques.

(2)

A. Généralités.

Définition 10: $(a_0,\dots,a_k)$ sont dits affinements indépendants si l'espace affine qu'ils engendrent est de dimension k.

Définition 11: Si $k=n$ on dit que $(a_0,\dots,a_n)$ est un repère affine.

Exemple 12: Un triangle non aplati définit un repère affine.

Définition 12: Soit $(a_0,\dots,a_n)$ un repère affine, alors tout $M\in\mathcal{E}$ est barycentre de (a_i,λ_i). On appelle $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ les coordonnées barycentriques de M, ce n-uplet est défini à un scalaire près.

Définition 13: Si $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ on parle de coordonnées barycentriques absolues.

Proposition 14: (Lien avec les coordonnées cartésiennes). Soit $M\in\mathcal{E}$ alors il y a équivalence:
i) M de coordonnées cartésiennes $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ dans $(a_0,\overrightarrow{a_0a_1},\dots,\overrightarrow{a_0a_n})$
ii) M de coordonnées barycentrique $(1-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ dans $(a_0,\dots,a_n)$.

Exemple 15: Le centre circonscrit d'un triangle (A,B,C) a pour coordonnées barycentriques dans (A,B,C): $(a\cos(\hat{A}), b\cos(\hat{B}), c\cos(\hat{C}))$

B. Equations barycentriques.

(2)

Définition 16: Soit $P\in\mathbb{R}[X_0,\dots,X_n]$ homogène et A définit par $\{M\in\mathcal{E} \mid P(\lambda_0,\dots,\lambda_n)=0\}$. On dit que A admet $P(X_0,\dots,X_n)=0$ pour équation barycentrique.

(2)

Proposition 17: Soit trois points p_1,p_2,p_3 de coordonnées barycentriques absolues (x_i,y_i,z_i). Alors

p_1,p_2,p_3 alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

Corollaire 18: Une équation barycentrique pour (p_1p_2) est: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & X \\ y_1 & y_2 & Y \\ z_1 & z_2 & Z \end{vmatrix} = 0$.

(1)

Proposition 19 : Soit D_1, D_2, D_3 3 droites d'équations barycentriques $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z = 0$ alors :

D_1, D_2, D_3 concourantes ou parallèles $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$

Application 20 : (Théorème de Ceva). Soit (ABC) un triangle A', B', C' de coordonnées barycentriques (par rapport à (ABC)) $(0, \alpha, 1)$ $(1, 0, \beta)$ $(\gamma, 1, 0)$ alors

$(AA'), (BB'), (CC')$ concourantes $\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$ ou parallèles

Application 21 : Les médianes d'un triangle sont concourantes.

III Applications en géométrie

A. Théorèmes d'alignement.

(1)

Théorème 22 : (Desargues). Soient (AA'), (BB') et (CC') trois droites distinctes concourantes en O. On suppose que $(AB), (A'B')$ / $(AC), (A'C')$ / $(BC), (B'C')$ se rencontrent en R, P, Q alors P, Q, R sont alignés.

Théorème 23 : (Pappus) Soient (D, D') droites s'intersectant en O. Soit $(A, B, C) \in D^3$ et $(A', B', C') \in D'^3$ distincts 2 à 2. Alors $R = (AB') \cap (BA')$, $Q = (AC') \cap (CA')$ et $P = (BC') \cap (CB')$ sont alignés.

B. Points remarquables d'un triangle.

(1)

On se donne un triangle (A, B, C). $\mathbb{C}_f$ convexe

Proposition 24 : L'orthocentre H a pour coordonnées barycentriques $(\cot(\hat{B})\cot(\hat{C}), \cot(\hat{A})\cot(\hat{C}), \cot(\hat{A})\cot(\hat{B}))$

Proposition 25 : Le centre du cercle inscrit a pour coordonnées (a, b, c)

Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Pr Gergonne

Proposition 26 : Le centre d'Euler a pour coordonnées $(b\cos(\hat{B}) + c\cos(\hat{C}), c\cos(\hat{C}) + a\cos(\hat{A}), a\cos(\hat{A}) + b\cos(\hat{B}))$

(1)

C. Coniques.

DVP 1.

Proposition 27 : Une conique a une équation barycentrique de la forme : $\alpha_1 Y^2 + \alpha_2 YZ + \alpha_3 Z^2 + (\beta_1 Y + \beta_2 Z)(X+Y+Z) + \gamma(X+Z+Y)^2 = 0$

Proposition 28 : Par 5 points A, B, C, D, E passe une unique conique elle est unique si 4 points quelconques sont non alignés. Elle est alors non dégénérée ssi 3 points quelconques sont non alignés.

IV Convexité.

A. Généralités.

(1)

Définition 29 : $X \subset E$ est dit convexe si pour $(a, b) \in X^2$ $[a, b] \subset X$.

Proposition 30 : X est convexe ssi X stable par barycentre à coefficients positifs.

Exemple 31 : Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on note $Epi(f) = \{(x, y) \mid y \geq f(x)\}$ f est convexe ssi $Epi(f)$ convexe.

(3)

Proposition 32 : Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe alors $\bar{C}$ et $\mathring{C}$ sont convexes

Proposition 33 : Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe dense, alors $C = \mathbb{R}^n$

Proposition 34 : Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe non borné, alors C contient une demi-droite.

B. Enveloppe convexe

(1)

Définition 35 : Soit $X \subset E$, on note $conv(X)$ et on appelle enveloppe convexe de X le plus petit convexe qui contient X.

Exemple 36 : Enveloppe convexe d'un nombre fini de points en annexe.

Théorème 37 : (Caratheodory) $conv(X)$ est l'ensemble des combinaisons convexe d'au plus $n+1$ points de X.

Corollaire 38 : Si X compact alors $conv(X)$ compacte

Remarque 39 : Faux en dimension infinie.

(4) Application 40 : Soit $G < GL_n(\mathbb{R})$ compact. Alors il existe une forme quadratique q telle que $G \subset O(q)$.

Application 41 : Soit $G < GL_n(\mathbb{R})$ compact tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset G$ alors $G = O_n(\mathbb{R})$. DVP

(5) Théorème 41 : (Gauss-Lucas). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Application 42 : Si $P'' \mid P$ alors les racines de P sont alignées.

C. Points Extrêmaux

(1) Définition 43 : Soit $X \subset E$ un convexe, $x \in X$ est dit extrémal si $X \setminus \{x\}$ convexe. On note $Extr(X)$ l'ensemble de ces points.

Proposition 44 : $x \in X$ extrémal ssi : $[\forall (a,b) \in X^2, \forall t \in [0,1]$ $x = ta + (1-t)b \Rightarrow x = a$ ou $x = b]$

Exemple 45 : Les points extrémaux d'un disque est le cercle associé.

Exemple 46 : Les points extrémaux d'un carré sont ses sommets

Proposition 47 : Soit $B_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|_2 \leq 1\}$ alors $Extr(B_n(\mathbb{R})) = O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 48 : Soit B l'ensemble des matrices bi-stochastiques alors $Extr(B) = \{$matrices de permutation$\}$.

D. Théorème de Hahn-Banach.

(1) Théorème 49 : (Hahn-Banach géométrique) Soit $X \subset E$ convexe ouvert et $S \subset E$ sea avec $X \cap S = \emptyset$. Il existe un hyperplan affine fermé contenant S et disjoint de A.

Corollaire 50 : Supposes E normé, Soit X convexe compact de E et Y convexe fermé de E. Il existe φ une forme linéaire $Y \cap X = \emptyset$

(1)

continue telle que :

$$\sup_{x \in C} \varphi(x) < \inf_{y \in C} \varphi(y)$$

Application 51 : $Conv(O_n(\mathbb{R})) = B_n(\mathbb{R})$

Théorème 52 : (Krein-Millmann). Soit X un convexe compact de E. Alors $X = Conv(Extr(X))$

Application 53 : $Conv(\{$matrices permutation$\}) = B$.

1.33 Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Le début est pas très bien fait je pense.

<u>Références utilisées :</u>

— (1) *Algèbre/Probabilités* X.Gourdon
— (2) *Oraux X-ENS Mathématiques Volume* 6 S.Francinou, H.Gianella S.Francinou
— (3) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Eléments de Théories de Groupes* J.Calais
— (5) *Histoires hédéonistes de groupes et de géométries Tome Premier* P.Caldero J.Germoni
— (6) *Cours d'Algèbre* D.Perrin
— (7) *Exercices de mathématiques pour l'agrégation Volume 1* S.Francinou H.Gianella

Méthodes combinatoires, problème de dénombrement.

1980

I Ensembles finis, dénombrement

A. Ensembles finis.

(1)

Définition 1: On dit qu'un ensemble est fini s'il est vide ou s'il est en bijection avec $[\![1,n]\!]$. Dans ce cas, l'entier n ne dépend pas de la bijection et on l'appelle le cardinal de E.

Proposition 2: Soit E, F deux ensembles.
- Si E fini et $E \simeq F$ alors F fini $|E| = |F|$
- Si F fini et $f \hookrightarrow F$ alors f fini et $|f| \leq |E|$
- Si f fini et $E \twoheadrightarrow F$ alors E fini et $|E| \geq |F|$

Corollaire 3: (Principe des tiroirs) si $|E| > |F|$ alors E ne s'injecte pas dans F.

Application 4: L'équation $ax^2 + by^2 = 1$ admet une solution dans $\mathbb{F}_q$. On en déduit la réduction des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$.

(1)

Proposition 5: Soit E, F deux ensembles finis de même cardinal si $f \subset F$ alors $f = F$.

Corollaire 6: Soit E, F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \to F$ alors on a:

f injective $\iff$ f bijective $\iff$ f surjective

Application 7: Un anneau intègre fini est un corps.

(1)

Proposition 8: (Formule du Crible). Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis alors:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Remarque 9: En particulier $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

(2)

Application 10: La probabilité que deux nombres pris uniformément entre 1 et n soient premier entre eux vaut

$$p_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

(1)

Proposition 11: Soit $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis alors $|E_1 \times \dots \times E_n| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|$

Proposition 12: Soit E, F finis alors $|E^F| = |E|^{|F|}$

Application 13: E fini $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

Proposition 14: Soient E, F deux ensembles finis, on suppose $p = |E| \leq n = |F|$ alors il y a n^p applications $E \to F$

B. Combinatoires

(1)

Définition 15: Soit E un ensemble fini de cardinal n, pour $p \in \mathbb{N}$ on définit $\binom{n}{p}$ comme le nombre de parties de E à n éléments

Proposition 16: $\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & p > n \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple 17: Dans un jeu de 52 cartes il y a 4080 mains qui sont des quintes.

Proposition 18: Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$

$0 \leq p \leq n$ $\quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

$p, n \geq 1$ $\quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ $\quad p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

$p, n \geq 0$ $\quad \binom{n+1}{p+1} = \sum_{q=p}^{n} \binom{q}{p}$

Proposition 19: (Formule du binôme).

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Corollaire 20:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Proposition 21: (Formule de Vandermonde)

$$\forall (m, n, p) \in \mathbb{N}^3 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

II Dénombrement en algèbre

A. Actions de groupes

(4)

Soit G fini agissant sur X fini

Proposition 22 : (Relation stabilisateur orbite). Soit $x \in X$ alors $|G| = |G \cdot x| \times |G_x|$

Proposition 23 : (Equation aux classes). Soit $(G \cdot x_i)_{i \in [\![1,r]\!]}$ partition de G en orbite alors :

$$|G| = \sum_{i=1}^{r} |G \cdot x_i|$$

Application 24 : Un groupe d'ordre p^2 p premier est abélien Lemme de Cauchy.

B. Dénombrement sur les corps finis.

Soit p un nombre premier et $q = p^n$

(6)

Proposition 25 : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$

$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = |PGL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$

$|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{d}$ $\quad d = (q-1) \wedge n$

Application : $GL_n(\mathbb{F}_p)$ admet un sous-groupe d'ordre $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Proposition 26 : (q impair). Il y a $\frac{q+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q$ et $\frac{q-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q^*$.

Application 27 : $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$ où $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \text{ carré mod } p \\ 0 \text{ si } p \mid a \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$

Proposition 28 : (Réciprocité quadratique). Soit p, q deux nombres premiers impairs alors $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$ DA

Application 29 : Il existe une infinité de nombre premier $\equiv 1 [12]$

C. Application

(4,6)

Théorème 30 : (Théorème de Sylow)

Soit G un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha m$ $m \wedge p = 1$ premier alors :

- Il existe $H < G$ $|H| = p^\alpha$ (H est un p-sylow)
- Le nombre n_p de $\{p\text{-sylow}\}$ vérifie $n_p \equiv 1 [p]$ $n_p \mid m$
- Tous les p-sylow de G sont conjugués.

Application 31 : Soient p, q, r des nombres premiers alors un Groupe d'ordre pq, pqr, p^2q n'est pas simple. DVP

Application 32 : A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60.

(5)

Proposition 33 : Le nombre de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ vaut :

$$\sum_{m_1 + \dots + m_r = n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{m_1}(\mathbb{F}_q)| \times \dots \times |GL_{m_r}(\mathbb{F}_q)|}$$

Proposition 34 : Le nombre de matrices de rang r dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$ vaut :

Proposition : Isomorphismes exceptionnels

III Fonctions Arithmétiques Cf 120

(1)

A. Indicatrice d'Euler.

Définition 35 : On note $\varphi(n) = \left|\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^*\right|$

Proposition 36 : φ est multiplicative ie $n \wedge m = 1 \Rightarrow \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

Proposition 37 : Soit p premier $\alpha \in \mathbb{N}^*$ Alors $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$

Application 38 : $\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

Proposition 39 : $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$

Application 40 : Si $G \subset k^*$ G fini k corps clos G cyclique

Application 41 : $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

B. Fonction de Möbius

(1)

Définition 42 : On définit la fonction de Möbius par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \text{ a un facteur carré} \\ (-1)^k & n = p_1 \dots p_k \quad p_i \text{ nombres premiers distincts} \end{cases}$$

Proposition 43 : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{d \mid n} \mu(d) = \delta_{n,1}$

Proposition 44 : μ est multiplicative

Proposition 45 : (Inversion de Möbius) Soient $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ deux fonctions telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) = \sum_{d \mid n} g(d)$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

(7)

Application 46 : $\varphi(n) = \sum_{d \mid n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right)$

Application 47 : On note $A(n,q)$ le nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ et $I(n,q) = |A(n,q)|$. Alors :

- $X^q - X = \prod \dots$
- $q^n = \sum_{d \mid n} d\, I(d,q)$
- $I(n,q) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) q^{\frac{n}{d}}$

(3)

Proposition 48 : $\forall s > 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$

Application 49 : $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{6}{\pi^2}$ où p_n a été défini dans l'application 10.

(2)

IV Séries génératrices, cf 241.

Proposition 50 : Le nombre de dérangements de S_n vaut $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n = \frac{e^{-z}}{1-z}$ $|z|<1$

Proposition 51 : Le nombre de Partition de $[\![1, k]\!]$ B_k (nombre de Bell) vaut :

$$B_k \quad \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = e^{e^z - 1}$$

Application 52 : $B_n \underset{n \to +\infty}{\sim}$

Proposition 53 : Le nombre I_n d'involutions de S_n vaut $\sum_{0 \le k \le \frac{n}{2}} \frac{n!}{k!\, 2^k\, (n-2k)!}$. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} z^n \quad z \in \mathbb{C}$

Application 54 : $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\, n^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{n}{2} + \sqrt{n} - \frac{1}{4}}$

Définition 55 : (Partition d'un entier). On note pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n = \left| \left\{ (a_1, \dots, a_k) \;/\; \sum_{i=1}^{k} a_i = n \right\} \right|$$

Proposition 56 : $\forall |x|<1 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^n}$

Application 57 : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n \le \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$

Proposition 58 : (ADMIS) (Hardy et Ramanujan)

$$p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

Proposition 59 : $c_n = \left\{ P \in \mathbb{Z}[X] \;/\; P(0) \neq 0,\ Z(P) \subset D(0,1),\ \deg P = n \right\}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^{p(n)}}$$

Application 60 : (ADMIS) $h(n) \sim$ $\frac{\sqrt{105\, n\, \zeta(3)}}{\pi}$

2 Leçons d'analyse

2.1 Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

On a le choix de ce qu'on met dans une leçon comme ça.

Références utilisées :

— (1) *Eléments d'Analyse Fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
— (2) *Analyse* X.Gourdon
— (3) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec
— (4) *Théorie de l'intégration* M. Briane G.Pagès
— (5) *Chemin d'Analyse Tome 1* D.Chiron
— (6) *Oraux X-ENS Analyse 4* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (7) *Analyse Fonctionnelle* H.Brézis

Espaces de fonctions. Exemples et applications.

201

(1)

I Espaces de fonctions continues sur un compact

Soit (X,d) un espace métrique compact

A. Généralités.

Définition 1: On note $C(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeur dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2: $(C(X), \|.\|_\infty)$ est un Banach

Proposition 3 (Lemme de Dini) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions décroissantes continues qui converge vers f continue. Alors la convergence est uniforme.

Application 6 Il existe une suite de polynôme $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers $|.|$ sur $[-1,1]$

Proposition 5. (Lemme de Dini 2).

Application 6: Glivenko-Contelli.

B. Stone - Weierstrass

Théorème 7 (Stone - Weierstrass) Toute sous algèbre de $C(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C(X)$.

Application 8 Toute fonction périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

Application 9 (Théorème de Weierstrass). Toute fonction continue sur $C(X)$ est limite uniforme de polynôme.

Contre - Exemple 10 Une limite uniforme de polynôme sur $\mathbb{R}$ est un polynôme.

Application 11 Si $\mathcal{L}(f)$ désigne la transformée de Laplace de f continue bornée alors $f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est injective.

Définition 12 Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ continue on définit le nième polynôme de Bernstein défini par:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

(3)

Proposition 13: $\exists C \neq 0,\ \forall f \in C^0([0,1]),\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq C\, \omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

L'inégalité est optimale avec $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$

(2)

Théorème 14 (Muntz) Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de réels strictement positifs. Alors Vect $(x \mapsto x^{\alpha_n})_n$ est dense dans $C^0([0,1])$ muni de $\|.\|_\infty$ ssi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$

Proposition 15: Les fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivables sont denses dans $C^0([0,1])$ avec $\|.\|_\infty$

C. Théorème d'Ascoli

(1)

Théorème 16: (Théorème d'Ascoli). Soit E un compact et F un complet. Soit $A \subset C^0(E,F)$ alors sont équivalents:

i) A relativement compact pour d_∞

ii) $\begin{cases} A \text{ équicontinue}: \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in E^2\ d(x,y) < \delta \Rightarrow \\ \quad \forall f \in A\ d(f(x), f(y)) < \varepsilon \\ \forall x \in E\ A_x = \{f(x) \mid f \in A\} \text{ relativement compact dans } F. \end{cases}$

Application 17: Soit $K \in C^0([0,1]^2)$ et $E = C^0([0,1])$ muni de $\|.\|_\infty$. Alors $T_K: E \to E$, $f \mapsto (x \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy)$ est un opérateur compact.

(3)

Application 18 Le théorème de Cauchy-Arzela-Péano

Contre - Exemple 19 Si $\dim E = +\infty$ pas forcément vrai. $E = C_0(\mathbb{N})$

$f(x) = \left(\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}\right)_n$

II Espaces L^p.

(1)

Soit $p \in [1, +\infty]$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

A. Généralités

Définition 20: On définit pour $p < +\infty$.

$\mathcal{L}^p(\mu) = \{f: X \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p < +\infty\}$

(4)

$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \exists c>0,\ |f| < c \text{ p.p} \}$

Définition 21 On définit L^p comme le quotienté de $\mathcal{L}^p$ par la relation "être égaux p.p"

Proposition 22 : $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur L^p.
$\|f\|_\infty = \inf \{ c>0 \mid |f| \le c \text{ p.p} \}$ est une norme sur L^∞. DVP

Théorème 23 : (Riesz-Fischer) $(L^p, \|.\|_\infty)$ est un Banach
De plus si $f_n \xrightarrow{\|.\|_p} f$ alors il existe une extraitrice φ telle que $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p.

Remarque 24 : Il n'y a pas forcément convergence p.p

Proposition 25 Si $\mu(X) < +\infty$ alors $L^p \subset L^q$ pour $p>q$
Pas forcément vrai si $\mu(X) = +\infty$.

B. Convolution dans les L^p et applications

(4)

On considère $\mu = \lambda_d$ mesure de Lebesgue $(X = \mathbb{R}^d)$ $p < +\infty$

Lemme 26 L'ensemble des fonctions lipschitziennes à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Application 27 Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on note $\tau_a f(x) = f(x-a)$
alors $\|\tau_a(f) - f\|_p \xrightarrow[a \to 0]{} 0$

Définition 28 Soit $(f,g) \in L^p$. On définit quand cela a un sens la convolée de f et g par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y)\, dy$$

Proposition 29 La convolée de f et g est bien définie dans les cas suivants :
$L^1 * L^1 \in L^1$, $L^p * L^q \in L^\infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $L^1 * L^p \in L^p$

Proposition 30 $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$ est une algèbre commutative
On peut montrer qu'elle n'est pas unitaire.

Lemme 31 Il existe une suite $(\delta_n)_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que
$\forall n \int_{\mathbb{R}^d} \delta_n = 1$, $\delta_n \ge 0$, $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n \to +\infty} \int_{\|x\| > \varepsilon} \delta_n = 0$

(4)

Proposition 32 Soit $f \in L^p$. Alors $\delta_n * f \in L^p$ et
$\delta_n * f \xrightarrow[n \to +\infty]{\|.\|_p} f$

Théorème 33 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Application 34 (Lemme de Riemann Lebesgue). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$
alors $\hat{f} \to 0$

(1)

Théorème 35 (Riesz-Fréchet Kolmogorov).
Soit $K \subset L^p(\Omega)$ $p \in [1, +\infty[$ alors K est compact ssi
- H borné
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R_0 > 0$, $\forall f \in H$ $\int_{\|x\| > R_0} |f(x)|\, dx < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a_0 > 0$, $\forall a \in]0, a_0[$ $\forall f \in H$ $\|f - \tau_a f\|_p < \varepsilon$

Application 36 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ alors l'injection $i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte

C. Série de Fourier dans L^p.

(3)

Définition 37 Pour $f \in L^p_{2\pi}$ on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt$ et $e_n(t) = e^{int}$

Définition 38 On définit $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$, $k_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$
et $\sigma_n(f) = (k_n * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t) f(x-t)\, dt$

Théorème 39 (Fejer) Pour $f \in C_{2\pi}^0$ $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ DVP
Pour $f \in L^p_{2\pi}$ $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Application 40 $(e_n)_n$ est une base Hilbertienne de L^2 on a donc pour $f \in L^2_{2\pi}$ $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Application 41 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

(6)

Application 42 (Equation de la chaleur sur le cercle) Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle C^1pm et 2πpériodique alors l'équation
$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$ admet une unique solution : $u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u_0) e^{-n^2 t} e^{inx}$

(1,7)

III Espace de Sobolev

Soit $\Omega =]a,b[$

Définition 43 On pose $H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \mid \exists g \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega g\varphi \}$. g est alors unique et on le note u'.

Proposition 44 $H^1(\Omega)$ est un Hilbert pour $\|u\|_{H^1} = \|u\|_2 + \|u'\|_2$

Proposition 45 Soit $u \in H^1(\Omega)$ alors il existe $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ tel que $u = \tilde{u}$ p.p

Définition 46 $H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|u\|_1}$

Proposition 47 : $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

Proposition 48. (Inégalité de Poincaré).
$\exists C > 0, \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_2 \leq C \|u'\|_2$

Proposition 49 ; Soit $a \in C^0([a,b])$ positive et $f \in L^2$. Il existe un unique $u \in H_0^1$ solution faible de $-u'' + au = f$

Proposition 50. Soit $p \in C^1(\bar{I})$ $\min p > 0$ $q \in C^0(\bar{I}) \geq 0$ et $f \in L^2(I)$. Alors il existe une unique solution faible à :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Proposition 51 Si $f \in C^0(\bar{I})$ alors la solution est solution forte

IV Espace de Schwartz

A. Définition

(5)

Définition 52 Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|$ et $\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ et $x^\alpha = \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i}$

Définition 53 On définit l'espace de schwartz par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^d \ \|x^\alpha \partial^\beta f\|_\infty < +\infty \}$$

Exemple 54 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Exemple 55 : $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi x)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$x \mapsto e^{-x^2} \sin(e^{x^2}) \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Proposition 56 : $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), +, \cdot, \times)$ est une algèbre sans unité stable par dérivation et par multiplication par un polynôme et par convolution.

Définition 57. On dit que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si pour tout (α,β) $\|x^\alpha \partial^\beta (f_n - f)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

B. Transformée de Fourrier dans l'espace de Schwartz.

Définition 58 : Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on définit sa transformée de Fourrier par $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$

Exemple 59 : $\forall a > 0$ $\widehat{e^{-ax^2}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$

Proposition : Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}(\partial^\beta f) = i^{|\beta|} \xi^\beta \mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(x^\beta f) = i^{|\beta|} \partial^\beta \mathcal{F}(f)$

Proposition 60 $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un homéomorphisme de plus pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\check{f} = (2\pi)^{-d} \hat{f}(-\cdot)$ et $\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$

Proposition 61 : $\forall (f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^2 \int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^d} g\hat{f}$ et $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

$\hat{f} \cdot \hat{g} = \widehat{fg}$

Proposition 62 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique fonction u qui vérifie :

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u(x,0) = f(x)$$

\DVP

- $x \mapsto u(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément par rapport à t ie

$$\forall T > 0 \ \forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \quad M_{k,\ell}^T := \sup_{|t| < T} \left\| x^k \frac{\partial^\ell u}{\partial x^\ell} \right\|_\infty < +\infty$$

u est donnée par $u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi$

Proposition 63 (Fourrier Plancherel) $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ s'étend de manière unique en un isomorphisme $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ qui vérifie $\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$ pour $f \in L^2$

Application 64 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

2.2 Leçon 203 : Utilisation de la notion de compacité.

J'ai volontairement fait cette leçon beaucoup trop dense pour me faire réviser plein d'applications possibles, le jour de l'oral j'aurai enlevé au moins 20 items. Dans les applications intéressantes que j'ai pas mises on peut aller chercher du coté des EDO (Th Sortie tout compact) ou des probabilités (Théorème de Helly et Prokhorov)

Références utilisées :

— (1) *Analyse* X.Gourdon
— (2) *Eléments d'Analyse Fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
— (3) *Algèbre Tome 2 Groupes* A.Szpirglas
— (4) *Oraux X-ENS Analyse 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec
— (6) *Eléments d'Analyse Réelle* JE.Rombaldi
— (7) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (8) *Analyse fonctionnelle* H.Brézis
— (9) *Analyse numérique et optimisation* G.Allaire

Utilisation de la notion de compacité.

203

(X,d) espace métrique, les evn sont sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I Définitions, propriétés élémentaires.

A. Définitions

(1) Définition 1 : X est dit compact si de toute suite de X on peut en extraire une sous-suite convergente.

(5) Application 2 : Soit E evn, si F sev fermé et G de dim finie alors F+G fermé.

Application 3 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $(O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ $M = OS$

(1) Proposition 4 : (Propriété de BL) X est compact ssi de tout recouvrement ouvert de X on peut en extraire un qui est fini.

(2) Application 5 Soit $f : X \to X$ localement lipschitzienne, alors f est globalement lipschitzienne

Application 6 : Un compact est séparable

(6) Application 7 : si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon 1 alors il existe un point z_0, $|z_0| = 1$ singulier sur le cercle d'incertitude.

(5) Définition 8 : On dit que X est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon > 0$

Proposition 9 : On a équivalence

i) X compact

ii) X précompact et complet.

Application 10 :

B. Propriétés élémentaires.

(1) Proposition 11 : Soit X compact $f : X \to Y$ continue. Alors f(X) est compact.

Corollaire 12 : Si $Y = \mathbb{R}$ f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 13 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue dérivable sur $]a,b[$ $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$, $f'(c) = 0$

Contre-exemple 14 : $f(t) = e^{it}$,



Application 15 : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé (simple) alors P' aussi.

Application 16 : (Tn) égalité des accroissements finis

Application 17 : Théorème limite de la dérivée.

(7)

(1) Théorème 18 : (Heine) Soit X compact $f : X \to Y$ continue alors f est uniformément continue.

Application 19 : Continuité des translations dans les L^p $p < +\infty$

(8) Proposition 20 : (X compact). Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ ayant une unique valeur d'adhérence. Alors $(x_n)_n$ converge.

Application 21 : Homéomorphisme décomposition polaire / QR.

Application 22 : $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ homéomorphisme

C. Compacité dans les evn

(1) Proposition 23 :

La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ est compacte.

Application 24 : Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Remarque 25 : Comme un evn de dim finie et isomorphe à $\mathbb{R}^n$, on a les mêmes résultats pour les evn de dim finie.

Corollaire 26 : Les compacts en dimension finie sont les parties fermées et bornées.

(5) Lemme 27 (Ries 2)

Soit E evn $F \subset E$ fermé $F \neq E$, alors il existe $x \in E$ $\|x\| = 1$ $d(x,F) \geqslant 1$.

Théorème 28 : (Ries 2)

La boule unité de E est compact ssi $\dim(E) < +\infty$.

(1) Application 29 : $H(\Omega)$ muni de la topologie uniforme sur tout compact n'est pas normable

I Compacité et point fixe

(1) Théorème 30: (Point fixe Picard). Supposes (X,d) complet et soit $f: X \to X$ contractante. Alors f admet un unique point fixe α et pour $u_0 \in E$ $u_{n+1} = f(u_n)$ on a:

$$d(u_n, \alpha) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_0, \alpha).$$

Application 31: Le Théorème de Cauchy-Lipschitz

Application 32: Le TiL

(4) Théorème 33: (Point fixe Kakutani). Soit $K \subset E$ evn K convexe compact et $H \subset \mathcal{L}(E)$ $\forall u \in H$ $u(K) \subset K$. Alors il existe $x \in K$ tel que $u(x) = x$ pour tout $u \in H$.

Application 34: Soit $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ compact, alors il existe une forme quadratique non dégénérée q telle que $G \subset O(q)$.

III Compacité dans les espaces de fonctions.

A. Généralités.

(2) Proposition 35: (Lemme de Dini 1). Soit X compact $f_n: X \to \mathbb{R}$ $f_n \leq f_{n+1}$ $f_n \xrightarrow{CVS} f$ f continue. Alors $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} f$.

Application 36: Il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes qui converge uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1,1]$.

(1) Proposition 37: (Lemme de Dini 2) Soit $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ croissante $f_n \xrightarrow{CVS} f$ f continue. Alors $f_n \xrightarrow{CVU} f$.

Application 38: Théorème de Glivenko-Cantelli

(2) Théorème 39: (Stone-Weierstrass) Toute sous-algèbre de $C^0(X,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^0(X,\mathbb{R})$.

Application 40: (Weierstrass) Toute fonction continue $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes.

(2) Application 41: La transformée de Laplace est injective sur les fonctions continues bornées.

Application 42: Les polynômes trigonométriques sont dense dans l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques.

B. Critère de compacité.

(2) Théorème 43: (Ascoli). Soit E compact F complet et $A \subset C^0(E,F)$, alors

$\bar{A}$ compact $\iff$ $\begin{cases} \forall x \in E \quad A_x := \{f(x) \mid f \in A\} \text{ borné} \\ A \text{ équicontinue.} \end{cases}$

Application 44: Théorème de Cauchy-Arsela-Peano.

Application 45: $T: C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ est compact, $f \longmapsto (x \mapsto S_0^x f)$

Théorème 46: (Riesz-Fréchet Kolmogorov)

Application 47: (Ω borné) L'injection $i: H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.

IV Compacité faible

(1,10) H est un Hilbert

Définition 48: On dit $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x et on note $x_n \rightharpoonup x$ si $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ pour tout y

Proposition 49: Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(x_n)_n$ est bornée

Théorème 50: Soit $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors on peut extraire une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge faiblement. DVP 1

Proposition 51: Soit $J: H \to \mathbb{R}$ convexe coercive continue alors J atteint son minimum.

Application 52: Soit $f \in L^2(0,1)$ et $p > 0$. Il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ solution faible de

$-u'' + u|u|^{p-1} = f$.

V Opérateurs compacts et théorie spectrale

E est un Banach et H un Hilbert.

A. Opérateurs compacts.

(21)

Définition 53 On dit que $T \in \mathcal{L}(E)$ est compact si $\overline{T(B_E)}$ compact. On note $K(E)$ l'ensemble des opérateurs compacts

Exemple 54 Tout opérateur de rang fini est compact.

Exemple 55 Soit $k : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ continue et

$$T : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$$
$$f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 f(y) k(x,y)\, dy\right)$$

Proposition 56 Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, alors $T \in K(E)$ ssi pour toute suite $(x_n)_n$ bornée $(Tx_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.

Proposition 57 : $K(E)$ est fermé et idéal bilatère de $\mathcal{B}(E)$.

Proposition 58 : $T \in K(H)$ est limite d'opérateurs de rang fini.

Théorème 59 : (Alternative de Fredholm). Soit $T \in K(E)$ alors : $\ker(I-T)$ de dim finie, $\mathrm{Im}(I-T)$ fermé et

$I-T$ injectif $\iff$ $I-T$ bijectif.

Application 60 : Soit $(e_n)_n$ BH de H. Soit $(y_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ vérifiant

- $\forall i$ $y_i \notin \overline{\mathrm{Vect}\{y_n / n \neq i\}}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \|y_n - e_n\|^2 < +\infty$

Alors $(y_n)_n$ famille totale de H.

OVP 2

B. Spectre d'un opérateur compact.

(2)

Définition 61 : Soit $T \in \mathcal{B}(E)$ on note :

$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T$ non inversible$\}$.

$\mathrm{Vp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T$ non injectif$\}$

Proposition 62 : $\mathrm{Vp}(T) \subset \sigma(T)$, $\sigma(T)$ compact $\subset \overline{B(0, \|T\|)}$

Exemple 63 : Si T est l'opérateur de l'exemple 45 alors $\sigma(T) = \{0\}$ $\mathrm{Vp}(T) = \emptyset$.

Proposition 64

Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ autoadjoint $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$

- $\sigma(T) \subset [m, M]$ $(m, M) \in \sigma(T)^2$

Proposition 65

Soit $T \in K(E)$ E de dim infinie

- $0 \in \sigma(T)$
- $\mathrm{Vp}(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$
- $\sigma(T)$ dénombrable, s'il est infini alors $\sigma(T) = \{\lambda_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$ $\lambda_n \to 0$.

Théorème 66

Soit $T \in K(H)$ autoadjoint, H séparable alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T

(29)

VI Espace de Sobolev

Soit $\Omega =]0,1[$

Définition 67 On pose $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \exists g \in L^2(\Omega),\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega g\varphi\}$. g est alors unique et on le note u'.

Proposition 68 $H^1(\Omega)$ est un Hilbert pour $\|u\|_{H^1} = \|u\|_2 + \|u'\|_2$

Proposition 69 : Soit $u \in H^1(\Omega)$ alors il existe $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ telle que $u = \tilde{u}$ p.p

Définition 70 $H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$

Proposition 71 : $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

Proposition 72. (Inégalité de Poincaré).

$\exists C > 0$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ $\|u\|_2 \leq C \|u'\|_2$

Proposition 73 Soit $\alpha \in C^0([0,1])$ positive et $f \in L^2$. Il existe un unique $u \in H_0^1$ solution faible de $-u'' + \alpha u = f$

Proposition 74 On note $T : L^2 \to H_0^1$ $f \mapsto u$ et $i : H_0^1 \to L^2$ alors $i \circ T$ est compact.

Proposition 75 Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_n$ de L^2 et des réels $(\lambda_n)_n$ avec $\lambda_n \to +\infty$ et

$$-e_n'' + \alpha e_n = \lambda_n e_n$$

2.3 Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications.

Références utilisées :

- (1) *Analyse* X.Gourdon
- (2) *Topologie* H.Queffélec
- (3) *Equations différentielles* F.Berthelin
- (4) *Analyse complexe* E.Amar E.Mathéron
- (5) *Oraux X-ENS Algèbre 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (6) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Connexité : Exemples et applications

204

I Généralités

A - Définition

Soit (X, τ) un espace topologique

Proposition 1 : Les assertions suivantes sont équivalentes
i) Il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides
ii) Il n'existe pas de partition de X en deux fermés non vides
iii) Les seules parties ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X

Définition 2 : Un espace topologique vérifiant une des conditions précédente est dit connexe.

Exemple 3 : $(X, \{\emptyset, X\})$ est connexe.

Définition 4 : Soit $A \subset X$. On dit que A est connexe si A est connexe pour la topologie induite par X.

Proposition 5 : Les assertions suivantes sont équivalentes ($A \subset X$)
i) A connexe
ii) $A \subset O_1 \cup O_2$ O_1, O_2 ouverts de X $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ alors :
$$A \cap O_1 = \emptyset \text{ ou } A \cap O_2 = \emptyset$$
iii) $A \subset F_1 \cup F_2$ F_1, F_2 fermés de X $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ alors
$$A \cap F_1 = \emptyset \text{ ou } A \cap F_2 = \emptyset$$

Proposition 6 : X est connexe ssi toute application $f : X \to \{0,1\}$ est constante

B - Théorème de Stabilité

X et Y sont deux espaces topologiques

Proposition 7 :
Si $(A_i)_{i \in I}$ sont tous connexes et $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ connexe
Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ connexe et $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ connexe

Contre-Exemple 8 : Cercle et ellipse qui se croisent en deux points distincts.

Proposition 9 : Soit $f : X \to Y$ continue. Si X connexe alors $f(X)$ aussi connexe. (Faux pour l'image réciproque en général).
Si $A \subset X$ connexe et $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B connexe
Exemple $[0,1]$ connexe.

Proposition 10 :
Soit $(X_i)_{i \in I}$ ensemble $\prod_{i \in I} X_i$ connexe ssi tous les X_i le sont

C. Composantes connexes

Définition 11 : Sur X on considère la relation $\sim$ par
$$x \sim y \iff \exists C \subset X \text{ connexe } x \in C \text{ } y \in C$$

Proposition 12 : $\sim$ est une relation d'équivalence.

Définition 13 : pour $x \in X$ $\bar{x}$ s'appelle composante connexe de X.

Proposition 14 :
- X est connexe ssi il n'a qu'une seule composante connexe
- Les composantes connexes sont fermées, si elles sont en nombre fini, elles sont en plus ouvertes.

Contre-Exemple 15 : $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$

Application : caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$

D Connexité par arcs

Définition 16 : On dit que X est connexe par arc (cpa) si $\forall (x,y) \in X^2$ $\exists \gamma : [0,1] \to X$ continue, $x = \gamma(0)$ $y = \gamma(1)$.

Exemple 17 : Un convexe est cpa

Proposition 18 Un ensemble cpa est connexe.

Remarque 19 La réciproque est fausse, considérer $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\}$?

Proposition 20 : Si $U \subset E$ ouvert d'un evn alors X est connexe ssi il est connexe par arcs.

II Application de la connexité à l'analyse

A. Analyse réelle.

(1)

Proposition 21 (Caractérisation des connexes de $\mathbb{R}$)
Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$

Exemple 22 $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe

Théorème 23 (Valeur intermédiaire)
Soit $f: I \to \mathbb{R}$ continue où $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. Alors $f(I)$ intervalle

Application 24 Soit $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle. (Darboux)

Lemme 25 Soit X, Y deux espaces topologiques homéomorphes alors X est connexe ssi Y l'est.

Application 26 $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Proposition 27 Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$
Alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(u_n)_n$ est un intervalle.

Application 28 Soit $u_{n+1} = f(u_n)$ où f continue bornée. Alors $(u_n)_n$ converge ssi $u_{n+1} - u_n \to 0$.

B. Passage du local au global

rappel

Proposition 29 Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ différentiable
$df = 0$. Alors f constante.

Contre-exemple $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

(3)

Théorème 30 Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne si on a deux solutions $\varphi_1, \varphi_2: I \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x)$ qui coïncident en $t_0 \in I$ alors elles coïncident partout. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 dilatante est un C^1 difféo. ← Hadamard-Levy. DVP 1

C Analyse complexe

(5)

On se donne Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, on note $H(\Omega)$ l'ensemble des holomorphes sur Ω.

(5)

Proposition: il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

(5)

Théorème 31 (Principe des zéros isolés)
Soit $f \in H(\Omega)$ non nulle alors les zéros de f sont isolés.

Théorème 32 (Prolongement analytique).
Soient $f, g \in H(\Omega)^2$ et $E \subset \Omega$ tel que E ait un point d'accumulation dans Ω. Alors si $f|_E = g|_E$ $f = g$ sur Ω

Application 33
$\forall \mathrm{Re}(a) > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - ix\xi} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

Corollaire 34: $H(\Omega)$ intègre.

(5)

Application 35: Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en $-n$ $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 36: $\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

Application 37: $\frac{1}{\Gamma}$ se prolonge en une fonction entière.

Application 37 La fonction $s \mapsto \xi(s)$ se prolonge en une méromorphe sur $\mathbb{C}$. Avec un pôle simple en 1. Pour $s \notin \{0, 1\}$

$$\xi(s)\, \pi^{\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \xi(1-s)\, \pi^{\frac{1-s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$$

Remarque 38 $\mathrm{Res}(\xi, 1) = 1$

Définition 39:

Indice d'un lacet, construit sur les copains, c'est un entier

Cf 245

(5)

Corollaire 42 Soit $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $|f|$ admette un maximum local au voisinage de $z_0 \in \Omega$. Alors f est constante

Corollaire 43 Soit $f \in H(\Omega)$ non constante telle que $|f|$ admette un minimum local sur Ω. Alors ce minimum est nécessairement nul.

Application 44 (Théorème de D'Alembert-Gauss)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, alors P admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 45 Soit $f \in H(\Omega)$ alors f ouverte.

Théorème 46 (Principe du maximum).
Ω non nécessairement connexe mais borné. Soit $f \in H(\Omega)$ $f \in C(\bar{\Omega})$ alors pour $z \in \Omega$ $|f(z)| \leq \sup\{|f(\xi)| / \xi \in \partial\Omega\}$ avec inégalité stricte si Ω connexe et f non constante.

Application 47. (Lemme de Schwarz)
Soit f holomorphe sur $\mathbb{D} = \{z / |z|<1\}$ vérifiant $f(0)=0$ et $|f(z)| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$.
- On a $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$ et $|f'(0)| \leq 1$
- Si $|f(0)| = |a|$ pour $a \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$ alors $f = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{U}$.

Application: 48 Automorphisme du disque unité + Théorie d'inversion holomorphe

III Connexité et algèbre linéaire

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E $\mathbb{K}$ ev de dim $n \in \mathbb{N}^*$

A. Groupes linéaires et sous groupes

(6)

Proposition 49 Le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

Théorème 50 $\forall A \in GL_n(\mathbb{C})$ $\exists P \in \mathbb{C}[X]$, $A = e^{P(A)}$

Corollaire 51 $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2 / A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

Proposition 52 Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) / \det(M) > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

Proposition 53 $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

(6)

B. Groupes orthogonaux et sous-groupes

Proposition 54 $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

Proposition 55 $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs.

Application 56 Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple) 02

(7)

Remarque 57: $SO_n(\mathbb{R})$ simple pour n impair pas simple si n pair.

C. Autres parties remarquables

Proposition 58: l'ensemble des endomorphismes cycliques de E est un ouvert dense connexe par arcs

Application 59:

Proposition 60: Soit $S_r = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / rg(M) = r\}$ alors $\bar{S_r} = \bigcup_{i=0}^{r} S_i$

Application 61: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\dim(\mathcal{C}(f)) \geq n$ où $\mathcal{C}(f)$ est le commutant de f

2.4 Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Un plan pas très original mais efficace (testé et approuvé).

<u>Références utilisées :</u>

— (1) *Topologie* H.Queffélec
— (2) *Analyse* X.Gourdon
— (3) *Oraux X-ENS Analyse 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Analyse Fonctionnelle* H.Brézis
— (5) *Eléments d'Analyse Fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
— (6) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (7) *Chemin d'Analyse Tome 1* D.Chiron
— (8) *Théorie de l'intégration* M. Briane G.Pagès

205

Espaces complets. Exemples et applications.

Soit (X,d) un espace métrique

I Espaces complets

A. Généralités

(1)

Définition 1: On dit que $(x_n)_n$ est de cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall p,q \geq n_0 \ d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Proposition 2: Si $(x_n)_n$ est de cauchy et admet une valeur d'adhérence alors $(x_n)_n$ converge.

Proposition 3: Soit (Y,d') un autre em et $f: X \to Y$ uniformément continue et $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ de cauchy. Alors $(f(x_n))_n$ est de cauchy dans Y.

Remarque 4: La continuité de f ne suffit pas: $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_n = \frac{1}{n}$

Remarque 5: La notion de suite de cauchy est purement métrique, $\mathbb{R}$ muni de $d_1(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ donne la même topologie que la métrique usuelle mais elles n'ont pas les mêmes suites de cauchy.

(1)

Définition 6: (X,d) est dit complet si toute suite de cauchy de X est convergente dans X.

Exemple 7: $B(E,\mathbb{R})$ les fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$ est complet pour $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$

Proposition 8: Soit (X,d) complet et $A \subset X$ alors

$$A \text{ complet} \iff A \text{ fermé}$$

Proposition 9: Soit $f: X \to Y$ isométrie, si X est complet alors $f(X)$ aussi.

Proposition 10: (Complété d'un em) Il existe $(\hat{X}, \hat{d})$ un em complet et $i: X \to \hat{X}$ isométrie telle que $i(X)$ dense dans $\hat{X}$. Un tel $\hat{X}$ est appelé complété de (X,d)

(1)

Exemple 11: Un complété des suites à support fini pour la distance associée à $\|\cdot\|_\infty$ est l'ensemble des suites tendant vers 0.

B. Théorèmes fondamentaux métrique

(1)

Théorème 12: (Point fixe Picard). Soit (X,d) complet et $f: X \to X$ k-contractante. Alors f admet un unique point fixe $a \in X$. De plus pour $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ on a:

$$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, a)$$

(6)

Application 13: Théorème de Cauchy-Lipschitz global

(2)

Application 14: Théorème d'inversion local

Remarque 15: Toutes les hypothèses sont importantes

(1)

Théorème 16: (Prolongement applications uniformément continues) Soit X, Y deux em complets $A \subset X$ dense et $f: A \to Y$ uniformément continue alors f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue $g: X \to Y$.

Application 17: La complété d'un em est unique à isométries près

(7)

Application 18: L'application $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ se prolonge de manière unique en une application $\mathcal{FP}: \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ qui vérifie:

$$\forall f \in \mathcal{L}^2 \quad \|\mathcal{FP}(f)\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

(2)

Application 19: Construction de l'intégrale de Riemann.

(2)

Théorème 20: (Baire) Soit (X,d) complet et $(O_n)_n$ une suite d'ouverts denses dans X. Alors $\bigcap_{n \geq 0} O_n$ est dense dans X

(2) Si $(F_n)_n$ fermés d'intérieurs vides de X alors $\bigcup_{n\geq 0} F_n$ est d'intérieur vide.

(3) Application 21 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $x \geq 0$ $f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $f \to 0$.

(2) Application 22 : L'ensemble des fonctions continues dérivables nulles part est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ par la $\|.\|_\infty$.

DVP 1

II Les evn complets : Les Banachs

A. Définitions, généralités.

(4) Définition 23 : Un evn complet pour la distance associée à sa norme est un espace de Banach

Exemple 24 : $\ell^p(\mathbb{N})$ muni de $\|.\|_p$ est un Banach

Exemple 25 : Un evn de dim finie est un Banach

Proposition 26 : F Banach $\Rightarrow$ $B(E,F)$ Banach où
$$B(E,F) = \{ T \in \mathcal{L}(E,F) \mid T \text{ continu} \}$$

Proposition 27 : E est un Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.

Application 28 : $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ est bien définie pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(8) Théorème 29 : (Riesz-Fischer).

DVP 2

B. Conséquences du théorème de Baire en analyse fonctionnelle.

(2) Proposition 30 : Un evn admettant une base dénombrable est complet pour aucune norme.

Exemple 31 : $\mathbb{R}[X]$

Théorème 32 : (Banach-Steinhaus) Soit E un Banach F un evn. Soit $(T_i)_{i\in I} \in B(E,F)^I$. On suppose que pour tout $x \in E$ $(T_i(x))_i$ est bornée. Alors $\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$

Application 33 : Il existe une fonction 2π-périodique continue dont la série de Fourier diverge en 0.

(4) Théorème 34 : (Application ouverte). Soient E, F deux Banachs et $T \in B(E,F)$ surjective alors il existe $c>0$ tel que $B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$

Application 35 : Soit E Banach de dim infinie. Alors $I : E \to E$ n'est pas un opérateur compact.

Théorème 36 : (Isomorphisme Banach). Soient E, F deux Banachs et $T \in B(E,F)$ inversible alors $T^{-1} \in B(F,E)$

Application 37 : $L^1 \to C_0(\mathbb{Z})$ n'est pas surjective
$$f \mapsto (c_n(f))_n$$

Application 38 : $L^1 \to C_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective
$$f \mapsto \hat{f}$$

(4) Application 39 : Soit E un Banach pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ si $\|.\|_1$ est plus fine que $\|.\|_2$ alors les deux normes sont équivalentes.

Contre-Exemple 40 : $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ $T : E \to E$
$$u \mapsto \left(\frac{u_n}{n+1}\right)_n$$

(4) Théorème 41 : (Graphe fermé). Soit E, F Banachs et $T \in B(E,F)$ On suppose $G(T) = \{(x,Tx) \mid x \in E\}$ fermé. Alors $T \in B(E,F)$

Application 42 : Soit H Hilbert si $(T,S) \in \mathcal{L}(H)^2$ vérifient

(4)

$\forall (x,y) \in H^2 \quad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ alors $S, T \in \mathcal{B}(H)$.

Contre-Exemple 43 : $E = C^0([0,1])$ $F = C^1([0,1])$ les deux munis de $\|.\|_\infty$ et $T : f \mapsto f'$.

III Le cas des Hilberts.

A. Généralités

(5)

Définition 44 : Un Hilbert est un evn complet dont la norme provient d'un produit scalaire.

Exemple 45 : $(L^2(\Omega), \langle\rangle)$ est un Hilbert.

Proposition 46 : Une norme provient d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme.

Exemple 47 : $C^0([0,1])$ n'est pas un Hilbert

Proposition 48 : (Inégalité de Cauchy - Schwarz). Soit H pré-hilbertien alors :

$$\forall (x,y) \in H^2 \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

B. Théorème de projection et conséquences

(5)

Théorème 49 : Soit H Hilbert et $C \subset H$ convexe fermé non vide de H. Alors pour $x \in H$ il existe un unique $P_C(x) \in C$ tel que $d(x,C) = \|x - P_C(x)\|$. De plus,

- P_C est 1-lipschitzienne
- $P_C(x)$ caractérisé par $\begin{cases} y \in C \\ \forall z \in C \quad \mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0 \end{cases}$
- Si C sev fermé de H alors $P_C(x)$ caractérisé par $y \in F \quad x - y \perp F$.

Contre-Exemple 50 : Le théorème est faux si H pas un Hilbert : $E = C^0([0,1])$ avec $\|.\|_\infty$ et $C = \{f \in E / f(0) = 0\}$

Application 51 : (Théorème supplémentaire orthogonal).

Soit $F \subset H$ sev fermé alors $H = F \oplus F^\perp$

(5)

Corollaire 52 : (Critère de densité dans un Hilbert). Soit $F \subset H$ un sev de E, alors F dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

Contre-exemple 53 : $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ $f : E \to \mathbb{R}$ alors $E \neq \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp$ $\quad u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}$

Théorème 54 : (Représentation de Riesz) Soit H Hilbert alors $\Phi : H \to H'$ est une isométrie

$$x \mapsto (y \mapsto \langle y, x\rangle)$$

(4)

Application 55 : (Adjoint d'un opérateur borné). Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ il existe un unique $T^* \in \mathcal{B}(H)$ appelé adjoint de T tel que

$$\forall (x,y) \in H^2 \quad \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

Application 56 : $I =]0,1[$ Soit $p \in C^1(\bar{I})$ $p > 0$ $q \in C^0(\bar{I})$ $q \geq 0$ alors il existe un unique $u \in C^2(\bar{I})$ tel que :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & f \in C(\bar{I}). \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

C. Convergence faible dans un Hilbert

Définition 57 : Soit H Hilbert. On dit que $(x_n)_n \in H$ tend faiblement vers x et on note $x_n \rightharpoonup x$ si :

$$\forall y \in H \quad \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$$

Proposition 58 : Si $x_n \to x$ $\quad x_n \rightharpoonup x$

Exemple 59 : Si $x_n \to x$ alors $(x_n)_n$ bornée.

DVP 3

Proposition 60 : Soit $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ bornée alors $(x_n)_n$ admet une sous suite faiblement convergente.

Application 61 : Soit $J : H \to \mathbb{R}$ continue convexe coercive alors J atteint son minimum.

Application 62 :

Soit $f \in L^2(0,1)$, $\exists ! u \in H_0^1(0,1)$, $-u'' + u|u|^{p-1} = f$

2.5 Leçon 206 : Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse.

Utilisation de la dimension finie en analyse.

206

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Topologie en dimension finie.

E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie

Proposition 1: Toutes les normes sur E sont équivalentes

Application 2: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $Sp(A) \subset \{Re(z) < -\delta\}$ avec $\delta > 0$ alors $\|e^{tA}\| = o(e^{-\delta t})$.

Contre-exemple 3: C'est faux en dim infinie, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes sur $C^0([0,1])$.

Proposition 4: Les compacts de E sont les fermés bornés.

Application 5: $O_n(\mathbb{R})$ est compact

Application 5: Si $J: E \to \mathbb{R}$ coercive alors J admet un minimum

Application 6: On a un homéomorphisme $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq GL_n(\mathbb{R})$

Application 7: Théorème cauchy-Peano.

Contre-exemple 8: Dans $C_0(\mathbb{R})$ le problème : $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ où $f(x) = \left(\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}\right)_n$ n'admet pas de solution

Proposition 9: Toute application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où F evn est continue.

Application 10:

Théorème 11: (Riesz) Un evn est de dimension ssi sa boule unité est compacte.

Application 12: Si $\dim(E) = +\infty$ et $T: E \to E$ est compact alors T n'est pas surjectif.

Proposition 13: Tout evn de dim finie est complet

Application 14: $A \mapsto \exp(A) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Contre-exemple 15: $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

II Calcul différentiel en dimension finie

A. Calcul différentiel

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

Définition 16: On définit la jacobienne de f en $a \in U$ par

$$Jac(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

Remarque 17: Pour vérifier si $df(a)$ inversible il suffit de vérifier $\det(Jac(f)) \neq 0$.

Application 18: (Changement de coordonnées polaires).

L'application $\varphi:]0,+\infty[\times]0, \frac{\pi}{2}[\to]0,+\infty[^2$ est

$(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

un C^1 difféo-morphisme.

Application 19: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Définition 20: On dit que $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous variété de dim p si : $\forall x \in M$ $\exists V \in Vois(x)$, $\exists \varphi: M \to \varphi(M)$ C^∞ difféomorphisme, $\varphi(M \cap V) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap \varphi(M)$.

Proposition 21: Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) M est une sous variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

ii) Pour tout $x \in M$ il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a et $g: U \to \mathbb{R}^{n-p}$ C^∞ submersion et $U \cap M = g^{-1}(0)$

iii) Pour tout $x \in M$ il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x, Ω un ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $h: \Omega \to \mathbb{R}^n$ immersion tel que $h: \Omega \to U \cap M$ homéomorphisme

iv) Pour tout $x \in M$ il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant x un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(x_1, \dots, x_p)$ et une application lisse $G: V \to \mathbb{R}^{n-p}$ tels que après éventuelle permutation des coordonnées: $U \cap M = \{(y, G(y)) \mid y \in V\}$

Définition 22 : Soit M une sous-variété de dim p on définit $T_x M = \{\gamma'(0) / \gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to M \ C^1 \ \gamma(0) = x\}$.

Proposition 23 : $T_x M$ est un sev de dim p et avec les notation précédente on a :
$T_x M = \ker(dF(x)) = d\varphi(x)(\mathbb{R}^p \times \{0\})$

Théorème 24 : (Extremas liés) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ C^1. Soit $X = \{x \in U / g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$
Si $f : X \to \mathbb{R}$ admet un extremum en $a \in X$ et si $(dg_i(a))_i$ libre alors $df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_i(a)$ DVP 1

Application 25 : Théorème spectral.

B. Equations différentielles.

Théorème 26 : (Cauchy linéaire). Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $A \in C^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et $b \in C^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ continues, alors le problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ admet une unique solution globale.

Proposition 27 : Soit S_E (resp S_H) l'ensemble des solutions de $Y' = A(t)Y + b$ (resp. $Y' = A(t)Y$) alors S_H est un sev de dim n et S_E sca de dim n dirigé par S_H.

Définition 28 : Pour $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S_E$ on définit leur wronskien par $W(t) = \det_{BC}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$. $\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))\,ds$

Proposition 29 : $W(t) = W(t_0)\, e$.

Application 30 : Soit $q \in C^0(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ alors $y'' + qy = 0$ admet des solutions non bornées

Application 31 : Théorèmes de Sturm

Théorème 32 : (Lyapunov). Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $f(0) = 0$ DVP 2
Si $A := Jac(f)(0)$ vérifie $Sp(A) \subset \{Re(z) < 0\}$ alors 0 est équilibre asymptotique stable de $y' = f(y)$

Exemple 33 : (Pendule de Van-der-pol). Soit $\varepsilon < 0$ alors 0 est asymptotiquement stable pour $x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$.

III Approximation en dimension finie

A. Séries de Fourier

Cf 246.

- Calcul
- Fejer + conséquences
- Lien décroissance chola
- $\zeta(2k)$, Sums Gauss, coten
- Poisson
- EOP Cholesky

B. Interpolation polynômiale et intégration numérique

cf 236.

IV Opérateurs compacts

A. Opérateurs compacts

cf 213

- Def op compact notation $K(E)$
- Ex op de rang fini * op à noyaux
- $K(E)$ ser ferré + idéal bilatère de E

- H Hilbert T compact $\Rightarrow$ T limite d'op de rang fini
- Alternative Fredholm
- Application

) DVP 3.

B. Etude spectrale opérateurs compacts.

- Def $Vp(T)$, $\sigma(T)$, $p(T)$ + pap élémentaires
- ex
- $T \in K(E)$ $Vp(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$
- $0 \in \sigma(T)$
- D2 opérateurs compacts
- ct BH de C^1 qui vérifie ue EDO.

2.6 Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Je pense que parler de reflexivité offre une ouverture de bon niveau mais n'est pas nécessaire du tout.

Références utilisées :

— (1) *Analyse* X.Gourdon
— (2) *Analyse Fonctionnelle* H.Brézis
— (3) *Eléments d'Analyse Fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
— (4) *Oraux X-ENS Analyse 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples.

2008

E est un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Premières définitions, propriétés élémentaires

A. Espaces vectoriels normés.

Définition 1: Une norme sur E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie:
i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in E\ \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
iii) $\forall (x,y) \in E^2\ \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemple 2: $(\ell^p, \|.\|_p)$, $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ $(\mathbb{R}, |.|)$

Proposition 3: Si $\|.\|$ est une norme sur E alors $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance sur E.

Définition 4: On dit que N_1 est plus fine que N_2 s'il existe $c > 0$ tel que $N_2 \leq c N_1$. Si chacune est plus fine que l'autre on parle de normes équivalentes.

Exemple 5. $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ sont 2 à 2 non équivalentes sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

Remarque 6: Deux normes équivalentes définissent la même topologie.

B. Application linéaires continues.

(1)

Définition 7: $f : E \to F$ est dite linéaire si $\forall (x,y) \in E^2$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble de ces applications.

Proposition 8: Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:
i) f continue ii) f continue en 0 iii) f bornée sur B_E iv) f bornée sur S_E v) $\exists M > 0$, $\forall x \in E\ \ \|f(x)\| \leq M \|x\|$.

Exemple 9: $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ $P \mapsto P'$ est discontinue pour $\|P\| = \sup |a_n|$ mais continue pour $\|P\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$
Il est donc important de bien préciser la norme quand on parle de continuité.

Proposition 10: Si $\dim(E) < +\infty$ alors tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue.

Définition 11: On note $\mathcal{B}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \to F$ continues. Pour $f \in \mathcal{B}(E,F)$ on pose:

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$$

Proposition 12: $(\mathcal{B}(E,F), |||.|||)$ est un evn. On appelle $|||.|||$ norme subordonnée, elle est sous multiplicative.

Exemple 13: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $|||A|||_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
$|||A|||_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$

Remarque 14: Il n'existe pas forcément $x \in E$ $\|x\| = 1$ tel que $\|f(x)\| = |||f|||$. $E = \ell^1$ $f(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n}) u_n$

C. Le cas de la dimension finie

Théorème 15: On suppose E de dim finie. Alors toutes les normes de E sont équivalentes.

Remarque 16: Faux si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

Remarque 17: La réciproque de 15 est vraie

Proposition 18: Soit $F \subset E$ un sev de dim finie. Alors F est fermé.

Théorème 19: (Riesz) E est de dimension finie ssi B_E compact.

Exemple 20: $E = C^0([0,2\pi])$ $e_n(t) = e^{int}$ $\|e_n - e_m\|_2 = 1$

Application 21: Si $\dim E = +\infty$ alors Id_E n'est pas un opérateur compact.

Proposition 22: Si $\dim(E) < +\infty$ alors les compacts de E sont les fermés bornés de E.

Application 23: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ coercive, alors f admet un minimum global.

II Espaces de Banach

A. Généralités.

Définition 23: On dit que $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est de cauchy si :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq n_0 \quad \|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

Proposition 24: Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy.
- $(x_n)_n$ borné
- Si $(x_n)_n$ admet une va alors $(x_n)_n$ converge
- Si $f: E \to F$ uniformément continue alors $(f(x_n))_n$ de cauchy.

Définition 25 : On dit que E est un Banach si toute suite de cauchy de E est convergente.

Exemple 26: Tout espace de dim finie est un Banach.
$(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.

Proposition 28: E est un Banach ssi toute série absolument convergente de E est convergente

Théorème 27 : (Riesz-Fischer) L'espace $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet $p \in [1, +\infty]$.

Proposition 29: Soit E un Banach et $F \subset E$ inclus. Alors:
F Banach $\Leftrightarrow$ F fermé.

Proposition 30: (Point fixe Picard) Soit $f: E \to E$ contractante.
Alors f admet un unique point fixe.

Application 31: Théorème Cauchy-Lipschitz.

Application 32: Théorème d'inversion locale

B. Lemme de Baire et conséquence

Théorème 32: Soit (X,d) un espace métrique complet et $(O_n)_n$ une suite d'ouverts denses dans X. Alors $\bigcap_{n \geq 0} O_n$ est dense dans X.

Remarque 33: On a la formulation équivalente suivante:
Si $(F_n)_n$ est une suite de fermés d'intérieur vide alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide

Application 34: $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme

Application 35: L'ensemble des fonctions continues nulles part dérivables sont denses dans l'ensemble des fonctions continues $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème 37: (Banach-Steinhaus)
Soit $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{C}B(E,F)^I \in$ Banach. Alors :
$\exists x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i x\| = +\infty$ où $\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$

Application 38. Il existe $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue dont la série de Fourier diverge en 0.

Théorème 39: (Application ouverte) Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$
E, F Banachs et T surjective. Alors :
$\exists c > 0, B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$

Application 40: Si $\dim E = +\infty$ E Banach et $T: E \to E$ compact, alors T n'est pas surjectif.

Théorème 41: (Isomorphisme de Banach) Soit E, F deux Banachs et $T: E \to F$ continue bijective. Alors $T^{-1} \in \mathcal{B}(E,F)$

Application 42: $\mathcal{F}: L^1 \to C_0$ n'est pas surjective.
$f \mapsto (c_n(f))_n$ idem pour $f \mapsto \hat{f}$

Application 43 : Si E Banach pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$ alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Contre Exemple 44: $T: C^0 \to C^0$
$(u_n) \mapsto \left(\frac{u_n}{n+1}\right)_n$

Définition 45: Pour $T \in \mathcal{B}(E,F)$ on définit le graphe de T par $G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in E\}$

Proposition 46: $T \in \mathcal{B}(E,F)$ ssi $G(T)$ fermé.

Application 47: Si $S, T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ pour tout $(x,y) \in H^2$. Alors T et S continues.

Contre-Exemple 48 : $E = C^1$ $F = C^0$ avec $\|\cdot\|_\infty$ $T = f \mapsto f'$

III Espaces de Hilberts

A. Généralités

(3)

Définition 49 : Un espace préhilbertien complet pour son produit scalaire est appelé espace de Hilbert.

Exemple 50 : $(L^2, \langle , \rangle_2)$ est un Hilbert.

Théorème 51 : Soit H Hilbert et $C \subset H$ convexe fermé non vide de H. Alors pour $x \in H$ il existe un unique $P_C(x) \in C$ tel que $d(x,C) = \|x - P_C(x)\|$. De plus,

- P_C est 1 lipschitzienne
- $P_C(x)$ caractérisé par $\begin{cases} y \in C \\ \forall z \in C \ \ Re(\langle x-y, z-y \rangle) \leq 0 \end{cases}$
- Si C sev fermé de H alors $P_C(x)$ caractérisé par $y \in C \quad x - y \perp C$.

Contre Exemple 52 : $C = \{ 0 \leq f \leq 1 \ / \ f(0) = 0 \}$ $E = C^0([0,1], \|.\|_\infty)$

Proposition 53 : (Théorème supplémentaire orthogonal). Soit $F \subset H$ un sev fermé alors $H = F \oplus F^\perp$

Application 54 : Soit $F \subset H$ sev de H, alors F dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$

Proposition 55 : (Polynômes orthogonaux) Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $\int_I \rho(x) e^{\alpha |x|} < +\infty$ pour $\alpha > 0$. Alors la suite des polynômes orthogonaux associée à $\langle f, g \rangle = \int_I fg\rho$ est une base Hilbertienne de $L^2(\rho)$.

Exemple 56 : $\rho(x) = e^{-x^2}$ on obtient une BH de $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 57 : (Représentation Riesz) Soit H un Hilbert alors $\Phi : H \to H'$, $x \mapsto (y \mapsto \langle y, x \rangle)$ est une isométrie surjective.

Application 58 : Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{B}(H)$ appelé adjoint de T tel que : $\forall (x,y) \in H^2 \ \ \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$

Exemple 59 : $T_K : f \mapsto (x \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(y) dy)$ alors $T_K^* = T_{K^*}$ avec $K^* = \overline{K(y,x)}$

B Convergence faible dans un Hilbert.

Définition 57 : Soit H Hilbert. On dit que $(x_n)_n \in H$ tend faiblement vers x et on note $x_n \rightharpoonup x$ si :

$$\forall y \in H \ \ \langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$$

Proposition 58 : Si $x_n \to x$ alors $x_n \rightharpoonup x$

Exemple 59 : Si $(e_n)_n$ Base Hilbertienne de H alors $e_n \rightharpoonup 0$ mais $e_n \not\to 0$

DVP

Proposition 60 : Soit $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ bornée alors $(x_n)_n$ admet une sous suite faiblement convergente.

Application 61 : Soit $J : H \to \mathbb{R}$ continue convexe coercive alors J atteint son minimum.

Application 62 : Soit $p > 1$. Il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(0,1)$ telle que $-u'' |u|^{p-1} + u = f$ où $f \in L^2(0,1)$

IV Opérateurs compacts

Définition 61 : $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit compact si $\overline{T(B_E)}$ compact on note $K(E)$ l'ensemble de ces opérateurs.

Exemple 62 : $K \in C^0([0,1]^2)$ T_K est compact

Proposition 63 : $K(E)$ sev et idéal bilatère de $\mathcal{B}(E)$.

Proposition 64 : Soit H Hilbert, alors tout opérateur compact est limite d'opérateurs de rang fini.

Application 65 : $T_w : \ell^2 \to \ell^2$, $a \mapsto (w_n a_n)_n$ $\quad \in K(\ell^2)$ ssi $w_n \to 0$

Théorème 67 : Soit $T \in K(H)$

- $\ker(I-T)$ de dim finie $\quad \mathrm{Im}(I-T)$ fermé
- $I - T$ inj $\Leftrightarrow$ $I - T$ bij

DVP

Applications 68 : Soit $(e_n)_n$ une base Hilbertienne de H et $(\gamma_n)_n$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|e_n - \gamma_n\|^2 < +\infty$ et $\gamma_n \notin \overline{\mathrm{Vect}(\gamma_k / k \neq n)}$

Alors $(\gamma_n)_n$ est une famille totale de H

2.7 Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Bien être au point sur la preuve de la densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans les L^p pour éviter les raisonnements circulaires.

Références utilisées :

— (1) *Analyse* X.Gourdon
— (2) *Analyse numérique et équations différentielles* JP.Demailly
— (3) *Calcul intégral* B.Candelpergher
— (4) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec
— (5) *Méthodes numériques* A.Quarteroni R.Sacco F.Saleri
— (6) *Elément d'Analyse Réelle* JE.Rombaldi
— (7) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (8) *Théorie de l'intégration* M.Briane G.Pagès
— (9) *Chemin d'Analyse Tome 1* D.Chiron
— (10) *Eléments d'Analyse Fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
— (11) *Oraux X-ENS Analyse 4* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Approximation par des fonctions régulières. Exemples et applications

2013

I Approximation polynomiale, généralités

A. Formules de Taylor

(1,6) Proposition 42 : (Taylor reste intégrale). Soit $f \in C^{n+1}([a,b])$ alors pour $x \in [a,b]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Application 43 : Si $f \in C^0(\mathbb{R})$ alors $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$

Proposition 44 : (Formule de Taylor Young). Soit $f \in C^{n+1}([a,b])$ alors $f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$

Application 45 : Calcul de limites, développements limités.

Proposition 46. (Formule de Taylor Lagrange). Soit $f \in C^{n+1}([a,b])$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

(5) Application 47 : Stabilité de schémas numériques

(7) Application 48 : (Méthode de Newton).
$I = [c,d]$ $f(c)<0<f(d)$, $f'>0$ sur I et $f \in C^1$ sur I
Soit $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ Alors f a un unique zéro dans a, et pour u_0 proche de a, u_n tend vers a de manière quadratique.

(3) Application 49 Méthode de Laplace par les intégrales.

B. Interpolation de Lagrange

Définition 7 : Soit $(x_0, \dots, x_n)$ $n+1$ points distincts on définit le $i$ème polynôme de Lagrange par :

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

On a la relation $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$

Proposition 8 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme P de degré n tel que $f(x_i) = P(x_i)$ $i \in [\![0,n]\!]$. Il est donné par :

$$P = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$$

(1) Application : Unicité de la racine carrée dans S_n^+

(6) Application : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ ssi $P \in \mathbb{Q}[X]$

(1) Proposition : Phénomène de Runge

C. Polynômes orthogonaux

(5,6) Définition 9 : Soit $\rho : I \to \mathbb{R}^{+*}$ mesurable, on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$. On définit alors

$$L^2(\rho) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \;/\; \int_I f^2 \rho < +\infty \right\}$$

Théorème 10 : Il existe une suite $(p_n)_n$ de polynômes orthogonaux telle que $\deg(p_n) = n$ et $(p_n)_n$ base Hilbertienne de $L^2(\rho)$.

Exemple 11 : Avec $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ on a $p_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$

Remarque 12 : Les polynômes orthogonaux interviennent dans l'approximation d'intégrales, via la méthode de Gauss.

Application 13 : $f_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} p_n(x)$ forment une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$

D. Polynôme de Bernstein et théorème de Weierstrass.

(4) Définition 14 : Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ on définit le nième polynôme de Bernstein de f par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

Définition 16 : Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on définit le module de

(4)

Continuité de f par $\omega(\delta) = \sup_{|x-y|<\delta} |f(x)-f(y)|$ (01)

Proposition 17 : $\exists C>0, \forall f \in C([0,1],\mathbb{R})$ $\|B_n(f)-f\|_\infty \leq C\omega(\frac{1}{n})$
De plus l'inégalité est optimale pour $f(x) = |x-\frac{1}{2}|$.

Application 18 : (Théorème de Weierstrass).
Tout fonction continue de $[a,b] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de polynôme.

Contre-Exemple 19 : Une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynôme est un polynôme

Application 20 : La transformée de Laplace est une application injective sur les fonctions continues bornées

Théorème 21 : Stone Weierstrass

App 22 : Densité des polynômes trigonométriques.

II Convolution et densité

(8)

On considère ici $\lambda = \mu$ la mesure de lebesgue sur $X = \mathbb{R}^d$ $d \geq 1$.

Lemme 23 Les fonctions lipschitziennes à support compact sont denses dans les L^p.

Application 24 : Pour $f \in L^p$, en notant $\tau_a f(x) = f(x-a)$ on a $\|\tau_a f - f\|_p \underset{a\to 0}{\to} 0$

Définition 25 On définit pour deux fonctions f et g (quand cela a un sens) le produit de fonctions f et g par :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

Exemple 26. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densité f et g alors $X+Y$ est de densité $f*g$.

Proposition 27
- Si $f, g \in L^1$ alors $f*g \in L^1$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
- $f \in L^p$ $g \in L^q$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $f*g \in L^\infty$ $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$
- $f \in L^1$ $g \in L^p$ alors $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$

Proposition 28 : $(L^1, +, \cdot, *)$ est une algèbre commutative non unitaire.

Lemme 29 Il existe une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$\forall n \geq 1$ $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n = 1$ $\forall \varepsilon > 0$ $\int_{\|x\|>\varepsilon} \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Proposition 30 Soit $f \in L^p$ alors $\alpha_n * f \in L^p$ et $f*\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|_p}{\to}} f$

Corollaire 31 : $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p

Proposition 32 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p.

Application 33. (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f}(\xi) \underset{\xi\to+\infty}{\to} 0$ $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$

(9)

Application 34 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (espace de Schwartz) est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Application 35 Extension de la transformée $L^2 \to L^2$.

(10)

Application 36 : Riesz-Frechet Kolmogorov

Application 36 : (Ω borné) l'injection $i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte

(34)

III Approximation par série de Fourier

Définition 37: Pour $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ on note:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

et $e_n(t) = e^{int}$

Définition 38: Pour $(f,g) \in L^1_{2\pi}$ on définit $f*g$ par

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt$$

Proposition 39: $f \in L^1_{2\pi}$

$c_n(\tau_k f) = c_{n-k}(f)$ $f*e_n = c_n(f)e_n$ $c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g)$

Si $f \in C^1_{pm}$ alors $c_n(f') = in\,c_n(f)$

Proposition 40: (Lemme de Riemann Lebesgue)

$$c_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Proposition 41: Soit $f \in L^1_{2\pi}$

- $f \in C^k \Rightarrow c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ - $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \Rightarrow f \in C^{k-2}$
- $f \in C^\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$
- f analytique sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \alpha > 0,\ c_n(f) = O(e^{-\alpha|n|})$

Théorème 42: (Fejer) En notant $k_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=-k}^{k} e^{ipt}$

$= \frac{1}{n}\frac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $\sigma_n(f) = k_n * f$

- $f \in C^0_{2\pi} \Rightarrow \|f - \sigma_n(f)\|_\infty \to 0$
- $f \in L^p_{2\pi} \Rightarrow \|f - \sigma_n(f)\|_p \to 0$

/DVP

Application 43: $(e_n)_n$ base Hilbertienne de L^2

Application 44: Si $\left(\sum_{p=-n}^{n} c_p(f)e^{ipx}\right)_p$ converge c'est vers $f(x)$

Application 45: Si $f \in L^p_{2\pi} \cap C^1_{pm}$ alors $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \sum c_n(f)e^{inx}$

(35)

Proposition 46 (Parseval) Soit $f \in L^2_{2\pi}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$$

Application 47: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

Proposition 48: (Formule sommatoire de Poisson). Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ avec $|f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|^\alpha)}$ $C>0$ $\alpha>1$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)| < +\infty$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)$

Application 49: Soit $\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$ alors $\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right)$

Application 50: La fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et vérifie:

$\forall s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\ \zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{\frac{1-s}{2}}$

Application 51:

$$\forall a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\ \pi\cot(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2a}{a^2-n^2}$$

Application 52: Pour $k \in \mathbb{N}^*$ $\zeta(2k) =$

où $(b_n)_n$ est la suite des nombres de Bernouilli

Théorème 53: (Equation de la chaleur sur le cercle).

(11)

Isopérimétrique

2.8 Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples et applications.

Références utilisées :

— (1) *Eléments d'Analyse Fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
— (2) *Analyse* X.Gourdon

Espaces de Hilberts - Bases Hilbertiennes. Exemples et application

213

(1)

I Définition, propriétés élémentaires

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ H est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Proposition 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
$\forall (x,y) \in H^2 \quad |\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ avec égalité ssi (x,y) positivement liés

Corollaire 4 : $x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ définit une norme sur H

Proposition 5 : (Inégalité du parallélogramme)
$\forall (x,y) \in H^2 \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Remarque 6 : Si une norme (quelconque) vérifie l'identité du parallélogramme, alors elle est issue d'un produit scalaire

Exemple 7
$C^0([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas préhilbertien

Définition 8 : Un espace préhilbertien est un Hilbert s'il est complet pour la norme associée à son produit scalaire

Exemple 9 : Un espace pré-hilbertien de dim finie est un espace de Hilbert. $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert.

II Théorème de projection et conséquences

Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un Hilbert

Théorème 1 :
Soit C un convexe fermé de H, alors pour $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $\|x - p_C(x)\| = d(x,C)$

Proposition 2 :
$p_C(x)$ est caractérisé par : $\begin{cases} y \in C \\ \forall z \in C \quad \langle x-y, z-y\rangle \leq 0 \end{cases}$

Proposition 3
$p_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne (donc continue)

Proposition 4
Si F est un sev fermé de H alors $p_F(x)$ caractérisé par
$\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$

Contre-Exemple 6 Toutes les hypothèses sont nécessaires
$E = C^0([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ complet pas Hilbert $C = \{f \leq 1 / f(0) = 0\}$
$d(1,C)$ atteinte partout.

Théorème 7 : (Supplémentaire orthogonal) Soit $F \subset H$ sev fermé de H alors $H = F \oplus F^\perp$

Conséquence 8 : (Critère de densité) Soit $F \subset H$ sev alors
F dense dans $H \iff F^\perp = \{0\}$

Corollaire : $F \subset H$ sev $F^{\perp\perp} = \bar{F}$

Contre-exemple 10 : L'hypothèse de complétude est nécessaire
$E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ $f : E \to \mathbb{R}$, $(u_i) \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u_i}{i+1}$ $F = \ker(f)$ $F^\perp = \{0\}$ mais
$E \neq F \oplus F^\perp$

Théorème 11 : (Représentation de Riesz)
On note H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H.
Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que $\varphi = \langle \cdot, y\rangle$ De plus $\|y\| = \|\varphi\|$

Application 12 :
$\forall T \in \mathcal{B}(H)$ $\exists ! \, T^* \in \mathcal{B}(H)$, $\forall (x,y) \in H^2$ $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$
T est dit auto-adjoint si $T^* = T$

Exemple 13 :
Soit $K \in L^2([0,1])$ et $T_K : L^2 \to L^2$, $f \mapsto (x \mapsto \int_y K(x,y) f(y)\, dy)$
Alors $T_K^* = T_{K'}$ où $K'(x,y) = \overline{K(y,x)}$

Contre-exemple 14 : Les hypothèses sont importantes
$H = (C^0([0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ $\varphi : f \mapsto \int_0^{1/2} f = \langle f, 1_{[0,\frac{1}{2}]}\rangle$

III Convergence faible dans un Hilbert.

Définition 15 : On dit que $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ pour tout $y \in H$.

Exemple 16 : $e_n(t) = e^{int}$ dans $L^2([0,2\pi])$ as $e_n \to 0$

Proposition 17: Si $x_n \to x$ alors $(x_n)_n$ bornée

Théorème 18: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ bornée, alors $(x_n)_n$ possède une sous-suite faiblement convergente.

Application 19: Soit $J : H \to \mathbb{R}$ continue convexe coercive, alors J atteint son minimum. / OVP1

Application 20: Il existe une unique solution faible à

$$-u'' |u|^{p-1} + u = f \qquad p > 1 \quad f \in L^2.$$

IV Bases - Hilbertiennes

Définition 1: Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est orthogonale si $x_i \perp x_j$ pour $i \neq j$. Elle est dite orthonormée si $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$

Proposition 2: (Pythagore) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale et $J \subset I$ fini, alors $\left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} \|x_i\|^2$

Définition 3: Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite totale si $\overline{\text{Vect}(e_i)_{i \in I}} = H$

Définition 4: Une famille orthonormée totale est dite base Hilbertienne.

Exemple 5:
$(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$

Proposition 6: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée finie de H et $F = \text{Vect}(e_i)_{i \in I}$. Alors pour $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Conséquence 7: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale de H, alors pour $x \in H$ $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
(Inégalité de Bessel)

Proposition 8: Soit $(e_i)_{i \in I}$ famille orthogonale de H alors les assertions suivantes sont équivalentes:
- $(e_i)_{i \in I}$ base hilbertienne de H
- $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$
- $\forall (x, y) \in H^2 \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$

Dans ce cas $x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ définit une isométrie de H sur $\ell^2(I)$, elle est surjective ssi H Hilbert

Définition 9: Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de H est dite sommable s'il existe $x \in E$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J \in \mathcal{P}(I)$ fini, $\forall K \in \mathcal{P}(I)$ fini $K \supset J \Rightarrow \left\| x - \sum_{i \in K} e_i \right\| < \varepsilon$

Théorème 10:
Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base Hilbertienne de H. Alors pour $x \in H$
$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

Proposition 13: Orthonormalisation de Gram-Schmidt
Soit H esph et $(f_n)_{0 \leq n \leq N}$ $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ libre. Il existe une unique famille orthonormée $(e_n)_n$ telle que:
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{Vect}(e_0, \dots, e_n) = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$
$\langle e_n, f_n \rangle > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application 14:
Un Hilbert est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable

V L'espace $L^2(\rho)$.

A. Série de Fourier dans L^2.

Proposition 10: Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$, et $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$
alors $\|S_n(f) - f\|_2 \to 0$

Proposition 12: Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$ alors:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Application 13: $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Théorème 14: $L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie
$f \mapsto (c_n(f))_n$

B. Polynômes orthogonaux dans $L^2(P)$.

- Thm sur $L^2(P)$
- Ex Legendre, Tchebycheh, Hermite
- Hermite BH de $L^2(\mathbb{R})$
- intégration numérique.

VI Opérateurs compacts et théorème spectral

A. Opérateurs compacts

Définition 1 : Un opérateur $T \in B(H)$ est dit compact si $\overline{T(B_H)}$ compact. On note $K(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts

Exemple 2 : - T_k est compact (Exemple 13)

Un opérateur de rang fini est compact

Proposition 3

$K(H)$ est un sev de $B(H)$ et un idéal bilatère de $B(H)$.

Proposition 4 :

Un opérateur $T \in K(H)$ est compact ssi il est limite d'opérateurs de rang fini

Théorème 7 : Soit $T \in K(H)$

- $\ker(I-T)$ de dim finie $\mathrm{Im}(I-T)$ fermé
- $I-T$ inj $\Leftrightarrow$ $I-T$ bij

Application : Bases presques orthogonales

DVP2

B. Spectre

Définition 8 : Soit $T \in B(H)$ on note

$Vp(T) = \{\lambda / \lambda I - T$ non inj$\}$ $\sigma(T) = \{\lambda / \lambda I - T$ non bij$\}$

Propriétés 9 :

- $Vp(T) \subset \sigma(T)$ (pas égalité en général)
- $\sigma(T)$ compact $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$

Exemple 10 : $Vp(T_1) = \{\frac{1}{n+1} / n \geq 0\}$ $\sigma(T_1) = \overline{Vp(T_1)}$

Proposition 13 : Soit T auto adjoint, alors en notant

$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$

$\sigma(T) \subset [m, M]$ $(m, M) \in \sigma(T)^2$

Théorème 14 : Soit $T \in K(H)$ compact auto-adjoint H séparable

Il admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T

VII Espace de Sobolev

Soit $\Omega =]a, b[$

Définition 38 : On pose $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \exists g \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega g\varphi\}$. g est alors unique et on le note u'.

Proposition 39 : $H^1(\Omega)$ est un Hilbert pour $\|u\|_{H^1} = \|u\|_2 + \|u'\|_2$ (bien)

Proposition 40 : Soit $u \in H^1(\Omega)$ alors il existe $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ tel que $u = \tilde{u}$ p.p

Définition 41 : $H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|u\|_{H^1}}$

Proposition 42 : $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$

Proposition 43 : (Inégalité de Poincaré).

$\exists C > 0$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ $\|u\|_2 \leq C \|u'\|_2$

Proposition 44 : Soit $\alpha \in C^0([a,b])$ positive et $\beta \in L^2$. Il existe un unique $u \in H_0^1$ solution faible de $-u'' + \alpha u = \beta$

Proposition 45 : On note $T : L^2 \to H_0^1$ $\beta \mapsto u$ et $i : H_0^1 \hookrightarrow L^2$ alors $i \circ T$ est compact. | Important.

Proposition 46 : Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_n$ de L^2 et des réels $(\lambda_n)_n$ avec $|\lambda_n| \to +\infty$ et

$-e_n'' + \alpha e_n = \lambda_n e_n$

2.9 Leçon 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et géométrie.

Pas facile comme leçon, elle nécessite de bonnes bases en calcul différentiel et rentre très vite dans le vif du sujet. La plupart des exemples sont tirés du livre *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel* S.Gonnord N.Tosel.

Références utilisées :

— (1) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (2) *Analyse* X.Gourdon
— (3) *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel* S.Gonnord N.Tosel
— (4) *Un Max de Math* M.Zavidovique
— (5) *Introduction aux variétés différentielles* J.Lafontaine
— (6) *Objectif Agrégation* V.Beck J.Malick G.Peyré
— (7) *Equations différentielles* F.Berthelin

Théorème d'inversion locale et fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et géométrie.

214

$f: U \to \mathbb{R}^p$ où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.

I Théorème d'inversion local/global

A. Théorèmes

(A)

Définition 1: On dit que f est un C^k difféomorphisme de U sur $f(U)$ si $f: U \to f(U)$ est bijective, de classe C^k et $f^{-1}: f(U) \to U$ est de classe C^k.

Exemple 2: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ est un C^∞ difféomorphisme

Théorème 3: (Inversion globale locale). Supposons f de classe C^1. Supposons qu'il existe $x \in U$ tel que $df(x)$ soit inversible. Alors il existe des ouverts V de x et W de $f(x)$ $\varphi = f|_V: V \to W$ soit un C^1 difféomorphisme

Remarque 4: On peut remplacer C^1 par C^k / holomorphe

Remarque 5: Ce théorème est encore vrai sur des Banachs.

Remarque 6: On a ainsi l'équivalence:

$$x \in V \quad y = f(x) \iff y \in W \quad x = f^{-1}(y)$$

Remarque 5: Pour $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $df(x)$ inversible $\iff f'(x) \neq 0$

Contre-Exemple 6: La condition C^1 est nécessaire comme le montre: $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Proposition 7: (Théorème d'inversion globale). On suppose f de classe C^1 et injective sur U et que pour tout $x \in U$ $df(x)$ inversible. Alors $f(U)$ ouvert et f réalise un C^1 difféomorphisme de U sur $f(U)$

Exemple 8: Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1 et k dilatante ie $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\| \quad k > 0$. Alors f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui même

Contre-Exemple 9: L'injectivité de f est importante comme le montre $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$

B. Applications en analyse

Exemple 35: Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 k-dilatante. Alors f est un C^1 difféomorphisme global.

Application 36 Soit $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitz. Soit y sol max de $y' = f(t)$. Si $\{y(t) \mid t \in I\}$ compacte alors y périodique

Théorème 37: (Admis) Soient $\Omega' \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^p$ ouvert, $f: \Omega' \to \mathbb{R}^N$ C^k. Soit $(t_0, Y_0, \lambda_0) \in \Omega'$ alors il existe un voisinage $C = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times B(Y_0, r) \times B(\lambda_0, \beta) \subset \Omega$ tel que pour tout $(t^*, Y^*, \lambda) \in C$ il existe une solution et une seule de $y' = f(t, y, \lambda)$ définie sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ vérifiant $y(t^*) = Y^*$. De plus, $(t, t^*, Y^*, \lambda) \mapsto Y_{t^*, Y^*, \lambda}(t)$ est C^1 sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times C$

Théorème 38 (Hadamard-Levy) Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^2. Les ss:

i) f est un C^1 diffeo de $\mathbb{R}^n$ sur lui même

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$

OVP 1

C. Application en algèbre/géométrie

Théorème 39 Théorème de D'alembert-Gauss.

Application 40 Tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Proposition 41. $GL_n(\mathbb{C})$ n'admet pas de sous-groupe arbitrairement petit

Proposition 42 $SO_n(\mathbb{R})$ simple pour $n \geq 3$ impair.

Théorème 43: $\exp: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ surjective.

Proposition 44 $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{P^2 / P \in GL_n(\mathbb{R})\}$

OVP 2

Application 45 Théorème de Floquet

Application 47: (Lemme de Morse) Soit $f \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ non dégénéré de signature $(p, n-p)$ alors il existe un C^1 difféomorphisme φ entre deux voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que:

$$\forall x \in U \quad f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2$$

Application 48 f présente un minimum (resp. maximum) ssi

(1)

II Théorème fonctions implicites

A. Le théorème.

(1)

Théorème 24 : (fonctions implicites) Soit $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ un ouvert et $(a,b) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1.
On suppose $f(a,b) = 0$ et $d_y f(a,b)$ inversible alors
Il existe V voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$ et $d_y f(x,y)$ inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$ et une unique application $\varphi : V \to W$ C^1 telle que
$(x \in V, y \in W$ et $f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V$ et $y = \varphi(x))$

Remarque 25 : On peut remplacer "C^1" par "C^k" et $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ en changeant "C^1" par holomorphe.

Exemple 26 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

- $V =]-1,1[$ $W =]0,+\infty[$ $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\tilde{V} =]-1,1[$ $W =]-\infty,0[$ $\tilde{\varphi}(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Proposition 27 Dans les hypothèses du théorème 24 on peut obtenir une expression de la différentielle de φ
$d\varphi(x) = -(d_y(f(x,\varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x,\varphi(x))$

B. Applications

Application 52 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1. Alors f n'est pas injective
Proposition 53 L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$
Application 54 L'intérieur des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices à n valeurs propres distinctes.
Application 55 $0 \in Sp(A)$, si $B \in M_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de 0 alors $Y + YBY = B$ admet une solution.

Application 56 (Pendule de Van der Pol).
Soit (ℓ) l'équation $x'' + \varepsilon(x^2-1)x' - x = 0$ (α). Alors il existe $\alpha > 0$ $\beta :]-\alpha,\alpha[\to \mathbb{R}$ telle que $\beta(0) = 2$ et pour $y \in]-\alpha,\alpha[$ $(\ast)$ possède une solution périodique x vérifiant $x(0) = \beta(y)$ $x'(0) = 0$
Remarque 57 : On peut prouver le TIL en utilisant le TFI.

III Sous variétés de $\mathbb{R}^n$

A. Immersion, submersion

(1)

Th rg constant

(5)

B. Définitions

Définition 33. Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si pour tout x de M il existe des ouverts U et V de x et 0 dans $\mathbb{R}^n$ respectivement et un C^∞ difféomorphisme
$f : U \to V$ tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\})$
Proposition 35. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(5)

i) M est une sous variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.
ii) Pour tout $x \in M$ il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x et $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ C^∞ submersion et $U \cap M = g^{-1}(0)$
iii) Pour tout $x \in M$ il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant x, Ω un ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ immersion tel que $h : \Omega \to U \cap M$ homéomorphisme
iv) Pour tout $x \in M$ il existe $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant x un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $(x_1, \dots, x_p)$ et une application lisse $G : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ tels que après éventuelle permutation des coordonnées : $U \cap M = \{(y, G(y)) \mid y \in V\}$

Exemple 36 : La sphère de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne) est une sous variété de dimension $n-1$.

Exemple 37 : $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. $SL_n(\mathbb{R})$ aussi.

Exemple 38 $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ n'est pas une sous variété de $\mathbb{R}^3$. Deux droites non parallèles non plus

matrices de rang fixé.

(3) Théorème 39 : (Cartan Von Neumann) Tous sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

C. Plans tangents

(5) Définition 40 : Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ et $a \in A$. v est dit tangent à A en a s'il existe une application différentiable $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^p$ telle que $c(]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset A$ $c(0) = a$ $c'(0) = v$

On note $T_a(A)$ l'ensemble de ces points.

(5)

Exemple 41 : $T_{I_n}(SO_n(\mathbb{R})) = A_n(\mathbb{R})$

Proposition 42 : Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension p et $x \in M$. Alors $T_x(M)$ est un sous-espace vectoriel de dimension p.

Proposition 43 : $T_x(M) = \ker dF(x)$

Exemple 44 : $T_{I_n}(M) = \ker(\text{trace})$

(2,1)

D. Optimisation sous-contrainte

Théorème 68 (Extremas liés). Soit $g_1, \dots, g_k$ des fonctions C^1 et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ C^1. Si f admet un extremum local en x et $dg_1(x), \dots, dg_k(x)$ libres alors il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tels que :

$$df(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_i(x).$$

Application 69 Inégalité arithmético-géométrique

Application 70 Inégalité d'Hadamard

Application 71 : Théorème spectral

Application 72 : $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_2$ minimale.

2.10 Leçon 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

On peut remplacer la partie optimisation par une partie sur les sous-variétés. Il y a trop d'exemples/applications, il faut en supprimer quelques uns.

<u>Références utilisées :</u>

— (1) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (2) *Analyse* X.Gourdon
— (3) *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel* S.Gonnord N.Tosel
— (4) *Un Max de Math* M.Zavidovique
— (5) *Objectif Agrégation* V.Beck J.Malick G.Peyré
— (6) *Inversion locale, fonctions implicites, formule de Taylor* D.Sondaz
— (7) *Analyse mathématique* F.Testard

(1,2)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to F = \mathbb{R}^m$

I Différentielles, dérivées partielles

(1,2)

A. Différentielle

Définition 1 : On dit que f est différentiable en $a \in U$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ telle que

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

Proposition 2 : Dans le cas précédent L est unique et s'appelle la différentielle de f en a. On la note $df(a)$.

Exemple 3 : Si f est linéaire $df(a) = f$ pour tout $a \in U$.

Exemple 4 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable ssi f est dérivable en a. Dans ce cas $df(a) \cdot h = h f'(a)$

Exemple 5 : $f(M) = M^k$ $\quad df(M) \cdot H = \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}$

Proposition 6 : Si f est différentiable en a alors f est continue en a. La réciproque est fausse.

Proposition 7 : $d : f \to (df(x))$ est linéaire.

Proposition 8 : Soit f différentiable en a, g en $f(a)$ alors $g \circ f$ différentiable en a et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$

Définition 9 : f est dite de classe C^1 sur U si f différentiable sur U et $x \mapsto df(x)$ continue.

Remarque 10 : On définit par récurrence f C^k et f C^∞

Exemple 11 : Une application linéaire est C^∞.

B. Dérivées partielles.

Définition 12 (Dérivée selon un vecteur) : Soit $a \in U$ et $v \in E$. On dit que f est dérivable en a selon le vecteur v si :

$$f'_v(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \text{ existe et est finie.}$$

Remarque 13 : f peut admettre une dérivée en a selon tout vecteur sans même être continue en a.

Proposition 14 : Si f est différentiable en a alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur v et $f'_v(a) = df(a) \cdot v$

de plus en notant $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$ on a :

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^* \text{ où } (e_1, \dots, e_n) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^n$$

Application 15 : $d(\det)(M) \cdot H = \operatorname{tr}({}^t\mathrm{com}(M) H)$

Application 16 : Le wronskien vérifie $W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} r_1(A(\sigma))\,d\sigma}$

Théorème 17 : f est de classe C^1 ssi f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et qu'elles sont continues sur U.

Proposition 18 : La composée (si bien définie) de fonctions de classe C^1 est de classe C^1. De plus, si $g = f \circ \varphi$ alors

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(a)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(a)$$

Application 19 : Le laplacien en coordonnées polaires est

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta} \qquad g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Définition 20 : Si f est différentiable en a on appelle la matrice Jacobienne de f $\quad \mathrm{Jac}(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad f = (f_1, \dots, f_m)$

Proposition 21 : $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en (x_0, y_0) ssi f vu comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est différentiable en (x_0, y_0) et en notant $f = u + iv$ on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Définition 22 : Soit f différentiable en $a \in U$. Il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$ tel que $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$. On l'appelle le gradient de f en a. (f à valeurs réelles ici)

Proposition 23 : $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1 \le i \le n}$.

Théorème 24 : (Schwarz). Soit $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ alors pour $x \in U$

(1,2) $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

C. Inégalité accroissements finis.

(2) Théorème 25 (IAF). Soit $(x,y) \in U^2$ tel que $[x,y] \subset U$ On suppose qu'il existe $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que :

$\forall t \in [0,1] \quad \|df(x+t(y-x))\| \leq \varphi'(t)$.

Alors $\|f(x)-f(y)\| \leq |\varphi(1)-\varphi(0)|$

Application 26 Si f C^1 alors f est local lipschitz

Application 27 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 alors pour $n \geq 0$.

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \right| \leq \frac{1}{2} \max_{[n,n+1]} |f'|$$

App $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ DV

O. Formule Taylor reste intégral.

(1) Proposition 28 Soit f C^{n+1} alors :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(a)\cdot(h,\dots,h)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f(a)\cdot(h,\dots,h)\,dt$$

Application 29. Si $df = 0$ sur U connexe alors f constante sur U

Application 30 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞ $f(0)=0$ alors on peut écrire $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x)$ avec $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞.

II Théorème d'inversion locale.

A. Théorème

(1) Définition 31 On dit que $f : U \to V$ est un C^k difféomorphisme si f est bijective C^k et f^{-1} est C^k.

Exemple 32 : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ est un C^∞ difféomorphisme

Théorème 33 (Théorème inversion locale). Supposons f de classe C^k. Supposons qu'il existe $x \in U$ tel que $df(x)$ soit inversible. Alors il existe des ouverts V de x et W de $f(x)$ tels que $f|_V : V \to W$ C^1 difféomorphisme.

Théorème 34 (Inversion globale). On suppose $f : U \to f(U)$ C^k, injective et pour tout $x \in U$ $df(x)$ inversible alors f est un C^k difféomorphisme.

B. Applications en analyse

(1) Exemple 35 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 k-dilatante. Alors f est un C^1 difféomorphisme global.

Application Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitz. Soit y sol max de $y' = f(y)$. Si $\{y(t) \mid t \in I\}$ compacte alors y périodique

(2) Proposition 36 L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Application 37 L'intérieur des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices à n valeurs propres distinctes.

Théorème 38 (Hadamard-Lévy) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^2. Alors on a équivalence.

i) f est un C^1 diffeo de $\mathbb{R}^n$ sur lui même

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \to +\infty} +\infty$

OVP 1

C. Application en algèbre / géométrie

(3) Théorème 39 Théorème de D'alembert-Gauss.

Application 40 Tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Proposition 41. $GL_n(\mathbb{C})$ n'admet pas de sous-groupe arbitrairement petit

(4) Proposition 42 $SO_n(\mathbb{R})$ simple pour $n \geq 3$ impair.

Théorème 43 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ surjective.

Proposition 44 $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{p^2 / p \in GL_n(\mathbb{R})\}$

OVP 2

Application 45 Théorème de Floquet. + Cartan Von N

Application 46 (Lemme de Morse) Soit $f \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$ alors il existe un C^1 difféomorphisme φ entre deux voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall x \in U \quad f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2$$

Application 47 f présente un minimum (resp. maximum) ssi $p = n$ (resp $p = 0$).

(7)

III Fonctions implicites.

(1)

Théorème 48 (Fonctions implicites). Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ où U ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Soit $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$ et $\partial_y f(a,b)$ inversible. Alors il existe des ouverts V, W de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^m$ et $\varphi : V \to W$ C^1 difféo tels que :

$(a,b) \in V$ et $(x \in V, y \in W \ f(x,y) = 0) \iff (x \in V \ y = \varphi(x))$.

Proposition 49 On peut obtenir un DL de φ grâce à la relation $d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$.

Proposition 50 Le TIL et le TFi sont équivalents.

(6)

Application 51 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1. Alors f n'est pas injective

Application 52 : (Formule de Clapeyron). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^1.
Soit (P,V,T) avec $f(P,V,T) = 0$ $\partial_i f(P,V,T) = 0$ $i \in \{1,2,3\}$

alors : $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$

Application 53 $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, si $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ suffisamment proche de O alors $Y + YDY = B$ admet une solution.

Application 54 (Pendule de Van der Pol).
Soit ℓ l'équation $x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' - x = 0$ $(*)$. Alors il existe $\alpha > 0$, $\beta :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ telle que $\beta(0) = 2$ et pour $y \in]-\alpha, \alpha[$ $(*)$ possède une solution périodique x vérifiant $x(0) = \beta(y)$ $x'(0) = 0$

IV Problèmes d'optimisations.

(9)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$.

A. Extremum et différentiabilité à l'ordre 1.

On suppose f différentiable
Proposition 55 Si f a un extremum local en $x \in U$ alors $df(x) = 0$
Si $df(x) = 0$ on dit que x est un point critique

Remarque 56 Réciproque fausse : $x \mapsto x^3$.
Remarque 57 : Faux si U pas ouvert $x \mapsto x$ sur $[0,1]$.
Application 58 . Théorème de Rolle
Application 59 : Théorème des accroissements finis
Application 60 Théorème limite de la dérivée
Application 61 : Théorème de Darboux.

B. Extremum et différentiabilité à l'ordre 2.

On suppose f C^2.
Proposition 62 Soit $x \in U$ point critique et $M_x = \mathrm{Hess}(f)_x(x)$
- Si $M_x \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors x minimum local
- Si x minimum local alors $M_x \in S_n^+(\mathbb{R})$

Remarque 63 Si $M_x \in S_n^+(\mathbb{R})$ on ne peut rien dire :
$f(x) = x^4$ (min local) $f(x) = x^3$ (rien).
Définition 64 Si M_x est inversible et non définie on dit que x est un point selle.
Exemple 65 $f(x,y) = x^2 - y^2$

C. Optimisation sous-contrainte.

(2)

Théorème 66 (Extrêmas liés). Soit $g_1, \dots, g_k$ des fonctions C^1 et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ C^1.
Si f admet un extremum local en x et $dg_1(x), \dots, dg_k(x)$ libres alors il existe des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tels que :

$$df(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_i(x).$$

/ OVP 4

Application 67 Inégalité arithmético-géométrique
Application 68 Inégalité d'Hadamard
Application 69 : Théorème spectral
Application 70 : $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de $\|.\|_2$ minimale.

2.11 Leçon 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Il faut rajouter une application au lemme de Schwarz, on peut aussi parler du principe du maximum pour les EDP.

Références utilisées :

— (1) *Analyse mathématique* F.Testard
— (2) *Analyse* X.Gourdon
— (3) *Eléments d'Analyse Fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
— (4) *Analyse complexe* E.Amar E.Mathéron
— (5) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière

Extremums. Existence caractérisation. Exemples et applications.

218

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction.

I Extremums

A. Généralités.

(1)

Définition 1 : f a un minimum local en $a \in A$ s'il existe $r>0$ tel que pour $x \in B(a,r) \cap A$ $f(x) \geq f(a)$.

Définition 2 : f a un minimum global en $a \in A$ si pour $x \in A$ $f(x) \geq f(a)$.

Remarque 3 : On définit de même la notion de maximum local.

Proposition 4 : global $\Rightarrow$ local

Proposition 5 : Si f est continue sur un compact alors f est bornée et atteint ses bornes.

Application 6 : Théorème de D'alembert - Gauss

Application 7 : Sur un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. Toutes les normes sont équivalentes.

B. Le cas des fonctions convexes

(2)

Définition 8 : f est dite α-convexe sur un convexe A si :
$\forall (x,y) \in A^2 \ \forall \lambda \in [0,1] \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) - \frac{\alpha}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$
($x \mapsto \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$ convexe ; $\frac{\alpha}{2}$ constante)

Proposition 9 : α-convexe $\Rightarrow$ strict convexe $\Rightarrow$ convexe

Remarque 10 : Toutes les implications réciproques sont fausses.

(3)

Proposition 11 : (A convexe).
Si f est α-convexe alors f admet un unique minimum global
Si f strict convexe alors f admet au plus un minimum global ($x \mapsto f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$ sur $\mathbb{R}^+$)
Si f convexe admet un minimum local alors celui-ci est global.

Exemple 12 : $A \in S_n(\mathbb{R})$ $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ est convexe (resp. strictement convexe) ssi $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$).

II Extremum en analyse

(3)

A. Espaces de Hilbert

Soit H un Hilbert C un convexe fermé de H.

Théorème 12 : Soit $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $d(x,C) = \|x - p_C(x)\|$. De plus
- $p_C(x)$ caractérisé par $\forall y \in C \ \forall z \in C \ \langle x - y, z - y\rangle \leq 0$
- $x \mapsto p_C(x)$ 1-lipschitzien
- Si $C = F$ sev fermé de H alors $p_C(x)$ caractérisé par $y \in F$ $x - y \perp F$.

Application 13 : Si $F \subset H$ sev fermé alors $H = F \oplus F^\perp$

Application 14 : Soit $F \subset H$ sev alors F dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$

Application 15 : $\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 e^{-x}\,dx =$

Application 16 : Théorème de représentation de Riesz.

Théorème 17 : Soit $J : H \to \mathbb{R}$ convexe continue coercive alors J atteint son minimum — OVP1

Application 18 : Il existe une solution faible $u \in H_0^1(0,1)$ de $-u'' + u|u|^{p-1} = f$ où $f \in L^2(0,1)$.

B. Principe du maximum et fonctions holomorphes.

(4)

Proposition 19 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $|f|$ admette un maximum local au voisinage de $z_0 \in \Omega$. Alors f est constante

Proposition 20 : Soit $f \in H(\Omega)$ non constante telle que $|f|$ admette un minimum local sur Ω. Alors ce minimum est nécessairement nul

Application 21 : Théorème de D'alembert - Gauss.

Corollaire 22 : (Ω connexe). Si $f \in H(\Omega)$ alors f ouverte.

Application 23 : Si $f \in H(\Omega)$ $f \circ f = f$ alors $f = id_\Omega$.

Théorème 24 : (Principe du maximum). (Ω borné)

(4)

Soit $f \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ alors pour $z \in \Omega$ $|f(z)| \leq \sup_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|$ avec inégalité stricte si Ω convexe et f non constante.

Application 25: (Lemme de Schwarz) Soit f holomorphe sur le disque unité vérifiant $f(0)=0$ et $\|f\|_\infty \leq 1$ alors
- $\forall z \in D$ $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$
- Si $|f(a)| = |a|$ pour $a \neq 0$ ou si $|f'(0)| = 1$ alors $f = \lambda \mathrm{Id}$

App cf 245

III Problèmes d'optimisations.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$.

A. Extremum et différentiabilité à l'ordre 1.

(1)

On suppose f différentiable

Proposition 26: Si f a un extremum local en $x \in U$ alors $df(x)=0$

Si $df(x)=0$ on dit que x est un point critique

Remarque 27: Réciproque fausse : $x \mapsto x^3$

Remarque 28: Faux si U pas ouvert. $x \mapsto x$ sur $[0,1]$.

Application 29: Théorème de Rolle

Application 30: Théorème des accroissements finis

Application 31: Théorème de Darboux.

B. Extremum et différentiabilité à l'ordre 2.

(1,5)

On suppose f C^2.

Proposition 32: Soit $x \in U$ point critique et $M_x = \mathrm{Hess}(f)(x)$
- Si $M_x \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors x minimum local
- Si x minimum local alors $M_x \in S_n^+(\mathbb{R})$

Remarque 34: Si $M_x \in S_n^+(\mathbb{R})$ on ne peut rien dire:
$f(x) = x^4$ (min local) $f(x) = x^3$ (rien).

Définition 35: Si M_x est inversible et non définie on dit que x est un point selle.

Exemple 36: $f(x,y) = x^2 - y^2$

(5)

Application 37 (Lemme de Morse) Soit $f \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $df(0)=0$ et $d^2f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$ alors il existe un C^1 difféomorphisme φ entre deux voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que:

$$\forall x \in U \quad f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2$$

Application 38 f présente un minimum (resp. maximum) ssi $p=n$ (resp $p=0$).

C. Retour aux fonctions convexes.

(5)

On suppose f C^1 sur U convexe.

Proposition 39 f est convexe ssi $f(y) - f(x) \geq df(x).(y-x)$ pour tout $x, y \in U$.

(2)

Proposition 40. f est α-convexe ssi on a une des conditions équivalentes suivantes:

i) $\forall (x,y) \in U^2$ $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|y-x\|^2$

ii) $\forall (x,y) \in U^2$ $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq \alpha \|y-x\|^2$

iii) $\forall x \in U$ $\langle M_x x, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2$.

Application 41:

(1)

Si f est α-convexe alors f admet un unique minimum global

Si f strict convexe alors f admet au plus un minimum global

Si f convexe admet un minimum local alors celui-ci est global.

Application 42: Si f convexe alors f admet un extremum local en x ssi $df(x)=0$

D. Optimisation sous contrainte.

(2)

Théorème 43: (Extrêmes liés). Soit $g_1, \dots, g_k$ des fonctions C^1 et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ C^1.

Si f admet un extremum local en x et $dg_1(x), \dots, dg_k(x)$ libres

(2)

alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que $df(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_i(x)$. ✓ DVP 2

Application 44 : Inégalité arithmético-géométrique

Application 45 : Inégalité d'Hadamard

Application 46 : Théorème spectral.

Application 47 : $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme $\|.\|_2$ minimale.

IV Algorithmes de recherches d'Extremums.

A. Méthode de Newton.

(5)

Proposition 48 $I = [c,d]$ $f(c) < 0 < f(d)$ $f' > 0$ sur $[c,d]$ et $f \in C^2$. Soit $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Alors f a un unique zéro dans a, et pour u_0 proche de a, u_n tend vers a de manière quadratique.

Si de plus $f'' > 0$ sur I alors on peut prendre n'importe quel $u_0 > a$.

Application 49 : $\sqrt{2} = 1,4142\dots$

Proposition 50. Pour $U \subset \mathbb{R}^n$ la suite à considérer est $u_{n+1} = u_n - df(u_n) \cdot f(u_n)$

B. Méthode du gradient, minimisation de fonctionnelles

But 51 : Résoudre $Ax = b$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Définition 52 : Soit $f(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

Proposition 53 f est convexe coercive et atteint son minimum en un unique point X qui vérifie $AX = b$

Définition 54 : On considère $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \rho \nabla f(X^{(k)})$ où $\rho > 0$. On l'appelle méthode de gradient à pas fixe.

Définition 55. $x^{(k+1)} = \underset{u \in x^{(k)} + F_k}{\operatorname{argmin}} f(u)$ où $F_k = \operatorname{Vect}(\nabla f(x^{(k)}))$ méthode de gradient à pas optimal.

Lemme 56 (Inégalité de Kantorovich). Notons $S_p(A) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$ alors pour $x \in \mathbb{R}^n$ $\frac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \|x\|_{A^{-1}}^2} \geq \frac{4 \mu_1 \mu_n}{(\mu_1 + \mu_n)^2}$

où $\|x\|_A^2 = \langle Ax, x \rangle$.

Proposition 57. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $X_{k+1} = X_k - \alpha_{k+1} R_k$ $\alpha_{k+1} = \frac{\|R_k\|^2}{\|R_k\|_A^2}$ $R_k = AX_k - B$.

Alors $\|X_k - \bar{X}\| \leq \sqrt{\operatorname{cond}_2(A)} \left(\frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{\operatorname{cond}_2(A) + 1} \right)^k \|X_0 - \bar{X}\|$ où $A\bar{X} = b$ $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\mu_n}{\mu_1}$.

✓ DVP 3

2.12 Leçon 220 : Equations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

On peut trouver plein d'exemples intéressants (mais non élémentaires) dans le livre *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel* S.Gonnord N.Tosel et dans *Oraux X-ENS Analyse 4* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas.

Références utilisées :

— (1) *Equations différentiels* F.Berthelin
— (2) *Analyse pour l'agrégation* C.Zuily H.Queffélec
— (3) *Analyse numérique et équations différentielles* JP.Demailly
— (4) *Analyse* X.Gourdon
— (5) *Oraux X-ENS Analyse 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (6) *Oraux X-ENS Analyse 4*S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (7) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière

Equations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et étude en dimension 1 et 2.

220

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $I \subset \mathbb{R}$ intervalle Ω ouvert de $\mathbb{K}^n$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{K}^n$
On s'intéresse à l'équation différentielle $y' = f(t,y)$. On prend la norme euclidienne sur $\mathbb{K}^n$.

I Théorèmes fondamentaux.

(1)

A - Existence / Unicité.

Définition 1 : On dit que f est localement lipschitzienne en la 2nd variable si :
$\forall (\tilde{t}, \tilde{y}) \in \Omega \ \exists\, C_0 = C(\tilde{t}-\tau, \tilde{t}+\tau) \times B(\tilde{y}, r), \forall ((t,y_1),(t,y_2)) \in C_0^2$
$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$

Théorème 2 : (Théorème de Cauchy-Lipschitz). Soit f localement lipschitzienne en 2nd variable et continue alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $(*)$: $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Contre-Exemple 3 : $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 4 : Si f est C^1 alors f est localement lipschitzienne

Théorème 5 : (Cas globalement lipschitzien). Si f est globalement lipschitzienne par rapport à la 2nd variable alors le problème de cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution globale.

Contre-Exemple 6 : La solution maximale de $\begin{cases} y' = t y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ n'est pas globale.

Théorème 7 : (Théorème Cauchy-Péano-Arzela). Si f est continue alors il existe une solution maximale au problème de cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Contre-Exemple 8 : Si on remplace $\mathbb{K}^n$ par un Banach de dimension infinie le résultat est faux : $E = C_0$
$(f(x) = \left(\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}\right)_n$

Proposition 9 : (Unicité globale / locale). Sous les hypothèses du théorème 2, si x et y sont deux solutions de $(*)$ qui coincident en un point alors elles sont égales

B. Le théorème des bouts

Lemme 10 : (Lemme de Grönwall) Soit $t_0 \in I$ $a \in \mathbb{R}$ $u, v \in C(I, \mathbb{R})$ $u, v \geq 0$ et :
$\forall t \in I \quad u(t) \leq a + \left| \int_{t_0}^{t} v(s) u(s) ds \right|$
Alors : $\forall t \in I \quad u(t) \leq a e^{\left| \int_{t_0}^{t} v(s) ds \right|}$

Théorème 10 (Sortie de tout compact). On se place dans les conditions du théorème 2 alors soit $\gamma :]c, d[\to \mathbb{K}^n$ la solution maximale de $(*)$. Alors $(t, \gamma(t))$ sort de tout compact de $I \times \Omega$ quand $t \to d$ ou $t \to c$.

Corollaire 11 : (Théorème des bouts) Dans les hypothèses du théorème précédent, si $\sup I$ alors $\|\gamma(t)\| \xrightarrow[t \to \sup I]{} +\infty$

Application 12 : Si f est bornée, toutes les solutions maximales sont globales

Application 13 : Si $\|f(t,y)\| \leq a\|y\| + b$ alors toute les maximales sont globales.

Proposition 14 : Toutes équa diff d'ordre n peut se ramener en une équa diff d'ordre 1 en la vectorialisant

Exemple 15 : $y'' - y' + t y^2 = 0$ se ramène à
$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = f(t, y, y') \quad f(t,y,y') = (y', y' - t y^2)$

C. Flot d'une EDO

Définition.

TFI

Application EDP Transport.

Hadamard - Levy) DVP 1

II Résolution explicite

A. Cas linéaire

(3)

Soit $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \mapsto b(t) \in \mathbb{K}^n$ continues

Définition 16: On note $R(t,t_0)$ l'unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ du système différentielle $M'(t) = A(t)M(t)$, $M(t_0) = I_n$

Proposition 17: $\forall (t_0,t_1,t_2)$ $R(t_0,t_1)R(t_1,t_2) = R(t_0,t_2)$

Exemple 18: Si $t \mapsto A(t)$ est constante égale à A alors $R(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}$

Proposition 19: (Formule de Duhamel). L'unique solution de $Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t)$ $\quad Y(t_0) = Y_0$ est donnée par:

$$Y(t) = R(t,t_0)Y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds$$

obtenue en utilisant la technique de variation de la constante.

Proposition 20: Soient $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $r_1,\dots,r_p$ les racines de $X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ de multiplicités $m_1,\dots,m_p$. Les solutions de $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = 0$ sont des combinaisons linéaires de termes de la forme $P(t)e^{rt}$ où $\deg(P) < m_i$

Proposition 21: Si on cherche les solutions réelles on prend les parties réelles / imaginaires.

B. Cas particulier

(4)

Proposition 22: (Equation d'Euler). Si on a une équation de la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i t^i y^{(i)} + t^n y^{(n)}$ on pose $z(t) = y(\ln(t))$ pour $t>0$ et z vérifie une équation scalaire à coefficients constants.

Proposition 23: (Equation de Bernoulli) Pour résoudre une équation de la forme $y' + a(t)y = b(t)y^m$ on pose $z = y^{1-m}$

Proposition 24: (Equation de Riccati) Pour résoudre une équation de la forme $y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2$ on cherche une solution particulière $\tilde{y}$ et on pose $z = y(t) + \tilde{y}(t)$

(5)

Proposition 25: Quand une équation différentielle linéaire a des coefficients polynomiaux il peut être utile de chercher des solutions développables en série entière.

Application 26: $\forall x \in]-1,1[$ $\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

III Etudes qualitatives

A. Généralités

(1)

Définition 27: Une équation différentielle de la forme $y' = f(y)$ est dite autonome.

Définition 28: Une application $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ où Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ est appelée un champ de vecteur.

Proposition 29: Soit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localement Lipschitz et γ_1 une solution maximale de $y' = f(y)$, s'il existe $t_1 \neq t_2$ tel que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ alors γ est globale et périodique

Définition 30: (Intégrale première du mouvement) Une fonction $E: \Omega \to \mathbb{R}$ C^1 telle que $\dfrac{d}{dt}(E(\gamma(t))) = 0$ est appelée intégrale première du mouvement

Exemple 31: (Système de Lotka Volterra) Soient $a,b,c,d > 0$ alors $H(x,y) = dx + by - c\ln(x) - a\ln(y)$ est une intégrale première du mouvement de $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$

Application 32: Les solutions maximales de l'exemple précédent sont globales (cf portrait de phase ou trajectoire compacte).

B. Portrait de phases.

(1)

Définition 33: Le portrait de phase de $y' = f(y)$ où $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitz est la partition de Ω en Ω en courbe passant par $y_0 \in \Omega$.

Proposition 34: En annexe les portraits de phase de $y' = Ay$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(1) Proposition 35 : Les solutions maximales du système de Lodka - Volterra sont périodiques.

C. L'étude de $y'' + qy = 0$

(1) Proposition 36 : En posant $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ dans l'équation $y'' + ay' + by = 0$ on est ramené à étudier l'équation $y'' + qy$ (*)

(6) Proposition 37 : On suppose q continue $q < 0$ alors si $y \not\equiv 0$ y est non bornée, $\frac{y^2}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$.

Enfin, y et y' s'annule au plus une fois

Proposition 38 : On suppose q continue $q > 0$. Alors toute solution s'annule une infinité de fois

Proposition 39 : On suppose q continue $\int_0^{+\infty} |q| < +\infty$ alors (*) admet des solutions non bornées.

Proposition 40 : On suppose q continue $\int_0^{+\infty} |q| < +\infty$ alors les solutions de $y'' + (1+q(x))y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}$

(1,6) Proposition 41 : Soit $q_1 \leq q_2$ et y_1 une solution non nulle de $y'' + q_1 y = 0$. Entre deux zéros de y_1 il y a (au moins) un zéro de y_2. Entre deux zéros de y_2 il y a au plus un zéro de y_1.

Application 42 : Soit y une solution non nulle de $y'' + ty = 0$ et a_n le nombre de zéros de y sur $[0, n]$. Alors $a_n \sim \frac{2}{3\pi} n^{\frac{3}{2}}$

(2) Lemme 43 : (Relèvement)

Proposition 44 : Soit $a \in \mathbb{R}$ $q \in C^1([a, +\infty[)$ $q > 0$ et y une solution non nulle de $y'' + qy = 0$. Si $N(x) = |\{t \in [a, x] \mid y(t) = 0\}|$ alors $N(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q(u)}\, du$

IV Stabilité des équations différentielles

(3) Définition 45 Un point d'équilibre y^* est un point vérifiant $f(y^*) = 0$

On considère une équation différentielle de la forme $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ et on suppose qu'il existe une unique solution maximale $y(t_0) = y_0$

Définition 46 on dit que la solution y est stable s'il existe une boule $\overline{B}(y_0, r)$ et $C > 0$ tel que pour $z \in \overline{B}(y_0, r)$ Solution maximale $\tilde{y}$ de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = z \end{cases}$ est définie sur $[t_0, +\infty[$

et $\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq C \|y_0 - z\|$ $\forall t > t_0$.

Définition 47 La solution est asymptotiquement stable s'il existe $\gamma : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $\lim_{+\infty} \gamma = 0$ et

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \gamma(t) \|y_0 - z\|$$

Théorème 48 Les solutions de $Y' = AY$ sont :

- asymptotiquement stables ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$ $Re(\lambda) < 0$
- stables ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$ $Re(\lambda) \leq 0$ et $Re(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ non défective.

DVP 2

(7) Théorème 49 (Lyapunov)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $f(0) = 0$. On pose $A = Jac(f)(0)$. On suppose que $Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour $\|y_1\| \leq \alpha$ la solution maximale de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_1 \end{cases}$ est asymptotiquement stable.

(6) Application 50 (Pendule de Van der Pol). Soit $\varepsilon \in [-1, 1]$ on considère l'équation $x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$

si $\varepsilon < 0$ la solution nulle est asymptotiquement stable

si $\varepsilon = 0$ la solution nulle est stable non asymptotiquement stable

si $\varepsilon \in]0, 1]$ pas stable mais dur j'ai l'impression

Théorème : Van der Pol.

Cf 215

2.13 Leçon 221 : Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

On peut trouver plein d'exemples intéressants (mais non élémentaires) dans le livre *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel* S.Gonnord N.Tosel et dans *Oraux X-ENS Analyse 4* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas.

Références utilisées :

— (1) *Equations différentielles* F.Berthelin
— (2) *Oraux X-ENS Analyse 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Analyse numérique et équtions différentielles* JP.Demailly
— (4) *Oraux X-ENS Analyse 4* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Analyse fonctionnelle* H.Brézis
— (6) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (7) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $I \subset \mathbb{R}$ intervalle $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \mapsto b(t) \in \mathbb{K}^n$ continues.

I Théorème de Cauchy linéaire

A. Le théorème

Lemme 1: (Lemme de Grönwall). Soit $t_0 \in I$ $a \in \mathbb{R}$ $u, v \in C(I, \mathbb{R})$. Supposons $u, v \geq 0$ et pour tout $t \in I$

$$u(t) \leq a + \left| \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds \right|$$

Alors pour $t \in I$ $u(t) \leq a e^{\left| \int_{t_0}^{t} v(s)ds \right|}$

Théorème 2: Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ alors il existe une et une seule solution de $\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Remarque 3: Toute équation d'ordre p dans $\mathbb{K}^n$ peut être ramené à une équation d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^{n \times p}$ en considérant $z = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$

B. Structure de l'ensemble des solutions.

Définition 4: On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de $y'(t) = A(t)y(t)$ (E_H) et $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$

Proposition 5: Soit $t_0 \in I$ Alors $\Phi : \mathcal{S}_H \to \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. $y \mapsto y(t_0)$

En particulier $\dim(\mathcal{S}_H) = n$

Corollaire 6: $\mathcal{S}_E$ est un ea de direction $\mathcal{S}_H$ de dim n.

C. Résolvantes et Wronskien.

Définition 7: Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ n solutions de E_H on dit que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ est une base de $\mathcal{S}_H$.

Définition 8: On appelle wronskien de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ le déterminant de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dans la base canonique. $W(t) = \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$

Proposition 9: W est de classe C^1 sur I et: $\forall t \in I$ $W'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\, W(t)$ $W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds}$

Corollaire 10: $\forall t \in I$ $W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))ds}$

Application 11: Il y a équivalence entre:
i) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ est un système fondamental de solution
ii) $\forall t \in I$ $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ libre dans $\mathbb{K}^n$
iii) $\exists t \in I$ $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ libre dans $\mathbb{K}^n$.

Application 12: Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} |q| < +\infty$ alors les solutions de $y'' + qy = 0$ sont définies sur $\mathbb{R}^+$ et il existe des solutions non bornées.

Définition 13: On appelle matrice résolvante de E_H l'unique application $t \mapsto R(t, t_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie

$$\begin{cases} R'(t) = A(t)R(t) \\ R(t_0) = I_n \end{cases}$$

Proposition 14:
- $\forall t \in I$ $R(t, t) = I_n$
- $\forall (t_0, t_1, t_2) \in I^3$ $R(t_2, t_1)R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$
- l'unique solution de $\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(t_0) = V_0 \end{cases}$ $y(t) \in \mathbb{K}^n$ est $y(t) = R(t, t_0)V_0$.

II Résolutions explicites

A. Formule de Roux-Duhamel

Proposition 15: (Variation de la constante) Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ système fondamental de E_H, on cherchant une solution particulière de E

(1)

sous la forme $y(t) = R(t,t_0)c(t)$ le vecteur $c(t)$ doit vérifier $R(t,t_0)c'(t) = b(t)$

Proposition 15 : (Formule de Roab-Duhamel). L'unique solution de (E) vérifiant $y(t_0) = y_0$ est :

$$y(t) = R(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)b(s)ds$$

Proposition 16 $(n=1)$ $R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$

Application 17 : $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{ix\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ $a>0$

f C^1, $f+f' \to 0$ alors $f \to 0$

B. Cas constants

Proposition 18 Si $t \mapsto A(t)$ est constante alors $R(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}$

est $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds$

Exemple 19 solutions de $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = -2x + 3y - 2z \\ z' = -2x + y \end{cases}$

Proposition 20 Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On note $r_1, \dots, r_k$ les racines de $X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ de multiplicités m_i. alors toute solution de $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$ est de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} P(t)e^{r_i t} \quad \text{où } \deg(P_i) < m_i$$

Remarque 21. Si $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et qu'on veut les solutions réelles on prend les parties imaginaires/réelles des solutions complexes.

Exemple 22 : (Circuit RLC) la charge du condensateur vérifie $q'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E$ donc on peut en donner une expression explicite.

C. Par développement en série entière.

(2)

Définition 23 (Equation de Bessel) L'équation de Bessel est $xy'' + y' + xy = 0$

(4)

Proposition 24 : Il existe une unique fonction f développable en série entière telle que $f(0)=1$ vérifiant l'équation de Bessel elle est donnée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n n_0'^2}$

(2)

Application 25 : $\forall x \in]-1,1[$ $\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n_0'^2}{(2n+1)'_0} x^{2n+1}$

$\forall x \in]-1,1[$ $\arcsin(x)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{n^2 \binom{2n}{n}}$

III Etudes qualitatives

A. Système linéaire réel d'ordre 1 de taille 2.

(1)

But 26 : On étudie ici les solutions de $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

en fonction de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Proposition 27 : On note λ, μ les valeurs propres (éventuellement complexes de A). En annexe 1 il y a les différentes situations.

B. Zéros des solutions des équations différentielles

(1)

Définition 28 : Un zéro d'une fonction f est dit simple si $f(t)=0$ et $f'(t) \neq 0$.

Théorème 29 : Soit y une solution de $y'' + py' + qy = 0$ avec p, q continues. Alors les zéros de y sont simples donc isolés

Théorème 30 : Soit y_1, y_2 deux solutions indépendantes de $y'' + py' + qy = 0$ avec p, q continues. Alors entre deux zéros de y_1 il y a un zéro de y_2.

Proposition 31 : Soit $q_1 \leq q_2$ et y_1 une solution non nulle de $y'' + q_1 y = 0$. Entre deux zéros de y_1 il y a (au moins) un zéro de y_2. Entre deux zéros de y_2 il y a au plus un zéro de y_1.

(1)

Application 31 : Soit y une solution non nulle de $y'' + ty = 0$ et a_n le nombre de zéros de y sur $[0,n]$. Alors $a_n \sim \frac{2}{3\pi} n^{\frac{3}{2}}$

(7)

Proposition 33: Soit $a \in \mathbb{R}$ $q \in C^1([a,+\infty[)$ $q>0$ et y une solution non nulle de $y''+qy=0$. Si $N(x) = |\{t \in [a,x] / y(t)=0\}|$ alors $N(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_a^x \sqrt{q(u)}\,du$

/DVP 1

IV Stabilité des équations différentielles

(3)

Définition 34: On considère ici une équation différentielle $y' = f(y)$ dite autonome.

Définition 35: Un point d'équilibre y^* est un point vérifiant $f(y^*)=0$.

On considère une équation différentielle de la forme $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ et on suppose qu'il existe une unique solution maximale.

Définition 36: on dit que la solution y est stable s'il existe une boule $\overline{B}(y_0,r)$ et $C>0$ tel que pour $z \in \overline{B}(y_0,r)$ solution maximale $\tilde{y}$ de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = z \end{cases}$ est définie sur $[t_0,+\infty[$ et $\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq C\|z - y_0\|$ $\forall t \geq t_0$.

Définition 37: La solution est asymptotiquement stable s'il existe $\gamma : [t_0,+\infty[\to \mathbb{R}$ $\lim_{+\infty} \gamma = 0$ et

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \gamma(t)\|y_0 - z\|$$

Théorème 38: Les solutions de $Y' = AY$ sont :
- asymptotiquement stables ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$ $Re(\lambda) < 0$
- Stables ssi $\forall \lambda \in Sp(A)$ $Re(\lambda) \leq 0$ et $Re(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ non défective.

DVP 2

(6)

Théorème 39: (Lyapunov)
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $f(0)=0$. On pose $A = Jac(f)(0)$. On suppose que $Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour $\|y_1\| \leq \alpha$ la solution maximale de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_1 \end{cases}$ est asymptotiquement stable.

(4)

Application 40: (Pendule de Van der Pol). Soit $\varepsilon \in [-1,1]$ on considère l'équation $x'' + \varepsilon(x^2-1)x' + x = 0$
si $\varepsilon < 0$ la solution nulle est asymptotiquement stable
si $\varepsilon = 0$ la solution nulle est stable non asymptotiquement stable
si $\varepsilon \in]0,1]$ pas stable mais dur j'ai l'impression

V Méthodes Hilbertiennes.

(5)

But 41: (Problème de Sturm Liouville) Le but est de montrer l'existence et l'unicité de u vérifiant

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & p \in C^1(\bar{I}) \quad p>0 \\ u(0) = u(1) = 0 & q \in C(\bar{I}) \quad f \in C^0(\bar{I}) \end{cases} \quad (*)$$

On note $I =]0,1[$

Définition 42: On note $H^1(I) = \{u \in L^2(\bar{I}) / u' \in L^2_{distrib}(\bar{I})\}$

Proposition 43: Tout $u \in H^1(I)$ admet un représentant continu $\tilde{u}$.

Proposition 44: $H^1(I)$ est un Hilbert pour $\|u\|_H = \|u\|_2 + \|u'\|_2$

Définition 45: $H^1_0(I) = \overline{C^\infty_c(I)}^{\|\cdot\|_{H^1}}$

Proposition 46: $H^1_0(I) = H^1(I) \cap \{u \in C^0 / u(0) = u(1) = 0\}$

Théorème 47: (Inégalité de Poincaré):

$$\exists C>0,\ \forall u \in H^1_0 \quad \|u\|_2 \leq C\|u'\|_2$$

Application 48: Si $f \in L^2(I)$ il existe une unique solution u au sens faible suivant:

$$\forall v \in H^1_0(I) \quad \int pu'v' + \int quv = \int fv$$

Proposition 49: Si $f \in C(I)$ alors l'unique solution faible de $(*)$ est C^2 et est en fait une solution forte.

2.14 Leçon 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Références utilisées :

- (1) *Analyse* X.Gourdon
- (2) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec
- (3) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
- (4) *Oraux X-ENS Analyse 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Suites numériques . Convergence . Valeur d'adhérence . Exemple et applications

223

(1)

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Suites numériques

A. Généralités

Définition 1: Une suite numérique est une application $n \to U_n$

Remarque 2: Une suite se note $(U_n)_n$ et U_n désigne le nème terme de la suite

Définition 3: On dit que $(U_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{K}$ si
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \ |U_n - l| < \varepsilon$

Si l existe alors l est unique et on note $U_n \to l$ ou $\lim U_n = l$ ($n \to +\infty$)

Proposition 4: On suppose $U_n \to l$ et $V_n \to l'$ ($n \to +\infty$) alors:
- $U_n + V_n \to l + l'$ $\quad \lambda U_n \to \lambda l$ $\quad \lambda \in \mathbb{K}$
- $U_n V_n \to l l'$ $\quad$ - $(l' \neq 0)$ $\frac{U_n}{V_n} \to \frac{l}{l'}$

Proposition 5: Si $(U_n)_n$ converge alors toute suite extraite $U_{\varphi(n)}$ aussi et vers la limite.

Application 6: Si K compact alors K fermé.

Proposition 7: Si $(U_n)_n$ converge alors $(U_n)_n$ bornée
Si $(U_n)_n$ monotone bornée alors $(U_n)_n$ converge

Application 8: Comparaison série/intégrale (cf 224).

Proposition 9: (Théorème des gendarmes). Soit $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ et $(W_n)_n$ trois suites telles que $U_n \leq V_n \leq W_n$. Si $U_n \to l$ et $W_n \to l$ alors $V_n \to l$.

Exemple 10 $\frac{\sin(n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Proposition 11: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $x \in \mathbb{R}$ ssi pour toute suite $(U_n)_n$ tendant vers x, $(f(U_n))_n$ tend vers $f(x)$.

Application 12:
$x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Théorème 13: (Cesaro) - Soit $(U_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors
$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k \to l$

Contre-Exemple 14: $U_n = (-1)^n$

Application 15: Si la série de fourrier converge alors c'est vers f.

Définition 16: (Suites de Cauchy). $(U_n)_n$ est de Cauchy si:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0 \ |U_p - U_q| < \varepsilon$

Proposition 17: $(U_n)_n$ converge ssi elle est de cauchy

Application 18: La série harmonique diverge.

Définition 19: (Suites adjacentes). Soit $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites réelles. $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont dites adjacentes si:
- $\forall n \ U_n \leq V_n$
- $(U_n)_n$ croissante $(V_n)_n$ décroissante
- $V_n - U_n \to 0$

(1)

Proposition 20: Si $(U_n)_n$ et (V_n) sont adjacentes alors elles convergent et sont de même limites.

Application 21: La Dichotomie, Critère spécial pour les séries alternées, le théorème des valeurs intermédiaires.

B. Suites particulières.

Proposition 22: (Suites arithmétiques). Si $U_{n+1} = U_n + r$ alors $U_n = U_0 + nr$

Proposition 23: (Suites géométriques). Si $U_{n+1} = q U_n$ alors $U_n = U_0 q^n$

Proposition 24: (Suite arithmético-géométrique). Soit $a \neq 1$ $b \in \mathbb{R}$
Si $U_{n+1} = aU_n + b$ alors $U_n = a^n (U_0 - l) + l$ où $l = al + b$

Proposition 25: (Suites récurrentes linéaires d'ordre d).
Si $U_{n+d} = a_{d-1} U_{n+d-1} + \dots + a_0 U_n$ alors
$U_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n) r_i^n$
où r_i sol de $x^d = a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0$ de multiplicité m_i et

alors (p_i) < ∞

C. Suites remarquables.

Définition 26 : Soit $(u_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Pour $0 \le a < b \le 1$ on note

$$S_n(a,b) = \left| \{ k \in [\![1,n]\!] \mid u_k \in [a,b] \} \right|$$

On dit que (u_n) est équirépartie si $\frac{S_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$ pour tout $a<b$.

Proposition 27 : (Critère de Weil) Soit $(u_n)_n \in [0,1]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $(u_n)_n$ équirépartie
- $\forall f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(u_k) \to \int_0^1 f$
- $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \to 0$

II Valeurs d'adhérences.

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition 28 : $x \in \mathbb{K}$ est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \ge n \quad |u_p - x| < \varepsilon$$

On note $Va(u)$ l'ensemble des va de $(u_n)_n$.

Exemple 29 : $Va((-1)^n) = \{\pm 1\}$

Proposition 30 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $x \in Va(u)$

ii) Il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ qui converge vers x

iii) $x \in \bigcap_{p\ge 0} \overline{\{u_n \mid n \ge p\}}$

iv) x est un point d'accumulation de $\{u_n \mid n \ge 0\}$

Proposition 31 : $Va(\sin(n)) = Va(\cos(n)) = [-1,1]$.

Théorème 32 : (Bolzano Weierstrass). Si $(u_n)_n$ est bornée alors $Va(u) \neq \emptyset$

Application 33 : Le théorème de Heine

Proposition 34 : Si $(u_n)_n$ a une unique valeur d'adhérence et $(u_n)_n$ bornée alors $(u_n)_n$ converge.

Application 35 : Soit $(x_n)_n$ bornée et $y_n = x_n + \frac{x_{2n}}{2}$ alors $(x_n)_n$ converge ssi $(y_n)_n$ converge

Proposition 36 : $(u_n)_n$ converge $\Rightarrow Va(u)$ est un singleton

Application 37 : $((-1)^n)_n$ diverge

Définition 38 : on définit les limites supérieures/inférieures par

$$\varliminf u_n = \sup_{n\ge 0} \inf_{k\ge n} u_k \quad \text{et} \quad \varlimsup u_n = \inf_{n\ge 0} \sup_{k\ge n} u_k \in \overline{\mathbb{R}}$$

Exemple 39 : $\varliminf \sin(n) = -1$ $\varlimsup \sin(n) = 1$

$\varliminf \frac{\varphi(n)}{n} = 0$ $\varlimsup \frac{\varphi(n)}{n} = 1$

Proposition 40 : $\varliminf u_n$ (resp. $\varlimsup u_n$) est la plus petite va (resp. grande) de (u_n).

De plus si $\varliminf u_n = \varlimsup u_n = \ell$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ dans $\overline{\mathbb{R}}$

(2)

Exemple 41 : Le rayon de convergence de $\sum_{n\ge 0} u_n z^n$ est $\frac{1}{\varlimsup \sqrt[n]{|u_n|}}$

(1)

Proposition 42 : Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ tels que $u_{n+p} \le u_n u_p$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)_n$ converge vers $\inf_{n\ge 1} \frac{u_n}{n}$

Application 43 : Soit E Banach et $T \in \mathcal{B}(E)$. Alors $(\|T^n\|^{\frac{1}{n}})_n$ converge et on appelle cette limite le rayon spectral de T.

III Approximation de Réels / de solutions d'équations

(2)

A. Méthode de Newton

Proposition 44 : (Méthode de Newton). Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 on suppose $f' > 0$ $f(c) < 0$ $f(d) > 0$. Soit a l'unique zéro de f. $\exists \alpha > 0$, $\forall u_0 \in]a-\alpha, a+\alpha[$ la suite u_n définie par $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ converge vers a de manière quadratique

- On suppose de plus $f'' > 0$ sur $[c,d]$ alors

Application 41 : $x_0 = 2$ $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ alors $x_n \to \sqrt{2}$ quadratiquement.

B. Transformée d'Euler

Définition 42 : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on pose $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$ et $\Delta^p = \Delta \circ \Delta^{p-1}$

Proposition 43 : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge alors sa transformée d'Euler $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$ converge et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$$

Exemple 43 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}} = \log(2)$. La dernière série converge beaucoup plus rapidement.

Exemple 44 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p!_o}{1 \times \dots \times (2p+1)} = \frac{\pi}{4}$. La deuxième série converge beaucoup plus rapidement.

C. Méthode d'Euler Explicite.

Cf 226

IV Développements asymptotiques

- Cf 224
- Méthode des petits pas DVP 2
- Wallis App Stirling
- nb zéros EDO (si Laplace).

2.15 Leçon 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites de fonctions.

C'est une leçon difficile, le jury indique clairement qu'il ne veut aucune théorie et uniquement des exemples. Dans une telle leçon, il faut être capable de prouver rapidement tous les exemples que l'on met dans son plan.

Références utilisées :

- (1) *Analyse* X.Gourdon
- (2) *Oraux X-ENS Analyse 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (3) *Oraux X-ENS Analyse 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (4) *Oraux X-ENS Analyse 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (5) *Introduction à la théorie analytique et probabilistes des nombres* G.Tennenbaum
- (6) *Calcul Intégral* B.Candelpergher
- (7) *Oraux X-ENS Analyse 4* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (8) *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel* S.Gonnord N.Tosel
- (9) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec

224 — Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

I Développements limités / développements asymptotiques.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, I intervalle de $\mathbb{R}$

Proposition 1 : Si f est n fois dérivable en 0 alors f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n suivant :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Exemple 2 : Cf Annexe pour les DL des fonctions usuelles.

Proposition 3 : Si f n fois dérivable admet en 0 DL d'ordre n en 0 $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ alors f' admet en 0 DL d'ordre $n-1$ en 0 donné par $f'(x) = a_1 + \dots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$

Application 4 : $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$

Proposition 5 : Avec les mêmes notations que la proposition 3 on a $\int_0^x f(t)dt = a_0 x + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1})$

Application 6 : $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

Exemple 7 : $\log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Exemple 8 : $\arctan(x) \underset{x \to +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Exemple 9 : $(x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Application 10 : $\frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2$

Application 11 : TCL

Application 11 : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

II Développement asymptotiques de suites / séries

A. Suites récurrentes.

Proposition 12 : Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x - ax^p + o(x^p)$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour $x_0 \in [0, \delta]$ la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers 0 et vérifie

$$x_n \sim \frac{1}{(n a (p-1))^{\frac{1}{p}}}$$

Exemple 13 : $f = \sin$ $x_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\log(n)}{n\sqrt{n}}\right)$

Exemple 14 : $f(x) = \ln(1+x)$ $x_n = \frac{2}{n} + \dots$

Exemple 15 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ et $u_0 > 0$ alors $u_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

B. Suites définies implicitements.

Exemple 16 : Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \to 1$ alors $u_n \sim \frac{1}{(3n)^{\frac{1}{3}}}$

Exemple 17 : Soit u_n la plus grande racine réelle de $X^{2n} - 2nX + 1$ alors $u_n = 1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

Exemple 18 : Soit u_n l'unique racine réelle de $X^5 + nX - 1$ Alors $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$

Exemple 19 : Soit x_n l'unique solution dans $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ de $\tan(x) = x$. Alors $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n\pi}\right)$

C. Séries numériques.

Proposition 20 : Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux décroissante. Alors $\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)_n$ et $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_n$ sont de mêmes natures.

Application 21 : Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ (constante d'Euler) telle que

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Application 22 : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

(1)

Application 23 : $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k} = 1-\gamma$

Exemple 24 : $\alpha < 1$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$ $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$

$\alpha > 1$ $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$

Exemple 25 : $\sum_{k=1}^{n} \frac{\log(k)}{k} = \frac{\log^2(n)}{2} + C + o(1)$

Application 26 : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n} = \left(\gamma - \frac{\log 2}{2}\right)\log(2)$.

Exemple 27 : (Fonction Théta de Jacobi). $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$

Proposition 28 : Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites. On suppose $b_n \geq 0$ $\sum b_n$ diverge et $a_n \sim b_n$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

(3)

Application 29 : (Série de Lambert). Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha x^n}{1-x^n}$. Alors $\varphi(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\zeta(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$

(1)

Proposition 30 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante intégrable. Alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

(2)

Application 31 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^{xt}-1}\,dx \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2t}$

D. Méthode de Newton.

Proposition 32 :

Cf 226

E. Théorie analytique des nombres

(5)

Proposition 33 : On note $\sigma_0(n)$ le nombre de diviseurs de n. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = n\ln(n) + (2\gamma-1)n + O(\sqrt{n})$$

Proposition 34 : On note $\sigma_1(n)$ la somme des diviseurs de n.

Alors $\sum_{k=1}^{n} \sigma_1(k) = \frac{n^2\pi^2}{12} + O(n\ln(n))$

Proposition 35 : $\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n\ln(n))$

App : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{6} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\pi^2(1-x)^2}$

Théorème 36 : (Mertens) $\sum_{p=n} \frac{\ln(p)}{p} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + O(1)$ (p premier)

$$\sum_{p\leq n} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln(n))$$

OVP 1

III. Développements asymptotiques d'intégrales

(7)

A. Techniques élémentaires.

Exemple 37 : (Logarithme intégral)

$$Li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \ldots + \frac{n!\,x}{\log^{n+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\log^{n+1}(x)}\right)$$

(4)

Exemple 38 : $\int_x^{+\infty} e^{t^2}dt = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\,o(u_n(x)) \; u_n(x) = \frac{(-1)^n(2n)!\,0!\,e^{-x^2}}{2^{2n+1}n!\,x^{2n+1}}$

Exemple 39 $\int_N^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{(2k)!\,0\cos(N)}{N^{2k+1}} + \frac{(2k+1)!\,0\sin(N)}{N^{2k+2}}\right) + o\left(\frac{1}{N^{2n+2}}\right)$

Exemple 40 : (Sinus cardinal)

$$\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} c\ln(x) + d + o(1)$$

B. Méthode de Laplace.

Proposition 11 : φ atteint son maximum en $t_0 \in]a,b[$ $\varphi''(t_0) < 0$ et $f(t_0) \neq 0$.

(6)

$$\int_a^{t_0} f(t)\, e^{x\varphi(t)}\,dt \sim \int_{t_0}^{b} f(t)\, e^{x\varphi(t)}\,dt \sim e^{x\varphi(t_0)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(t_0) \sqrt{\frac{2}{-\varphi''(t_0)}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Remarque 12 : Sous les hypothèses précédentes :

$$\int_a^b f(t)\, e^{x\varphi(t)} \underset{x\to+\infty}{=} e^{x\varphi(t_0)} \left(f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(t_0)}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Proposition 13 : φ atteint son maximum en a. On suppose $\varphi' \neq 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) < 0$ et $f(a) = 0$

Alors $\int_a^b e^{x\varphi(t)}\,dt = e^{x\varphi(a)} \left(\frac{f(a)}{-\varphi'(a)} \times \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

Application 43 (Stirling $x\to+\infty$) $\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} + O(x^{x-x} e^{-x})$

(11)

Application 44 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n_0')^2} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2\sqrt{x}}}{x^{\frac{1}{4}}}$

Application 45 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-\lambda x} e^x\,dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\, s\, e^{\alpha s}$ $\alpha > 0$ $s = \frac{e^{\frac{1}{\alpha}}}{e}$

Application 46 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k_0'} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$.

C. Un lien série/intégrale

(6)

Définition 45 : Soit $(p_n)_n$ la suite de polynômes tels que $p_0 = 1$ $p_n = p_{n-1}'$ et $p_n(0) = p_n(1)$ pour tout $n \geq 0$. On pose $B_n = \frac{p_n}{n_0'}$ et on les appelle les polynômes de Bernoulli.

Proposition 46 : (Formule d'Euler Mac-Laurin)

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $p < q$ deux entiers alors

$$\int_p^q f(t)\,dt = \frac{f(p)+f(q)}{2} + \sum_{k=p+1}^{q-1} f(k) + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{k_0'} \left(f^{(k-1)}(q) - f^{(k-1)}(p)\right) + (-1)^m \int_p^q \frac{b_m(x)}{m_0'} f^{(m)}(x)\,dx$$

(6)

où $b_m(x) = B_m(x - \lfloor x \rfloor)$

Application 47 :

$$n_0' = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \exp\left(\sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k(k-1)} \frac{1}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^m}\right)\right)$$

(7)

Application 48 :

$$H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k_0'} \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

(5)

Application 49 : (Erreur méthode des trapèzes).

IV Equations différentielles

(9)

Exemple 50 : Si $x' = x^2 - t$ alors $x(t) \sim -\sqrt{t}$

(8)

Proposition 51 : Soit Q_n polynôme tel que $\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)} = Q_n e^{\frac{x^2}{2}}$

Alors $Q_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-x^2}{4}} e^{x\sqrt{n}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}$

Application 52 : Soit I_n le nombre d'involutions de S_n. Alors

$$I_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}} e^{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}$$

(7)

Théorème 53 : (Sturm)

(6)

Application 54 : Soit f solution non nulle de $y'' + ty = 0$ et $a_n = |\{0 \leq t \leq n \mid f(t) = 0\}|$ alors $a_n \sim \frac{2}{3\pi} n^{\frac{3}{2}}$

Proposition 55 : (Nombre de zéros d'une EDO)

(9)

Probas : TCL par DL de la fonction caractéristique + marche aléatoire.

/DVP1

2.16 Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Références utilisées :

— (1) *Analyse* X.Gourdon
— (2) *Oraux X-ENS Analyse 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (4) *Méthodes numériques* A.Quarteroni R.Sacco F.Saleri

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations

226

On désigne par (E,d) un espace métrique

I Suites récurrentes

A. Généralités

(1)

Définition 1: Une suite $(u_n)_n$ est dite récurrente d'ordre d s'il existe $f: E^d \to E$ telle que $u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-d})$ $n \geq d$. Une telle suite est entièrement déterminée par f et $u_0, \dots, u_d$.

Proposition 2: Quitte à vectorialiser on peut supposer $d=1$.

Proposition 3: Soit $(u_{n+1} = f(u_n))_n$ une suite convergente vers ℓ, alors si f continue en ℓ, $f(\ell) = \ell$.

Proposition 4: Soit $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ bornée telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ est un segment

(2)

Application 5: (Lemme de la Grenouille). Soit $u_{n+1} = f(u_n)$ une suite réelle bornée alors u_n cv ssi $u_{n+1} - u_n \to 0$.

B. Suite réelle et monotonie de f

(1)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $f: I \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset I$.

Proposition 6: Si f croissante alors (u_n) est monotone de sens de monotonie donné par le signe de $u_1 - u_0$

Exemple 7:

Proposition 8: Si f décroissante alors les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de variation opposées.

C. Cas explicite

(1)

Proposition 9: (Suite arithmétique) $u_{n+1} = u_n + r$ $u_n = u_0 + nr$

Proposition 10: (Suite géométrique) $u_{n+1} = q u_n$ $u_n = q^n u_0$.

Proposition 11: (Suite arithmético-géométrique) $a \neq 1$ $u_{n+1} = au_n + b$ alors $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$ où $\ell = a\ell + b$.

(1)

Proposition 12: (Suites récurrentes linéaires à coeffs constants). si $u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_d u_{n-d}$ $n \geq d$ $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^d$ alors

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} P_i(n) r_i^n$$

où $(r_1, \dots, r_k)$ sol de $x^d - a_1 x^{d-1} - \dots - a_d = 0$ de multiplicité m_i et $P_i \in \mathbb{C}_{m_i - 1}[X]$.

Remarque 13: Si on cherche des suites à valeurs réelles on prend les parties réelles / imaginaires des solutions complexes.

Exemple 14: Suite de Fibonacci.

(3)

D. Point fixe

Théorème 15: (Point fixe Picard). Supposons (E,d) complet et soit $f: E \to E$ contractante. Alors f admet un unique point fixe α et pour $u_0 \in E$ $u_{n+1} = f(u_n)$ on a:

$$d(u_n, \alpha) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_0, \alpha).$$

Application 16: Théorème de Cauchy-Lipschitz

Application 17: Théorème d'inversion locale

Remarque 18: Toutes les hypothèses sont importantes.

Proposition 19: Si (E,d) compact et:

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad (x \neq y)$$

alors f admet un unique point fixe.

Théorème 20: Types de points fixes

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ C^1 et $a \in I$ un point fixe de f.

- si $|f'(a)| < 1$ il existe $\delta > 0$, $\forall u_0 \in [a-\delta, a+\delta]$ $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a
- si $|f'(a)| > 1$ la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers a ssi elle stationne à a.
- si $|f'(a)| = 1$ on ne peut rien dire.

E. Développement asymptotique

Théorème 21 : Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ continue admettant le DL en 0 suivant :

$$f(x) = x - \alpha x^p + \beta x^{2p+1} + o(x^{2p+1}) \quad \Big) \text{OVP1}$$

$\alpha > 0$ $\beta \neq 0$ $\gamma := \frac{(1+p)\alpha^2}{2} - \beta \neq 0$

alors pour u_0 assez proche de $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0 et

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[p]{p\alpha n}} - \frac{\gamma}{p^2 \alpha^2 \sqrt[p]{p\alpha}} \frac{\ln(n)}{\sqrt[p]{n}\, n} + o\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt[p]{p}\, n}\right)$$

Exemple 22 : $f = \sin$ $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$

Exemple 23 : $f(x) = \ln(1+x)$ $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3} \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

II Application à la résolution approchée de $f(x) = 0$.

Cadre 24 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on veut résoudre $f(x) = 0$.

A. Dichotomie

Proposition 25 : Si $U = I = [a,b]$ et f a un unique zero x dans I alors on définit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par :

$$a_0 = a \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n) \geq 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases} \quad b_0 = b \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } f(b_n) \geq 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sont adjacentes, de limite x et :

$$|a_n - b_n| \leq \frac{|a-b|}{2^n}$$

Application 26 : Le Théorème des valeurs intermédiaires.

B. Méthode de Newton.

(3) Proposition 27 : $I = [c,d]$ $f(c) < 0 < f(d)$ $f' > 0$ sur $[c,d]$ et $f \in C^2$. Soit $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. Alors f a un unique zero dans a, et pour u_0 proche de a, u_n tend vers a de manière quadratique.

Si de plus $f'' > 0$ sur I alors on peut prendre n'importe quel $u_0 > a$.

Application 28 : $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$

Proposition 29 : Pour $U \subset \mathbb{R}^n$ la suite à considérer est $u_{n+1} = u_n - d(f(u_n))^{-1} \cdot f(u_n)$

III Applications à la résolution approchée de $Ax = B$.

(4)

A. Méthodes itératives

Cadre 30 : On veut résoudre $Ax = b$ d'inconnue x où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Définition 31 : On décompose $A = P - N$ P "facile à inverser" et on définit la suite $x^{(n)}$ par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{C}^n \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + P^{-1} r^{(k)} \end{cases} \quad \text{où } r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

Proposition 32 : Si $x^{(k)} \to x$ alors $Ax = b$. On dit que la méthode converge si $r^{(k)} \to 0$.

Proposition 33 : La méthode converge ssi $\rho(I - AP^{-1}) < 1$ $\rho(NP^{-1})$

Définition 34 : (Méthode de Jacobi). $P = D = \mathrm{Diag}(A)$ $N = D - A$.

Définition 35 : (Méthode de Gauss-Seidel). $P = D - E$ $N = P - A$ $D = \mathrm{Diag}(A)$ $E = (-a_{i,j}\delta_{i>j})$

Définition 36 : (Méthode de relaxation). $(\omega \neq 0)$ $P = \frac{D}{\omega} - E$ $N = P - A$

Proposition 37 : Si $A \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ alors la méthode de relaxation converge ssi $0 < \omega < 2$.

B. Méthode du gradient, minimisation de fonctionnelles

But 38 : Résoudre $Ax = b$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Définition 39 : Soit $f(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

Proposition 40 : f est convexe coercive et atteint son minimum en un unique point X qui vérifie $AX = b$

Définition 41 : On considère $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \rho \nabla(f(X^{(k)}))$ où $\rho > 0$. On l'appelle méthode de gradient à pas fixe.

Définition 42 : $X^{(n+1)} = \underset{u \in x^{(k)} + F_k}{\operatorname{argmin}} f(u)$ où $F_k = \mathrm{Vect}(\nabla(f(X^{(k)})))$

méthode de gradient à pas optimal.

Lemme 43 : (Inégalité de Kantorovich). Notons $S_p(A) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$

alors pour $X \in \mathbb{R}^n$ $\dfrac{\|X\|^4}{\|X\|_A^2 \, \|X\|_{A^{-1}}^2} \geq \dfrac{4 \mu_1 \mu_n}{(\mu_1 + \mu_n)^2}$

où $\|X\|_A^2 = \langle AX, X \rangle$.

Proposition 45 : Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $X_{k+1} = X_k - \alpha_{k+1} R_k$

$\alpha_{k+1} = \dfrac{\|R_k\|^2}{\|R_k\|_A^2}$ $\quad R_k = AX_k - B$.

Alors $\|X_k - \bar{X}\| \leq \sqrt{\mathrm{cond}_2(A)} \left(\dfrac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1} \right)^k \|X_0 - \bar{X}\|$ où

$A\bar{X} = b$ $\quad \mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n}{\mu_1}$.

OVP

IV Application à la résolution approchée d'équations différentielles

A. Méthode d'Euler explicite.

(4)

Cadre 46 : Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue localement lipschitzienne par rapport à la 2ème variable. On veut résoudre numériquement $\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Définition 47 : Soit $L > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit $h = \dfrac{L}{N}$ on définit $(y_n)_n$ par $\begin{cases} y_0 = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \end{cases}$ $t_n = nh$

Définition 48 : On appelle erreur de consistance l'erreur

$$\varepsilon_N = \sum_{n=0}^{N-1} |y(t_{n+1}) - y(t_n) - f(t_n, y_n)| \quad \text{où } y \text{ solution de } (A).$$

Définition 49 : On dit que le schéma est stable si :

$\forall \eta^{(n)} \; \forall L \; \forall N \; \exists C > 0$,

$\forall n \in [\![0, N]\!] \quad |Y_n - Z_n| \leq C \left(|Y_0 - Z_0| + \sum_{i=0}^{N-1} |\eta^{(i)}| \right)$

où $Z_{n+1} = Z_n + h f(t_n, Z_n) + \eta^{(i)}$

Définition 50 : Le schéma est dit convergent si :

$$\lim_{N \to +\infty} \| (y(t_n) - y_n)_n \|_\infty = 0$$

Proposition 51 : Le schéma d'Euler explicite est consistant, stable et convergent.

(4)

B. Equation de la chaleur : Différences finies.

Cadre 52 : On veut résoudre numériquement.

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u + f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

Soit $J, N > 0$ $\quad \delta x = \dfrac{L}{J}$ et $\delta t = \dfrac{T}{N}$.

Définition 53 : On définit $(U^n)_n \in \mathcal{M}_{J,1}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} U^{n+1} = -AU^n + F^n \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ U_0 = (u_0(j \delta x))_j \end{cases} \quad (\star)$$

$F^n = \left(f(t_n, j \delta x) \right)_j$ $\quad t_n = n \delta t$

Proposition 54 : Le schéma $(\star)$ est consistant, stable et convergent pour $\alpha := \dfrac{\delta t}{\delta x^2} < \dfrac{1}{2}$

Définition 55 : La condition $\alpha < \frac{1}{2}$ est appelée condition CFL.

(4)

2.17 Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Attention aux pièges vaseux dans lesquels on s'embourbe vite.

Références utilisées :

— (1) *Eléments d'Analyse Réelle* JE.Rombaldi
— (2) *Analyse* X.Gourdon
— (3) *Les contre-exemples en mathématiques* B.Hauchecorne
— (4) *Petit guide du calcul différentiel* F.Rouvière
— (5) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec
— (6) *Calcul intégral* B.Candelpergher

Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle
Exemples et applications.

(2)

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle $f : I \to \mathbb{R}$ fonction

I Continuité et dérivabilité.

A. Continuité.

Définition 6 : On dit que f est continue en $a \in I$ (resp à gauche resp à droite) si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ resp $f(a^-) = f(a)$ resp. $f(a^+) = f(a)$.

Définition 7 : On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Exemple 7 : $x \mapsto x^n$ $(n \geq 0)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 8 : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est continue nulle part $x \mapsto x\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est continue uniquement en 0.

Proposition 9 : Soit $x \in I$. f est continue en x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ tendant vers x $(f(x_n))_n$ tend vers $f(x)$.

Application 10 : $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en 0

Proposition 11 : Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue en $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors $f+g$, fg, λf, $f \circ g$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a (quand ces expressions ont un sens).

Exemple 12 : $x \mapsto \frac{e^{\cos(\arctan(x))}}{x^2+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 13 : On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x,y) \in I^2 \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Proposition 14 : Lipschitzienne $\Rightarrow$ UC $\Rightarrow$ continue

Remarque 15 : Les implications réciproques sont fausses.

B. Dérivabilité

(2)

Définition 13 : On dit que f est dérivable en $a \in I$ si $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.
On note alors $f'(a)$ cette limite. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tous les points de I.

Exemple 14 : $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$

Proposition 15 : Si f est dérivable en a alors f est continue en a. La réciproque est fausse comme le montre $x \mapsto |x|$.

Remarque 16 : On définit de même les dérivées à droites et à gauche. On les note f_g' et f_d'.

Définition 17 : On définit quand c'est possible la dérivée nième de f par $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ $f^{(0)} = f$.
On note $D^n(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ existe sur } I \}$
$C^n(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f^{(n)} \text{ continue sur } I \}$
$C^\infty(I) = \bigcap_{n \geq 0} C^n(I)$.

Proposition 18 $D^{n+1}(I) \subset C^n(I) \subset D^n(I)$ et les inclusions sont strictes.

Proposition 19 $D^n(I)$ et $C^n(I)$ sont des $\mathbb{R}$-ev stables par produit, inverse et compositions quand celles-ci ont un sens.

Proposition 20 : Si f et g sont n fois dérivables en a alors
$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Application 21 : Le coeff dominant de $x \mapsto \left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$ est $\frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{n_0^!}$.

Proposition 22 : Tableau de dérivées usuelles en annexe

Proposition 23 : Soit $f : I \to J$ bijective et dérivable. Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ ssi $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas
$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)}$$

Application 24 : $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Proposition 25 : (Fonction de Weierstrass). $0 < a < 1$ $b > \frac{1}{a}$
$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n x)$ est continue dérivable nulle part.

2.2.8

C. Conséquence du théorème de Baire

(2) Proposition 20 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, alors l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$

Proposition 21 : Il n'existe pas de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Proposition 22 : L'ensemble des fonctions continues dérivables nulle part est dense dans $C^0([0,1])$ — DVP 1

Théorème 23 : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors on a l'équivalence suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 0 \iff \exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\ f^{(n)}(x) = 0$$

II Applications de la continuité et dérivabilité.

A. Théorème généraux

(1) Théorème 25 : (Théorème valeur intermédiaire). On suppose f continue et I intervalle. Alors $f(I)$ est un intervalle

Application 26 : Si $f : I \to J$ continue bijective alors $f^{-1} : J \to I$ est continue. (I intervalle)

Application 27 : (I intervalle) $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est injective ssi elle est strictement monotone.

(3) Contre exemple 28 : Si I pas un intervalle c'est pas forcément vrai : prendre une bijection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

(1) Théorème 29 : (Rolle) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. On suppose $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

Application 30 : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé alors P' aussi.

Exemple 31 : $((X^2-1)^n)^{(n)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Application 32 : (Théorème de Darboux) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable alors $f'(I)$ est un intervalle. La réciproque au TVI est donc fausse.

Contre-Exemple 33 : Le théorème de Rolle est faux si f à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou pas dérivable.

(2) Proposition 34 : (Heine) Si f continue sur un compact alors f y est uniformément continue.

(5) Définition 35 : Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. On définit le nième polynôme de Bernstein de f par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}$$ — OVP

Proposition 17 : $\exists C > 0,\ \forall f \in C([0,1],\mathbb{R})\ \|B_n(f) - f\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ où ω est le module de continuité de f. De plus l'inégalité est optimale

(1) Proposition 36 : (Accroissements finis). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Application 37 : (Inégalité accroissement finis) Si f' bornée sur $[a,b]$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_\infty |x-y|$ pour $(x,y) \in [a,b]^2$

Application 38 : $(n+1)^{\overline{n+1}} - n^{\underline{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$

Application 40 : $\sum_{n>0} (\arctan(x+n) - \arctan(n))$ converge.

Application 41 : Théorème limite de la dérivée.

B. Formules de Taylor

(2) Proposition 42 : (Taylor reste intégrale). Soit $f \in C^{n+1}([a,b])$ alors pour $x \in [a,b]$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Application 43 : Si $f \in C^0(\mathbb{R})$ alors $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$

(1)

Proposition 44 : (Formule de Taylor Young). Soit $f \in C^{n+1}([0,b])$ alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$ $x \to a$

Application 45 : Calcul de limites, développements limités.

Proposition 46. (Formule de Taylor Lagrange). Soit $f \in C^{n+1}([a,b])$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Application 47 : Stabilité de schémas numériques

(4)

Application 48 : (Méthode de Newton)
$I = [c,d]$ $f(c)c0<f(d)$, $f'>0$ sur I et $f \in C^1$ sur I
Soit $U_0 \in I$ et $U_{n+1} = U_n - \frac{f(U_n)}{f'(U_n)}$ Alors f a un unique zero dans a, et pour U_0 proche de a, U_n tend vers a de manière quadratique.

(6)

Application 49 Méthode de Laplace par les intégrales.

III Régularité de fonctions particulières.

A. Fonctions monotones / convexes.

(2)

Proposition 48 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone alors f a un nombre de discontinuité au plus dénombrable.

Proposition 51 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe alors f continue sur $\mathring{I}$ et possède des dérivées à gauche et droite en tout point de $\mathring{I}$. De plus $x \mapsto f'(x)$ et $x \mapsto f'_d(x)$ sont croissantes. f admet donc au plus dénombrable de discontinuité.

Exemple 52 : $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1[\\ 2 & x = 1 \end{cases}$

Proposition 53 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable alors :
f convexe $\Leftrightarrow$ f' croissante $\Leftrightarrow$ C_f au dessus de ses tangentes

(2)

B. Suites et séries de fonctions

Remarque 54 : Une limite simple de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.

Proposition 55 : Si (f_n) continues $f_n \xrightarrow{CVU} f$ alors f continue.

Proposition 37 : (Lemme de Dini 2) Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ croissante $f_n \xrightarrow{CS} f$ f continue Alors $f_n \xrightarrow{CVU} f$.

(2)

Application 58 : Théorème de Glivenko-Cantelli.

Théorème 59 : Soit $(f_n)_n$ de classe C^1 sur I telle que.
$\forall k \in [\![0,n]\!]$ $f_n^{(k)} \xrightarrow{CVU} f_k$ sur I. Alors f_0 est C^0 et $f^{(k)} = f_k$.

Application 60 : $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est C^∞ sur $]-R,R[$ où R désigne le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Théorème 62 : (Bernstein)
Soit $f :]-a,a[\to \mathbb{R} C^\infty$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(2n)}(x) \geq 0$ alors f est DSE sur $]-a,a[$

Application 63 : tan est DSE sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Théorème 64 : (Morgenstern). L'ensemble des fonctions C^∞ analytique nulle part est dense dans l'ensemble des fonctions C^∞.

Exemple 65 : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n!x)}{n!^n}$

(2)

C. Intégrales à paramètres

Théorème 62 : Continuité sous l'intégrale

Théorème 64 : Dérivation sous l'intégrale

Application 65 : Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Application 66 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

2.18 Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Références utilisées :

— (1) *Analyse* X.Gourdon
— (2) *Eléments d'Analyse fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
— (3) *Probabilités* P.Barbe M.Ledoux
— (4) *Oraux X-ENS Analyse 1* S.Francinou H.Gianella
— (5) *Théorie de L'intégration* M.Briane G.Pagès
— (6) *Oraux X-ENS Algèbre 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (7) *Analyse mathématique* F.Testard
— (8) *Analyse 2 Exercices* A.Chambert-Loir S.Fermigier
— (9) *Eléments d'Analyse Réelle* JE.Rombaldi

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I Fonctions monotones.

On considère $f : I \to \mathbb{R}$ I intervalle de $\mathbb{R}$

A. Généralités

(1)

Définition 1 : f est dite croissante (resp. strictement croissante) si : $\forall (x,y) \in I^2 \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$)

On définit de même les fonctions (strictement décroissante).

Définition 2 : On dit que f est monotone si f est croissante ou décroissante.

Proposition 3 : Une fonction monotone admet des limites finies à gauche et à droite de tout point de I.

Application 4 : Une fonction monotone admet un nombre dénombrable de points de discontinuités.

Proposition 5 : (Admis) Si f est monotone alors f est dérivable p.p.

Proposition 6 : Si f dérivable alors f est croissante ssi $f' \geq 0$.

Exemple 7 : $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Proposition 8 : Si f dérivable alors : $\overline{\text{$f$ strict croissante}} \Leftrightarrow f' \geq 0$ et $\overline{\{f'=0\}} = \emptyset$

(9)

Proposition 9 : f continue alors f injective ssi f monotone
Si f continue strict monotone alors c'est un homéo sur son image.

(2)

Proposition 9 : (Lemme de Dini). Supp I compact et $(f_n)_n$ suite décroissante de fonctions qui converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors la convergence est uniforme

Application 10 : Il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes qui converge uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1,1]$.

Application 11 : le théorème de Stone Weierstrass.

B. Suites / Séries numériques

(1)

On considère une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Proposition 12 : Si f croissante alors $(u_n)_n$ monotone de sens de variation "égal" au signe de $u_1 - u_0$.

Exemple 13 : $f(x) = x^2$ $u_0 > 1$ ou $0 \leq u_0 < 1$

Proposition 14 : Si f décroissante alors les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de variation contraire.

Exemple 15 :

Proposition 16 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux décroissante alors $\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\int_k^{k+1} f - f(k) \right) \right)_n$ converge.

Application 17 : Sous les mêmes hypothèses $\sum_{n \geq 1} f(n)$ et $\int_1^{+\infty} f$ sont de mêmes nature.

Exemple 18 : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

Exemple 19 : $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$

C. Fonctions à variations bornées.

(1)

On suppose $I = [a,b]$. On note pour σ une subdivision de $[a,b]$. $\text{Var}_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ où $\sigma : a = x_0 < \dots < x_n = b$

Définition 20 : f est dite à variation bornée si

$$V_a^b f := \sup_{\sigma \in \text{Sub}([a,b])} \text{Var}_\sigma(f) < +\infty$$

Proposition 21 : f est à variation bornée ssi f est la différence de deux fonctions croissantes.

D. Fonction de répartition en probabilités.

(3)

Soit X une var sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Proposition 22 : F_X est croissante, continue à droite et admet une limite à gauche en tout point.

Application 23 : X a un nombre au plus dénombrable d'atome.

Définition 24 : (Inverse généralisée).

Application 25 : (Glivenko - Cantelli).

II Fonctions convexes

A. Généralités

(1)

Définition 26: $f: I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :
$\forall (x,y) \in I^2 \ \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

f est strictement convexe si f convexe et
$\forall (x,y) \in I^2 \ x \neq y \ \forall \lambda \in]0,1[\quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Définition 27: f est dite (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

Proposition 28: (Lemme des 3 pentes). Soit f convexe et $x < y < z$
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Application 29: Si f convexe alors f admet des dérivées à droite et gauche en tout point de $\mathring{I}$.

Application 30: Si $f: I \to \mathbb{R}$ convexe alors f continue

Remarque 31: Cela reste vrai si $f: E \to \mathbb{R}$ avec E de dim finie mais faux si $\dim E = +\infty$

Proposition 32: Si $f: I \to \mathbb{R}$ convexe alors l'ensemble des points de non dérivabilité de f est au plus dénombrable

(1)

Proposition 34: Supposons f dérivable alors :
f convexe $\Leftrightarrow$ f' croissante $\Leftrightarrow$ f au dessus de ces tangentes.

Proposition 35: Supposons f deux fois dérivable alors
f convexe $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$

Exemple 36: $\exp$, $x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ $x \mapsto \sin(x)$ convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Application 37: $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$

Remarque 38: f est convexe ssi son épigraphe l'est

B. Inégalités classiques

(1)

Proposition 39 Soit $f: I \to \mathbb{R}$ convexe alors
$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$
$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

(1)

Proposition 40 (Inégalité arithmético-géométrique)
Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs alors :
$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
il y a égalité ssi tous les x_i sont égaux

(2)

Application 41 (Inégalité de Carleman). $\forall (a_n) \geq 0$ tq $\sum a_n$ converge $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
et e est la meilleure constante possible

(5)

Proposition 42 (Inégalité de Young) Soit $(x,y) > 0$ et $(p,q) \in ((\mathbb{R}^{+*})^2)^2$ conjugués alors $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$

Application 43 (Inégalité de Hölder)
Soient $f \in L^p(\mu)$ et $L^q(\mu)$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $fg \in L^1$ et
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Application 44 Interpolation dans les L^p

Application 45 (Inégalité de Minkowski)
Soient $f, g \in L^p$ $p \in [1, +\infty[$ alors
$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ Inégalité Chernoff

Conséquence 46 $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(\mu)$.

(5)

Proposition 47 (Inégalité de Jensen)
Soit X une va intégrable et $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $\varphi(X)$ intégrable.
Alors $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$

Application 48 Théorème de Fejer.

(1)

C. Log-Convexité.

On dit que $f: I \to \mathbb{R}^{+*}$ est log-convexe si $\ln \circ f$ est convexe

(1) Lemme 50 si g croissante et f convexe alors $g \circ f$ convexe

Proposition 51 f log convexe $\Rightarrow$ f convexe

Proposition 52 f log convexe $\Leftrightarrow$ $\forall c>0$ $x \mapsto c^x f(x)$ convexe

(8) Théorème 53 (Bohr-Mollerup) la fonction $\Gamma : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est l'unique fonction vérifiant : Γ log convexe
- $\Gamma(1)=1$ $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ } DVP2

Application 54 $\forall x, a > 0$ $\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\,dt$

(6) Proposition 55 $\det : \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{+*}$ est log concave.

III Applications à l'optimisation

Formule de duplication

A. Convexité et minimisation.

(11) Soit $f : C \to \mathbb{R}$ $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe ouvert.

Définition 56 On dit que f est α-convexe si :
$\forall (x,y) \in C^2 \ \forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \dfrac{\lambda(1-\lambda)}{2}\|x-y\|^2$

Proposition 57 α-convexe $\Rightarrow$ strict convexe $\Rightarrow$ convexe et toutes les réciproques sont fausses.

Proposition 58. Supposons f différentiable sur C alors :
f convexe ssi $\forall (x,y) \in C^2$ $f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(x), y-x \rangle$

Proposition 59 f est α convexe ssi l'une des conditions équivalentes est vérifiée :
i) $\forall (x,y) \in C^2$ $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \dfrac{\alpha}{2}\|y-x\|^2$
ii) $\forall (x,y) \in C^2$ $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq \alpha \|y-x\|^2$
iii) $\forall (x,h) \in C^2$ $^t h \, \mathrm{Hess}(f)(h)\, x \geq \alpha \|x\|^2$

Application 60 (Convexité et minimum)
Si f convexe f n'a pas forcément de minimum
- Si f strict convexe il y a unicité mais pas forcément existence
- Si f α-convexe il y a existence et unicité du minimum

B. Algorithme du gradient pas optimal

But : Minimiser $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $b \in \mathbb{R}^n$

Proposition 40 : f est convexe coercive et atteint son minimum en un unique point X qui vérifie $AX = b$

Définition 41 : On considère $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \rho \nabla f(X^{(k)})$ où $\rho > 0$. On l'appelle méthode de gradient à pas fixe.

Définition 42 : $X^{(n+1)} = \underset{u \in x^{(k)} + F_k}{\operatorname{argmin}} f(u)$ où $F_k = \mathrm{Vect}(\nabla f(X^{(k)}))$
méthode de gradient à pas optimal.

Lemme 43 : (Inégalité de Kantorovich). Notons $S_n(A) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$
alors pour $X \in \mathbb{R}^n$ $\dfrac{\|X\|^4}{\|X\|_A^2 \, \|X\|_{A^{-1}}^2} \geq \dfrac{4\mu_1\mu_n}{(\mu_1+\mu_n)^2}$

où $\|X\|_A^2 = \langle AX, X\rangle$.

Proposition 45 : Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $X_{k+1} = X_k - \alpha_{k+1} R_k$
$\alpha_{k+1} = \dfrac{\|R_k\|^2}{\|R_k\|_A^2}$ $R_k = AX_k - B$. } DVP1

Alors $\|X_k - \bar{X}\| \leq \sqrt{\mathrm{cond}_2(A)} \left(\dfrac{\mathrm{cond}_2(A)-1}{\mathrm{cond}_2(A)+1}\right)^k \|X_0 - \bar{X}\|$ où
$A\bar{X} = b$ $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n}{\mu_1}$.

C. Optimisation en dimension infinie

H Hilbert.

Définition : On dit que $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x (et on note $x_n \rightharpoonup x$) si :

$$\forall y \in H \quad \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$$

Proposition : Soit $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ bornée alors il existe une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge faiblement

Proposition : Soit $J : H \to \mathbb{R}$ convexe coercive continue alors J atteint son minimum

Application : Résolution d'EDP.

2.19 Leçon 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Références utilisées :

— (1) *Analyse* X.Gourdon
— (2) *Calcul Intégral* B.Candelpergher
— (3) *Algèbre* X.Gourdon
— (4) *Oraux X-ENS Analyse 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Introduction à la théorie analytique et probabilistes des nombres* G.Tennenbaum
— (6) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec
— (7) *Oraux X-ENS Mathématiques Volume* 6 S.Francinou, H.Gianella S.Francinou
— (8) *Probabilités Tome 1* JY.Ouvard
— (9) *Oraux X-ENS Analyse 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles de séries numériques. Exemples.

230

(1)

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Séries numériques

A. Généralités

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Définition 1 : On appelle série de terme général $(u_n)_n$ la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum_{n\geq 0} u_n$

Définition 2 : On dit que la série de terme général $(u_n)_n$ converge si S_n admet une limite finie. On appelle cette limite la somme de la série et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On appelle reste de la série la quantité $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Exemple 3 : Pour $|q|<1$ la série de terme général $(q^n)_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Proposition 4 : Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$

Proposition 5 : $(u_n)_n$ converge ssi $\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

B. Séries à termes positifs.

On considère ici $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives.

Proposition 6 : Supposons $\sum v_n$ converge. Alors si $u_n \leq v_n$, $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge aussi.

Proposition 7 : Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Contre-exemple 8 : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

Exemple 9 : $\sum_{n\geq 0} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ diverge

Proposition 10 : Supposons $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$ alors
Si $\ell < 1$ $\sum u_n$ converge si $\ell > 1$ $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge

(1)

Si $\ell = 1^+$ $(u_n^{\frac{1}{n}} \geq 1)$ alors $\sum u_n$ diverge

Proposition 11 : (Règle de Raabe-Duhamel). $u_n > 0$
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})}$ alors il existe $K>0$ tel que $u_n \sim \frac{K}{n^a}$ $K>0$

Exemple 12 : Si $u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n$ et $b-a>1$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV

C. Séries à termes quelconques.

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

(1)

Proposition 13 : Si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

Remarque 14 : Réciproque fausse $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Proposition 15 : Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes alors la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est absolument convergente de somme $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

Contre-Exemple 16 : $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. App : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Proposition 17 : (Séries alternées) Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante tendant vers 0. Alors $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ converge et $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k\right| \leq u_n$

Application 18 : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge

(2)

Proposition 19 : (Règle d'Abel) Soit $(c_n)_n$ une suite positive décroissante de limite nulle et $(b_n)_n$ une suite telle que $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_n$ bornée (disons par M). Alors $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge et

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_k\right| \leq M a_n.$$

(1)

Exemple 19. Pour $\theta \in]0,2\pi[$ $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge

D. Quelques sommes remarquables

Proposition 20: $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = e := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \notin \mathbb{Q}$

Proposition 21: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos(1) \notin \mathbb{Q}$

(3)

Proposition 22: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ est transcendant.

Proposition 23: (ADMIS) (Constante d'Apéry). $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \notin \mathbb{Q}$

E. Réarrangement de termes.

(4)

Proposition 24: $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge ssi pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Théorème 25: (Réarrangement de Riemann). Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente non absolument convergente. (Série semi-convergente). Alors pour $x \in \mathbb{R}$ $\exists$! existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective $x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$

Application 26: L'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

II Etude des sommes partielles / des restes.

A. Comparaison série intégrale.

(1)

Proposition 27: Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante alors $\sum_{n\geq 1} f(n)$ et $\left(\int_1^n f\right)_n$ sont de mêmes natures.

Application 28: (Série de Riemann) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Application 29: (Série de Bertrand) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ CV $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1, \beta > 1 \end{cases}$

(1)

Application 30: $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ (constante d'Euler) $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

Proposition 31: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$ $\alpha < 1$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ $\alpha > 1$

(1)

Proposition 32: $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + C + o(1)$ $C \in \mathbb{R}$

Application 33: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} =$

Proposition 34: $\zeta(3) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$

(1)

Proposition 35: Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ C^1 telle que $\int_{\mathbb{R}^+} |f'| < +\infty$. Alors $\sum_{n\geq 1} f(n)$ et $\left(\int_1^n f\right)_n$ ont même nature.

Application 36: $\sum_{n\geq 1} \frac{i^n}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > \frac{1}{2}$

D. Théorie analytique des nombres

(5)

Proposition 37: On note $\sigma_0(n)$ le nombre de diviseurs de n. Alors: $\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = n\ln(n) + (2\gamma-1)n + O(\sqrt{n})$

Proposition 38. On note $\sigma_1(n)$ la somme des diviseurs de n. Alors $\sum_{k=1}^{n} \sigma_1(k) = \frac{n^2\pi^2}{12} + O(n\ln(n))$

Proposition 39 $\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n\ln(n))$

Théorème 40: (Mertens) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \sim \ln(\ln(n))$

Théorème 41: $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ premier}}}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(\ln(n))$

} OVP 1

(2)

E. Formule d'Euler Mac-Laurin

Définition 42: Soit $(P_n)_n$ la suite de polynômes tels que $P_0 = 1$ $P_n' = P_{n-1}$ et $P_n(0) = P_n(1)$ pour tout $n \geq 0$. On pose $B_n = \frac{P_n}{n!}$ et on les appelle les polynômes de Bernouilli.

(2)

Proposition 43 : (Formule d'Euler Mac-Laurin)
Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $p<q$ deux entiers alors

$$\int_p^q f(t)dt = \frac{f(p)+f(q)}{2} + \sum_{k=p+1}^{q-1} f(k) + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(q) - f^{(k-1)}(q)\right) + (-1)^m \int_p^q \frac{b_m(x)}{m!} f^{(m)}(x)dx$$

où $b_m(x) = B_m(x - \lfloor x \rfloor)$

Application 44 :

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \exp\left(\sum_{k=2}^{m} \frac{B_k}{k(k-1)} \frac{1}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^m}\right)\right)$$

(1)

Application 45 :

$$H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k!} \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^m}\right)$$

(2)

Application 46 : (Erreur méthode des trapèzes).

III. Séries de Fourrier

(6)

Définition 47 : Pour $f \in L^1([-\pi,\pi])$ on définit

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Définition 48 : On définit $e_n(t) = e^{int}$, $S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}$

$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)$

Théorème 49 : (Fejer). Pour $f \in C^0_{2\pi}$ per $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Pour $f \in L^p_{2\pi}$ $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Application 50 : Si $f \in C^1_{per} \cap C^0_{2\pi}$ alors pour $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)$

(6)

Proposition 51 : (Formule sommatoire de Poisson) Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $|f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|^\alpha)}$ pour $C>0$ $\alpha>1$ si de plus $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$ alors $\sum f(2\pi n) = \frac{1}{\pi} \sum \hat{f}(n)$.

(2)

Application 52 : $\forall x \in \mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$ $\cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}$

Application 53 : $\zeta(2k) = \pi^{2n} \ldots$

Application 54 : ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et pour $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-\frac{1-s}{2}} \zeta(1-s)$$

IV Séries entières.

(1)

Proposition 55 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Alors sa somme est holomorphe sur $D(0,R)$

(7)

Application 56 : Le nombre de partition de $[\![1,n]\!]$ vaut $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$

Application 57 : Le nombre d'involution de S_n vaut $I_n = \lfloor$

(1)

Proposition 58 : $I_n \sim$

Proposition 59 : $\forall |z|<1$ $\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} z^n$

(8)

Application 60 : L'espérance et la variance d'une loi binomiale négative valent

(7)

Théorème 61 : Abel Angulaire

Proposition 62 : Taubérien faible

Proposition 63 : Taubérien fort

(9)

Proposition 64 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Proposition 65 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{e^{\frac{2ik\pi}{p}}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}$

2.20 Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

J'ai fait cette leçon au mois de Janvier, et je ne l'ai pas trop modifiée après, si j'avais du la refaire pour les oraux j'aurai réduit de moitié toute la première partie pour mettre plus d'exemples dans les autres parties.
Je n'ai pas noté les références, mais il suffit de se référer aux leçons connexes pour avoir une bonne idée de ce que j'ai utilisé.

On désigne par $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré quelconque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Construction de l'intégrale de Lebesgue

Définition 1 : On dit que $f : X \to \mathbb{K}$ est étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On note $E_{\mathbb{K}}(X)$ l'ensemble des fonctions étagées.

Proposition 2 : Soit $f \in E_{\mathbb{K}}(X)$, alors il existe une unique partition $(A_1, \dots, A_n)$ de X et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Définition 3 : Soit f une fonction étagée positive. On définit l'intégrale de f par rapport à μ par :

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

Exemple 4 : Si $X = \mathbb{N}$ μ = mesure de comptage alors :

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\{f = \alpha_i\}| = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$

Proposition 5 : Soient f, g deux fonctions étagées positives

a) $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$

b) $f \leq g \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

c) $\forall \lambda \geq 0 \quad \int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$

Définition 6 : $\forall A \in \mathcal{A} \quad \int_A f \, d\mu := \int_X \mathbb{1}_A f$

Proposition 7 : Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, mesurable. Il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ étagées telle que pour tout $x \in X$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Définition 8 : Soit $f : X \to \mathbb{R}^+$ mesurable. On définit :

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu \;/\; \varphi \leq f, \ \varphi \text{ étagée} \geq 0 \right\}$$

On dit que f est intégrable sur X si $\int_X f \, d\mu < +\infty$

Les définitions sont bien cohérentes.

Théorème 9 : (Beppo-Levi)

Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives.

Alors $\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_X f \, d\mu$

Proposition 10 : Toutes les propriétés déjà vues restent vraies par passage à la limite.

Proposition 11 : Soit $f : X \to \mathbb{R}^+$ mesurable positive alors :

$$\int_X f \, d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{f \neq 0\}) = 0$$

Corollaire 12 : Si $f = g$ μ p.p alors $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$

Exemple 13 : Si $(u_n)_n \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ μ mesure de comptage sur $\mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{N}} u \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Définition 14 : Soit $f : X \to \mathbb{K}$ mesurable. On dit que f est intégrable si $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$. On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ l'ensemble de ces fonctions.

Définition 15 : Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. Alors on définit son intégrale par $\int_X f := \int_X f^+ - \int_X f^-$ $f^+ = \max(f, 0)$ $f^- = \max(-f, 0)$

Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ on définit $\int_X f \, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int_X g \, d\mu$

Proposition 16 (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_n$ mesurables positives alors $\int \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int f_n$

Remarque 17 : L'inégalité peut être stricte, c'est a priori faux si f_n ne sont pas positive.

Application 18 : Soit $f : [0,1] \to$ croissante dérivable λ p.p alors

$$\int_0^1 f'(x) \, dx \leq f(1) - f(0)$$

Remarque 19 : L'inégalité peut être stricte, c'est a priori faux si f_n ne sont pas positive.

Théorème 20 : (Convergence dominée de Lebesgue) Soit $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)^{\mathbb{N}}$ vérifiant :
- $(f_n(x))_n$ converge μ p.p
- Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq g(x)$

Alors : i) il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que $f_n \to f$ p.p

ii) $\int_X f_n d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f d\mu$

Application 21 : $\forall x > 0$ $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$

II Espaces L^p

A. Définition, propriétés élémentaires

Définition 22 : On définit pour $p \in [1,+\infty[$:

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \;/\; \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

Exemple 23 : μ = mesure de comptage $\mathcal{L}^p(\mu) = \ell^p(\mathbb{N})$

Définition 24 On définit $L^p(\mu)$ comme $\mathcal{L}^p(\mu)$ quotienté par la relation $f \sim g \iff f = g$ p.p

Proposition 25 $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace normé. (La norme $\|.\|_p$ ne dépend pas du représentant)

Proposition 26 (Riesz-Fischer) DVP
- L^p est un Banach pour $\|.\|_p$
- Soit $(f_n)_{n\geq 1} \in L^p(\mu)$ qui converge vers f en norme $\|.\|_p$. Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui tend vers f p.p.

Proposition 27 Si $\mu(X) < +\infty$ et $p \leq q$ alors $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$

Proposition 28 Si $f \in L^p \cap L^q$ alors $f \in L^r$ pour tout $r \in [p,q]$

B. Convolution et densité dans les L^p

On considère ici $X = \mu$ la mesure de Lebesgue sur $X = \mathbb{R}^d$ $d \geq 1$

Lemme 29 Les fonctions lipschitziennes à support compact sont denses dans les L^p.

Application 30 : Pour $f \in L^p$, en notant $\tau_a f(x) = f(x-a)$ on a $\|\tau_a f - f\|_p \xrightarrow[a\to 0]{} 0$

Définition 31 On définit pour deux fonctions f et g (quand cela a un sens) le produit de convolution de fonctions f et g par :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

Exemple 32 : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densité f et g alors $X+Y$ est de densité $f*g$.

Proposition 33
- $L^1 * L^1 \in L^1$, $L^p * L^q \in L^\infty$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $L^1 * L^p \in L^p$

Proposition 34 $(L^1, +, *)$ est une algèbre commutative non unitaire

Lemme 35. Il existe une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que : $\alpha_n \geq 0$ $\int \alpha_n d\mu = 1$ et pour $\varepsilon > 0$ $\int_{\|x\|>\varepsilon} \alpha_n d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Proposition 36. Soit $f \in L^p$ alors $\alpha_n * f \in L^p$ et $f * \alpha_n \xrightarrow{\|.\|_p} f$

Proposition 37 : $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p.

Application 38 : (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f}(\xi) \to 0$ $\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$

Théorème 39. (Riesz-Fréchet-Kolmogorov).

Soit $K \subset L^p(\Omega)$ $p \in [1,+\infty[$ alors K est compact ssi
- H borné
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R_0 > 0$, $\forall f \in H$ $\int_{\|x\|>R_0} |f(x)|^p dx < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a_0 > 0$, $\forall a \in]0, a_0[$ $\forall f \in H$ $\|f - \tau_a f\|_p < \varepsilon$

Application 40 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ alors l'injection $i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte

III Des espaces particuliers

A. Transformée de Fourier de L^2

Proposition 41 (Fourier-Plancherel). $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ s'étend de manière unique en un isomorphisme $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ $f \mapsto \hat{f}$ qui vérifie $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$.

Proposition 42 (Polynômes orthogonaux) Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $\int_I \rho(x) e^{\alpha|x|} < +\infty$ pour $\alpha > 0$. Alors la suite des polynômes orthogonaux associée à $\langle f,g\rangle = \int_I fg\rho$ est une base Hilbertienne de $L^2(\rho)$.

Corollaire 43 avec $\rho(x) = e^{-x^2}$ on note P_n la suite de polynôme associé, alors $(h_n = \mu_n P_n e^{-\frac{x^2}{2}})_n$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 44 : $(h_n)_n$ diagonalise $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$.

B. Série de Fourier dans L^p.

Définition 45 Pour $f \in L^p_{2\pi}$ on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\,dt$ et $e_n(t) = e^{int}$

Définition 46. On définit $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$, $K_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$ et $\sigma_n(f) = (K_n * f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x-t)\,dt$

Théorème 47 (Fejer) Pour $f \in C^0_{2\pi}$ $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ } DVP
Pour $f \in L^p_{2\pi}$ $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Application 48 : $(e_n)_n$ est une base Hilbertienne de L^2 on a donc pour $f \in L^2_{2\pi}$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Application 49 : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

Application 50 (Equation de la chaleur sur le cercle) Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle C^1 par et 2π périodique alors l'équation $\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u \\ u(0,x) = u(x) \end{cases}$ admet une unique solution : $u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u_0) e^{-n^2 t} e^{inx}$

C. Espace de Sobolev

Soit $\Omega =]a,b[$
Définition 51 : On pose $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \exists g \in L^2(\Omega)\ \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)\ \int u\varphi' = -\int g\varphi\}$. g est alors unique et on le note u'.

Proposition 39 : $H^1(\Omega)$ est un Hilbert pour $\|u\|_{H^1} = \|u\|_2 + \|u'\|$

Proposition 52 : Soit $u \in H^1(\Omega)$ alors il existe $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ tel que $u = \tilde{u}$ p.p
Définition 53 $H^1_0(\Omega) := \overline{C^\infty_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$
Proposition 54 $H^1_0(\Omega) = H^1(\Omega) \cap \{u(0) = u(1) = 0\}$
Proposition 55. (Inégalité de Poincaré).
$\exists C > 0$, $\forall u \in H^1_0(\Omega)$ $\|u\|_2 \le C\|u'\|_2$
Proposition 56, Soit $\alpha \in C^0([0,1])$ positive et $\beta \in L^2$. Il existe un unique $u \in H^1_0$ solution faible de $-u'' + \alpha u = \beta$
Proposition 57 On note $T : L^2 \to H^1_0$ $\beta \mapsto u$ et $i : H^1_0 \to L^2$ alors $i \circ T$ est compact.
Proposition 58 Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_n$ de L^2 et des réels $(\lambda_n)_n$ avec $\lambda_n \to +\infty$ et $-e_n'' + \alpha e_n = \lambda_n e_n$

D. Espaces probabilisés.

On suppose ici que $\mu = \mathbb{P}$ est une mesure de proba i.e $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
Définition 59 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires on dit que $(X_n)_n$ converge en proba vers X si
$\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Proposition 60. Si $(X_n)_n$ converge dans L^p alors $(Y_n)_n$ converge en proba.
Remarque 61 : La réciproque est fausse
Définition 62 On dit que $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si $\lim_{C\to+\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|>C\}} |X_i|\,d\mathbb{P} = 0$

Théorème 63 : (Vitali) Soit $(X_n)_n$ des var L^1 alors
$\begin{cases} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \\ X_n \text{ ui} \end{cases} \iff X_n \xrightarrow{L^1} X$

Exemple 64 (Loi faible des grands nombres).
Si $(X_n)_n$ iid intégrables alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$

2.21 Leçon 235 : Problèmes d'interversion en analyse

Références utilisées :

- (1) *Analyse* X.Gourdon
- (2) *Calcul Intégral* B.Candelpergher
- (3) *Théorie de l'intégration* M.Briane B.Pagès
- (4) *Oraux X-ENS Analyse 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (5) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
- (6) *Chemin d'Analyse Tome 1* D.Chiron
- (7) *Eléments d'Analyse Fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
- (8) *Analyse Fonctionnelle* H.Brézis

Problèmes d'interversion en analyse.

235

I Permutation lim / lim et régularité

$(E, \|\cdot\|)$ evn : $X \subset F$ F evn

A. Régularité suite et séries de fonctions.

(1)

Proposition 1: Soit $(f_n)_n : X \to E$ continues qui converge uniformément vers f. Alors f est continue.

Contre-exemple 2: $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$.

Proposition 3: Si $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ CVU vers f alors :

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Contre-Exemple 4: Faux si $[a,b] = \mathbb{R}^+$ $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

Théorème 5: Soit $(f_n)_n : [a,b] \to E$ de classe C^1. On suppose :

- $\exists x_0 \in [a,b]$, $(f_n(x_0))_n$ converge
- $f_n' \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} g$

Alors $f_n \to f$ sur $[a,b]$ avec f C^1 et $f' = g$

Remarque 6: Si on a une série de fonction qui converge uniformément alors on applique les résultats précédents à $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_n$.

Proposition 7: Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$ on dit que $\sum f_n$ converge normalement. Cela $\Rightarrow$ alors convergence uniforme de $\sum f_n$.

Théorème 8: (Double limite) Soit $f_n : X \to E$ qui converge uniformément vers $f : X \to E$. Soit $x \in \bar{X}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{a \to x} f_n(a)$ existe alors $\lim_{a \to x} f(a)$ existe et :

$$\lim_{a \to x} f(a) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{a \to x} f_n(a)$$

Application 9: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Proposition 10: Soit $(f_n)_n$ une suites de fonctions holomorphes qui converge uniformément vers f. Alors f est holomorphe

Application 11: ζ est holomorphe sur $\{\text{Re}(z) > 1\}$.

B. Applications aux séries entières

(1)

Proposition 12: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ de somme f. Alors f est holomorphe sur $D(0,R)$.

Théorème 13: (Abel angulaire).

(2)

Proposition 14: (Tauberien faible) Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la réciproque est vraie

Proposition 15: (Tauberien fort) Si $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la réciproque est vraie.

Application 16: Problème de Dirichlet.

II Intégrale de Lebesgue

(3)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

Théorème 17. (Beppo Levi). Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives alors

$$\int_X \lim_n f_n = \lim_n \int_X f_n$$

Application 18: Plein de preuves

Théorème 19: (Fatou) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives alors

$$0 \leq \int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu$$

Application 20: Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable p.p alors

(3) $\int_0^1 f'(x)dx \leq f(1) - f(0)$

Théorème 21 : (Convergence dominée) Soit $(f_n)_n$ une suite dans $L^1(\mu)$ vérifiant :
- f_n converge p.p
- $\exists g \in L^1(\mu)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq g$ p.p

Alors $\exists f \in L^1$, $f_n \to f$ p.p et $\int_X f_n \to \int_X f$

(1) Application 22 : $\forall x > 0$ $\Gamma(x) = \lim_{z \mapsto \frac{1}{z\Gamma(z)}} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$ se prolonge en une fonction entière.

III Permutation dérivée / intégrale

(3) On considère $f : E \times X \to \mathbb{K}$ et $F(u) = \int f(u,x)\mu(dx)$

Théorème 23 : (Continuité sous l'intégrale) On suppose
- $\forall u \in E$ $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable
- $u \mapsto f(u,x)$ est continue μ p.p
- $\exists g \in L^1(\mu)$, $\forall u \in E$ $|f(u,x)| \leq |g(x)|$ p.p

Alors F est continue sur E.

Application 24 : $x \mapsto \hat{f}(\|\cdot\|)$ est continue sur $\mathbb{R}^d$ par $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

Théorème 24 : (Dérivation sous l'intégrale) ($E = I$ intervalle de $\mathbb{R}$). On suppose :
- $\forall u \in I$ $f(u,\cdot) \in L^1(\mu)$
- $u \mapsto f(u,x)$ est dérivable sur I pour presque tout x
- $\exists g \in L^1(X)$, $\forall u \in I$ $|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)| \leq |g(x)|$ p.p

Alors F est dérivable sur I et $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x) d\mu$

(1) Application 25 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Théorème 26 : (Holomorphie sous l'intégrale)

Application 27 : Γ est holomorphe sur $\{Re(z) > 0\}$

IV Permutation de symboles $\int / \sum$

A. Permutation $\sum / \int$

(1) On peut utiliser la proposition 3 :

Proposition 28 : (Formule de Cauchy) Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors pour $r < R$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Application 29 : Théorème de Liouville

(1) Application 30 : Théorème de D'alembert - Gauss.

(1) Théorème 31 : (Intégration termes à termes) Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ mesurables telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$ alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ est intégrable sur I et $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Application 32 : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx = \frac{\pi^2}{6}$

Application 33 : $\forall Re(s) > 0$ $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$

Contre-exemple 34 : $u_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$

(2) Exemple 35 : $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nx} x^\alpha dx = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1}}$

B. Permutation $\sum / \sum$ où $\int / \int$

(1) Théorème 36 : Théorème de Fubini

Application 37 : $\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ $x, y > 0$

(1) Application 38 : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k} = 1 - \gamma$

(3) Application 39 : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Application 40 : Le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ est $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

(5) Proposition 41 : Le nombre de Partition de $[\![1,n]\!]$ vaut

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Proposition : Soit X une va $L^1_{\geq 0}$. Alors $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t)) dt$

Application : Si $f_n \xrightarrow{CVS} f_X$ alors $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} X$

V Analyse de Fourrier

(6) Définition 42 : On définit pour $f \in L^1$ sa transformée de Fourrier $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi x} dx$

Proposition 43 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de $d(f,g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{N_k(f-g)}{1 + N_k(f-g)}$ où $N_k(f) = \max_{|i| \leq k} \|x^k \partial^i f\|$

Proposition 44 : $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme bicontinu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui même. De plus pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ (Formule dite inversion de Fourrier).

Proposition 45 : La formule d'inversion de Fourrier pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 46 : Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$

Théorème 47 : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ s'étend de manière unique isomorphisme $\mathcal{FP} : L^2 \to L^2$ $f \mapsto \hat{f}$ vérifiant pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\|\mathcal{FP}(f)\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$.

Proposition 48 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ $\mathcal{FP}(f) = \hat{f}$

Application 49 : $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi$

Proposition 51 : (Equation de Schrödinger sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

VI Permutation de quantificateurs

Proposition 52 : Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ localement lipschitzienne. Alors f est globalement lipschitzienne.

(11) Proposition 53 : (Lemme de Dini 1).
Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur segment $[a,b]$. Si $f_n \xrightarrow{CVS} f$ avec f continue alors la convergence uniforme.

(7) Application 54 : Il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes tels que $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CVU} |.|$ Caractérisation homothétie

(1) Proposition 55 : Dini 2. Heine

Application 56 : Glivenko - Cantelli

Proposition 57 : Si $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, tous les f_n k-lipschitzienne et $f_n \to f$ alors la convergence est uniforme.

Proposition 58 : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 0 \iff \exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f^{(n)}(x) = 0$$

Proposition : E Banach $T \in \mathcal{B}(E)$. $\forall x\ \exists n_x,\ T^{n_x} x = 0 \iff \exists n,\ \forall x\ T^n x = 0$

(8) Théorème 59 : (Banach - Steinhaus) - Soit E un Banach un espace $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{B}(E,F)^I$. Si $\forall x \in E\ \exists C_x > 0,\ \sup_{i \in I} \|T_i x\| \leq C_x \|x\|$ alors $\exists C > 0,\ \forall x \in E\ \sup_{i \in I} \|T_i x\| \leq C \|x\|$

Application 60 : Si $x_n \to x$ alors $(x_n)_n$ est bornée

2.22 Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Je mets deux plans, le premier a été fait en binôme au début d'année et l'autre tout seul vers la fin de l'année. Le second plan est plus difficile et plus audacieux mais est sans doute plus dans l'esprit de la leçon. Je pense néanmoins que le premier plan reste bon.
Comme dans la 224, il faut être capable de calculer toutes les intégrales de son plan.

<u>Références utilisées :</u>

— (1) *Analyse* X.Gourdon
— (2) *Théorie de l'intégration* M.Briane B.Pagès
— (3) *Oraux X-ENS Analyse 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Analyse complexe* E.Amar E.Mathéron
— (5) *Complex Analysis* EM.Stein R.Shakarchi
— (6) *Chemin d'Analyse Tome 1* D.Chiron
— (7) *Méthodes numériques* A.Quarteroni R.Sacco F.Saleri

236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

On se place dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

I Techniques élémentaires

$-\infty \le a < b \le +\infty$

[1]

Proposition 1 :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, si F désigne une primitive de f alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Exemple 2 : $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln(2)$

Proposition 3 : En annexe, tableau de primitives usuelles.

Proposition 4 : (Intégration par parties). Soit $(u,v) : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

Exemple 5 : Si $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Exemple 6 : Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$.

Proposition 7 : Si F est une fraction rationnelle, après décomposition en élément simple. F est somme de termes de la forme $\frac{1}{(x-a)^k}$ et $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^k}$

On a : $$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \frac{1}{(n-k)(x-a)^{k-1}} + C & k \neq 1 \\ \log|x-a| + C & k = 1 \end{cases}$$

Exemple 8 : $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C$

[2]

Théorème 9 : (Fubini - Lebesgue)
Soit (X,N) (Y,μ) deux espaces mesurés et $f \in L^1(X \times Y)$
$x \mapsto \int_Y f(x,y)d\mu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ sont respectivement définies N p.p et μ p.p

[2]

$$\int_{X\times Y} f\, d(\nu\otimes\mu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\mu(y) \right) d\nu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(y)$$

Proposition 10 : (Changement de variable) Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et φ un C^1 difféomorphisme de U sur V.
Soit $f : V \to \mathbb{R}$ Alors $f \in L^1(V) \iff f \circ \varphi \in L^1(U)$ et dans ce cas $\int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)| dx$
où $J_\varphi(x)$ est le jacobien de φ en x.

Application 11 : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Application 12 : le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ est $\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$
$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$.

[1]

Proposition 13 : (Règle de Bioche)
Soit $R \in \mathbb{R}(X)$, on veut intégrer $\int R(\cos(x), \sin(x))dx$.
Si $R(\cos(x), \sin(x))dx$ est invariant en changeant x par :
- $\pi - x$ alors on pose $v = \sin(x)$
- $-x$ alors on pose $v = \cos(x)$
- $\pi + x$ alors on pose $v = \tan(x)$

Sinon, on pose $v = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Exemple 14 : $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + 2\tan^2(x)} dx = -\frac{1}{3\sin(x)} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \log\left|\frac{\sin x - \sqrt{3}}{\sin x + \sqrt{3}}\right|$

Proposition 15 : Pour calculer $\int \sin^m \cos^n$
Si m ou n impair faisons $n = 2p+1$ $\int \sin^m (1-\sin^2)^p \cos$ puis on pose $t = \sin(x)$
Si m et n pairs on linéarise.

Exemple 16 : $\int \cos^4(x)$

II Utilisation de la convergence.

[1]

Proposition 17 : (Sommes de Riemann) $(a,b \neq \pm\infty)$

(1) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors

$$\frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Application 18 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$

Application 19 : $\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta+x^2)\,d\theta = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 2\pi\ln(|x|) & |x|>1 \end{cases}$

(2) Théorème 20 : (Convergence dominée) (Admis)

Soit $(f_n)_{n\geq 1}\in L^1(\mu)^{\mathbb{N}}$ telles que :

- $(f_n(x))_n$ converge μ p.p
- $\exists g\in L^1(\mu)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n|\leq g$. Alors il existe $f\in L^1(\mu)$ telle que $f_n\to f$ p.p et $\int f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f$

(1) Application 21 : $\forall x>0$ $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

(2) Théorème 22 : (Dérivation intégrale à paramètre)

Soit $f:]a,b[\times X\to\mathbb{R}$ (X,μ) espace mesuré on suppose.

- $\forall u\in]a,b[$ $f(u,\cdot)\in L^1(\mu)$
- $u\mapsto f(u,x)$ est C^1 sur I μ p.p
- $\forall K\subset I$ compact $\exists g\in L^1(\mu)$, $\forall (u,x)\in K\times X$ $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\right|\leq g(u)$

Alors $u\mapsto \int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est C^1 de dérivée

$u\mapsto \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x)\,d\mu(x)$.

(3) Application 23 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ 101

Exemple 24 : $\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2-\frac{b^2}{t^2}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{\ln(x)}}\,dx = \ln(2)$

Théorème 25 : (Théorème intégration terme à terme) (I intervalle)

Soit $(f_n)_n$ $I\to\mathbb{R}$ une suite de fonctions continues par morceaux

On suppose $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I |f_n| < +\infty$. Alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est intégrable sur I

et $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$

Exemple 26 : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,dx = \frac{\pi}{6}$? $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt$

III Techniques plus avancées

A. Analyse complexe

(4) Proposition 27 : Si f est holomorphe sur un disque ouvert alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout γ chemin fermé dans U

Application 28 : $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\,dt = \int_0^{+\infty}\sin(t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{8}}$

Théorème 29 : (Théorème des Résidus)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ f holomorphe sur $\Omega\setminus S$ où $S\subset\Omega$ et S sans point d'accumulation dans Ω. Soit $K\subset\Omega$ un compact à bord régulier tel que $\partial K\cap S=\emptyset$. Alors $|S|<+\infty$ et

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = \sum_{a\in S\cap K} 2i\pi\,\mathrm{Res}(f,a)$$

Exemple 30 : $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$

(5) Exemple 31 : $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ $a\in]0,1[$

Exemple 34 : $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2i\pi x\varepsilon}}{\mathrm{ch}(\pi x)+\cos(\pi a)}\,\frac{\sin(\pi a)}{}\,dx = \frac{2\mathrm{Sh}(2\pi a\varepsilon)}{\mathrm{Sh}(2\pi\varepsilon)}$

Exemple 35 : $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{n}\times\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ $n\geq 2$

(1) Exemple 36 : $\forall z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z)\in]0,1[$ $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

B. Analyse de Fourrier

(10) Définition 37 : Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée

(6)

de Fourier par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$

Exemple 38 : Si $f(x) = e^{-ax^2}$ $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

Théorème 39 : (Inversion de Fourier)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f} \in L^1$. Alors $\check{\hat{f}}(x) = (2\pi) f(-x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 40 : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$

Théorème 41 : (Formule de Plancherel - Peseval)
Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors $\hat{f} \in L^2$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

Application 42 : $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi$

IV Méthode numérique

A. Intégration par quadrature en dimension 1.

(7)

Soit $a < b$ deux reels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On veut calculer $I(f) = \int_a^b f(x) dx$

Définition 43 :
Pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ $(x_1, \dots, x_n) \in [a,b]^n$. On définit la quadrature $I_n(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$

Définition 44 : On dit que la quadrature est exacte à l'ordre r lorsque pour tout $P \in \mathbb{R}_r[X]$ $I_n(P) = I(P)$.
L'ordre de la quadrature est le plus grand de ces entiers r (s'il existe).

Exemple 45 : (Formule du point milieu)
$a_0 = b-a$ $x_0 = \frac{a+b}{2}$ $I_0(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Définition 46 : On définit l'erreur par $E_n(f) = |I(f) - I_n(f)|$

Proposition 47 : On suppose $f \in C^4([a,b])$

Méthode	ordre	$I_n(f)$	$E_n(f)$
point milieu	1	$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{2k+1}{2}\frac{(b-a)}{n}\right)$	$\frac{b-a}{24}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''(\xi)$
trapèze	1	$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) + f(x_{k+1})$ $x_k = a + \frac{(b-a)}{n} k$	$-\frac{b-a}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''(\xi)$
Simpson	3	$\frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + f(x_{2k})\right]$ $x_k = a + k\frac{b-a}{2}$	$-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^4 f^{(4)}(\xi)$

(9)

B. Méthode de Monte Carlo

Théorème 48 (LGN) Soit $(X_n)_n$ iid L^1, alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \mathbb{E}(X_1)$

Corollaire 49 : (Méthode de Monte Carlo)
Soit $(X_n)_{n\geq 1} \sim U_{[0,1]}$ iid et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(X_k)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \mathbb{E}(f(X_1)) = \int_0^1 f(x) dx$$

Remarque 50 :
Avantage : aucune hypothèse de régularité sur f
Inconvénient : Vitesse de convergence en $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ (TCL)

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonction d'une ou plusieurs variables.

236

I Techniques élémentaires

A. IPP / Changement de variable 1D.

(1)

Proposition 1 : En annexe les primitives usuelles

Exemple 2 : $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + C$

Exemple 3 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$ (Wallis)

Exemple 4 : $\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + C & k = 1 \\ \frac{1}{1-k}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C & k \neq 1 \end{cases}$

Exemple 5 : $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\times\left(\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{(x^2+a^2)}\right)$

Exemple 6 : $\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \cos(x) - 2\arctan(x) + C$ (Biache)

Exemple 7 : $\int \cos^5(x)\,dx = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{8} + C$

Exemple 8 : $\int \arctan(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

Exemple 9 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

Exemple 10 : Si $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ $(x>0)$

Exemple 11 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$

B. Dérivation sous le signe intégral

(2)

Exemple 12 : (Dirichlet) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Exemple 13 : (Gaussienne) $\int_0^{+\infty} e^{-cx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $a>0$

(1)

Exemple 14 : (TF de la gaussienne) : $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-ix\xi}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$

(2)

Exemple 15 : $\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2 - \frac{b^2}{t^2}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}$

Exemple 16 : (Fresnel) $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i)$

C. Utilisation de sommes.

(2)

Exemple 17 : $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-ix\xi}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

Exemple 18 : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$

Exemple 19 : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

(1)

Exemple 20 : $\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(\theta)+x^2)\,d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } |x|<1 \\ 2\pi\log|x| & |x|>1 \end{cases}$

Exemple 21 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$

(3)

Exemple 22 : $\forall s\in\mathbb{C}$ $\mathrm{Re}(s)>0$ $\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,dt$ (Loi de Stefan)

(4)

Exemple 23 : $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

D. Fubini / changement de variable multi-D.

(5)

Exemple 24 : $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx = \ln(2)$

$\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt\,dx = 1$

Exemple 25 : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Exemple 26 : (Volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$) $V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$

(5)

Exemple 27 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}$

Exemple 28 : (Transformée de fourrier de la gaussienne en multiD)

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2} e^{-i\xi\cdot x} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a}} \quad a>0$$

Exemple 29 : Pour $x,y>0$ $\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

Exemple 30 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)^\alpha dx = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$ (Necessite la formule des compléments)

$\alpha \in]0,1[$

II Techniques plus avancées

A. Analyse de Fourrier

(6)

Proposition 31 : Si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$ alors :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

(utilise la transformée de Fourrier de la gaussienne).

Exemple 32 : (Fonction caractéristique loi de Cauchy)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-it\alpha}}{\pi(1+t^2)} dt = e^{-|\alpha|}$$

Exemple 33 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ (Fourrier - Plancherel)

Exemple 34 : $\int_{\mathbb{R}} |\Gamma(x+iy)|^2 dy = \frac{2\pi}{2^{2x}}\Gamma(2x)$

B. Analyse complexe

(3)

Exemple 35 : $\int_{\mathbb{R}} e^{-2x^2 - i\alpha\xi} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ (Contour 1) $\mathrm{Re}(z)>0$

Exemple 36 : (Fresnel) $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

Exemple 37 : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ $n \geq 2$ (contour 2)

(3)

Exemple 38 : $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$ (contour 3)

Exemple 39 : (Dirichlet) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (contour 4)

(7)

Exemple 40 : (Fonction caractéristique loi Γ)

$$\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha} \quad \text{où } X \sim \gamma(\alpha,\beta)$$

Exemple 41 : (Fonction caractéristique loi χ^2)

$$\varphi_X(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}} \quad X \sim \chi^2(n).$$

(3)

Exemple 42 : $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2i\pi x\xi}}{ch(\pi x) + \cos(\pi a)} \sin(\pi a) dx = \frac{2Sh(2\pi a\xi)}{Sh(2\pi\xi)}$ $a \in]0,1[$ $\xi \in \mathbb{R}$

(contour 5).

Exemple 43 : $\int_{\mathbb{R}} \frac{x\,sh(x)}{x^2+a^2} dx = \pi e^{-a}$

Exemple 44 : $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{4^n}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$

Exemple 45 : $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\log(a)$

Exemple 46 : (Transformée Mellin cos et sin)

$$\int_0^{+\infty} \cos(t)\, t^{z-1} dt = \Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \quad \mathrm{Re}(z) \in]0,1[$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)\, t^{z-1} dt = \Gamma(z)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \quad \mathrm{Re}(z) \in]0,1[$$

Exemple 47 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \sqrt{2\pi}$

Exemple 48 : $\int_0^{+\infty} \cos(x^p) dx = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2p}\right)$ $p \geq 2$

(9)

Exemple 49 : $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln(x)}{x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}$) DVP

(3) Exemple 50 : (Formule des compléments).

$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ $\mathrm{Re}(z) \in]0,1[$) DVP

(8) Application 51 : (Intégrale de Raabe).

$\int_x^{x+1} \log(\Gamma(t))\,dt = x(\log x - 1) + \frac{1}{2}\log(2\pi)$ $x > 0$

Proposition 52 : (Formule de Duplication)

$\Gamma(2x) = \dots$

Proposition 53 : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x + x + 1)^2 + \pi^2} = \frac{2}{3}$) DVP ?

(9)

III Méthodes numériques

A. Interpolation

(9)

- Point Milieu
- Trapèze
- Cavalieri-Simpson

Pour chaque méthodes : Def + inégalité sur l'erreur + Dessin

B. Quadrature de Gauss

C. Monte-Carlo

(S'il y a la place).

2.23 Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

La méthode de Laplace est un résultat très utile mais non trivial, dans la même idée, on peut parler de la méthode de la phase stationnaire et/ou de la méthode du col mais cela prend pas mal de place.

Références utilisées :

— (1) *Chemin d'Analyse Tome 1* D.Chiron
— (2) *Théorie de l'intégration* M.Briane G.Pagès
— (3) *Les contre-exemples en mathématiques* B.Hauchecorne
— (4) *Oraux X-ENS Analyse 3* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Analyse* X.Gourdon
— (6) *Calcul Intégral* B.Candelpergher
— (7) *Analyse 2 Exercices* A.Chambert-Loir S.Fermigier

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemple et Applications

239

I Théorèmes de régularité

(A1)

Définition 1 : On considère ici une fonction $f : I \times J \to \mathbb{C}$ et la fonction $F : I \to \mathbb{C}$ définie par $F(x) = \int_J f(x,t)\,dt$

Théorème : Convergence dominée

Théorème 2 : Soit $x_0 \in I$

On suppose :

i) $x \mapsto f(x,t)$ continue en x_0 pour presque tout t

ii) $t \mapsto f(x,t)$ mesurable pour tout $x \in I$

iii) Il existe $g \in L^1(J)$ tel que $\forall (x,t) \in I \times J \quad |f(x,t)| \leq |g(t)|$

Alors $x \mapsto F(x)$ est continue en x_0.

Remarque 3 :

On peut remplacer iii) par iii') pour tout compact $K \subset I$, il existe $g \in L^1(J)$ tel que $\forall (x,t) \in K \times J \quad |f(x,t)| \leq |g(t)|$

(B)

Application 4 :

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$. Alors $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

(B)

Contre-Exemple 5 :

L'hypothèse iii) est essentielle $F(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt}\,dt$ n'est pas continue en 0

Théorème 6 : On suppose

i) $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur I pour presque tout t

ii) $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est mesurable

iii) Il existe $g \in L^1(J)$ tel que pour tout $(x,t) \in I \times J$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |g(t)|$$

Alors $x \mapsto F(x)$ est de classe C^1 sur I et pour $x \in I$

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Remarque 7 :

La encore, on peut remplacer iii) par iii') $\forall K \subset I$ compact $\exists g \in L^1(J)$, $\forall (x,t) \in K \times J \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |g(t)|$

(A1)

Contre exemple 8 :

La encore l'hypothèse iii) est importante $F(x) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-t|x|}\,dt$ n'est pas dérivable en 0.

(B)

Application 9

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

(C)

Application 10 :

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2t^2 - \frac{b^2}{t^2}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab}$$

Théorème 10 :

On suppose $I \subset \mathbb{C}$ ouvert et

i) $\forall t \in J$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur I

ii) $\forall z \in I$ $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ intégrable sur J

iii) $\forall K \subset I$ compact $\exists g \in L^1(J)$, $\forall (z,t) \in I \times J \quad \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\right| \leq g(t)$

(A1)

II Equivalents d'intégrales, méthode de Laplace

(C)

Cadre : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^0.

On cherche un équivalent de $\int_a^b e^{x\varphi(t)}\,dt$.

Proposition 11 : φ atteint son maximum en $t_0 \in]a,b[$ $\varphi''(t_0) < 0$ et $f(t_0) \neq 0$.

(6)

$$\int_a^{t_0} f(t) e^{x\varphi(t)} dt \sim \int_{t_0}^{b} f(t) e^{x\varphi(t)} dt \sim e^{x\varphi(t_0)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(t_0) \sqrt{\frac{2}{-\varphi''(t_0)}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Remarque 12 : Sous les hypothèses précédentes :

$$\int_a^b f(t) e^{x\varphi(t)} \underset{x\to+\infty}{=} e^{x\varphi(t_0)} \left(f(t_0) \sqrt{\frac{2\pi}{-\varphi''(t_0)}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

Proposition 13 : φ atteint son maximum en a. On suppose $\varphi' \neq 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) < 0$ et $f(a) \neq 0$

Alors $\int_a^b e^{x\varphi(t)} dt \underset{x\to+\infty}{=} e^{x\varphi(a)} \left(\frac{f(a)}{-\varphi'(a)} \times \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$

(5)

Exemple 14 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!^2} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2\sqrt{x}}}{x^{\frac{1}{4}}}$

Exemple 15 : $\int_0^{+\infty} x^{-\lambda x} e^x dx \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sqrt{s} e^{\lambda s} \quad s = \frac{e^{\frac{1}{\lambda}}}{e}$

(7)

Exemple 16 : $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{e^n}{2}$

III La fonction Γ d'Euler

(5)

Définition On pose pour $\mathrm{Re}(z) > 0$ $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

Proposition Γ est holomorphe sur $\Omega = \{ \mathrm{Re}(z) > 0 \}$

$\forall z \in \Omega \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ie $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \geq 1$.

Proposition : (Formule de Weierstrass)

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

Application : Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$

(5)

Application : $\frac{1}{\Gamma}$ se prolonge en une fonction entière

Proposition $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x} + O(x^\alpha e^{-x})$ DVP 1

Proposition (Formule des compléments) :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad \mathrm{Re}(z) \in]0,1[\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Application $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Application : La fonction ξ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et pour $s \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ $\xi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \xi(1-s)$.

IV Convolution

(8)

On considère ici $\lambda = \mu$ la mesure de Lebesgue sur $X = \mathbb{R}^d$ $d \geq 1$.

Lemme 31 : Les fonctions lipschitziennes à support compact sont denses dans les L^p.

Application 32 : Pour $f \in L^p$, en notant $\tau_a f(x) = f(x-a)$ on a $\|\tau_a f - f\|_p \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$

Définition 33 : On définit pour deux fonctions f et g (quand cela a un sens) le produit de fonctions f et g par :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy$$

Exemple 34 : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densité f et g alors $X+Y$ est de densité $f*g$.

Proposition 35 :

- Si $f, g \in L^1$ alors $f*g \in L^1$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
- $f \in L^p$ $g \in L^q$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $f*g \in L^\infty$ $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$
- $f \in L^1$ $g \in L^p$ alors $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$

Proposition 36 : $(L^1, +, \cdot, *)$ est une algèbre commutative non unitaire.

Lemme 37. Il existe une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n = 1$ $\forall \varepsilon > 0$ $\int_{\|x\| \geq \varepsilon} \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Proposition 38. Soit $f \in L^p$ alors $\exists (f_n) \in L^p$ et $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_p} f$

Proposition 40 : $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans L^p.

Application 41 : (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi \to +\infty]{} 0$ $\quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$

Théorème 39. (Riesz-Frechet Kolmogorov).
Soit $K \subset L^p(\Omega)$ $p \in [1, +\infty[$ alors K est compact ssi :
- H borné
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R_0 > 0, \ \forall f \in H \ \int_{\|x\| > R_0} |f(x)| dx < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_0 > 0, \ \forall a \in]0, a_0[\ \forall f \in H \ \|f - \tau_a f\|_p < \varepsilon$

Application 40 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ alors l'injection $i : H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte cf 213

V Transformée de Fourrier

(1)

cf 250
- Def Schwartz + exemple + distance
- Def TF sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ + TF gaussienne en exple
- Isomorphisme bicontinu + formule inversion de Fourier + Fourier plancherel
- Equation de Schrödinger) DVP2
- Def sur L^1 + exemple cauchy
- Extension à L^2 + $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$.

2.24 Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

J'ai orienté cette leçon de manière très calculatoire, pour éviter cet effet on peut aussi parler de probabilités (convergence en loi, théorème de Prokhorov).

Références utilisées :

— (1) *Analyse* X.Gourdon
— (2) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec
— (3) *Oraux X-ENS Analyse 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Analyse complexe* E.Amar E.Mathéron
— (6) *Calcul Intégral* B.Candelpergher
— (7) *Eléments d'Analyse fonctionnelle* F.Hirsch G.Lacombe
— (8) *Théorie de l'intégration* M.Briane G.Pagès
— (9) *Probabilité pour les non probabilistes* W.Appel

Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

I Suites de fonctions

Soit X un ensemble et (E,d) un espace métrique
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction et $f: X \to E$ une fonction.

A. Généralités, régularité.

(1)

Définition 1: On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f si: $\forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x)$

Définition 2: On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X \ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

Proposition 3: CVU $\Rightarrow$ CVS

Remarque 4: Réciproque fausse $f_n(x) = x^n$.

Proposition 5: Si f_n continues et $f_n \xrightarrow{CVU} f$ alors f continue.

Remarque 6: La convergence simple ne suffit pas.

Proposition 7: On suppose $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$(f_n) \xrightarrow{CVU} f$ alors $\int_a^b f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$

Contre-exemple 8: Si X pas compact: $X = \mathbb{R}^+$ $f_n(x) = e^{-\frac{x}{n_0}} \frac{x}{n_0}$.

Contre-exemple 9: Sens convergence uniforme :
$f_n(x) = (n+1)\cos^n(x)\sin(x)$.

Théorème 10:
On suppose les $(f_n)_n$ C^1 sur $[a,b]$ et:
i) $\exists x_0, (f_n(x_0))$ converge
ii) $f_n' \xrightarrow{CVU} g$
alors $f_n \xrightarrow{CVU} f$ avec f C^1 $f' = g$.

Contre-exemple 11: Sens convergence uniforme $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

Remarque 12: On étend le résultat à des fonctions de classe C^k.

B. Applications.

(1)

Proposition 13: (Lemme de Dini 1). Soit X compact $f_n: X \to \mathbb{R}$
$f_n \leq f_{n+1}$ $f_n \xrightarrow{CVS} f$ f continue. Alors $f_n \xrightarrow{CVU} f$.

(7)

Application 14: Il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes qui converge uniformément vers $|.|$ sur $[-1,1]$.

(1)

Proposition 15: (Lemme de Dini 2) Soit $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ croissante $f_n \xrightarrow{CVS} f$ f continue. Alors $f_n \xrightarrow{CVU} f$.

(7)

Application 16: Théorème de Glivenko-Cantelli

Théorème 17: (Ascoli). Soit E compact F complet et $A \subset C^0(E,F)$
alors
$\bar{A}$ compact $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in E \quad A_x := \{f(x) \mid f \in A\} \text{ bornée} \\ A \text{ équicontinue.} \end{cases}$

Application 18: Théorème de Cauchy-Arsela-Péano.

Application 20. $T: C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ est compact
$f \longmapsto (x \mapsto \int_0^x f)$

(2)

Proposition 21: Soit $f \in C^0([0,1])$ alors
$\exists C > 0, \ \|B_n(f) - f\|_\infty \leq C \omega_f\left(\frac{1}{n}\right)$
où $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$. ω_f est le module de continuité de f. De plus l'inégalité est optimale.

Application 22: Théorème de Weierstrass.
Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est limite uniforme de polynômes

(1)

Contre-Exemple 18: Une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes est un polynôme

(8)

II Suites de fonctions dans les L^p.

Beppo Levi, TCD, Fatou, RF, RFK ?

(8)

III Séries de fonctions

A. Généralités

(1) On considère une suite de fonctions : $\Omega \to \mathbb{C}$. ou $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert

Remarque 1 : En posant $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ on a une suite de fonction et on peut appliquer les propositions des parties précédentes

Définition 2 : On dit que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement si $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge

Proposition 3 : CVN $\Rightarrow$ CVU

Contre-exemple 5 : $f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n^2 + x^2}$ $\quad \Omega = \mathbb{R}^+$

Proposition 6 : $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$ continue dérivable nulle part.

B. Séries entières.

(1) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$

On note f la somme.

Proposition 7 : f est C^∞ sur $]-R,R[$ et pour $k \in \mathbb{N}$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$$

(1)

App : Pb des moments.

Proposition 8 : f est holomorphe sur $\overline{D(0,R)}$

Remarque 9 : Il n'y a pas forcément convergence uniforme sur le disque ouvert de convergence.

Exemple 10 : $\sum_{n\geq 0} x^n$.

(4)

Application 11 : Le nombre de partition de $[\![1,k]\!]$ vaut

$B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \sim$ (AMIS)

(3)

Proposition 20 : Si $\sum a_n R^n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,R]$.

Application 21 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}$

(1)

Théorème 22 : Si $g :]-a,a[\to \mathbb{R}$ C^∞ $g^{(2n)} \geq 0$ alors g est DSE sur $]-a,a[$.

Application 23 : $\ln$ est DSE sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Théorème 24 : (Abel Angulaire). Supposons $R = 1$ et $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. Alors $\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_\theta}} f(z) = f(1)$.

$$\Delta_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \;/\; |z|<1 \;\; \exists \rho \in]-\theta_0, \theta_0[\;,\; z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

Contre-exemple 23 : La réciproque est fausse $a_n = (-1)^n$

Théorème 24 : si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ réciproque vraie (Tauber faible)

Remarque 25 : Si $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ réciproque vraie (Tauber fort)

C. Série génératrice en probabilités

(9)

Définition : Soit X une var définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. On appelle fonction génératrice de X la fonction

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$$

Proposition : G_X est C^∞ sur $]-1,1[$

Exemple : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $\quad G_X(t) = (p+tq)^n$

(9)

Proposition : $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow G_{X+Y} = G_X G_Y$

Proposition : $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$ ssi $G_X = G_Y$

Application : Sommes de va

(2,6)

0. Série de Fourrier.

- Def Call(1), lien entre régularité et décroissance
- Fejer, $(e_n)_n$ BH de L^2
- Perseval, calc $\zeta(2)$ $\eta(2)$ $\beta(2)$
- Calcul $\zeta(2k)$
- Formule Poisson + application | DVP 1
- Equation de la chaleur
- Problème de Dirichlet.

IV Prolongements de fonctions spéciales (5)

- Prolongement par intégration série/intégrale
- Prolongement par Produit de Weierstrass
- Prolongement ζ (utilise Γ et Θ).
- Equation fonctionnelle | DVP

(5,6)

2.25 Leçon 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Pour les applications des séries génératrices on trouvera tout dans le livre *Oraux X-ENS Mathématiques Volume* 6 S.Francinou, H.Gianella S.Francinou qui donne une référence pour un équivalent des nombres de Bell. On peut trouver une méthode pour obtenir un équivalent du nombre d'involutions dans *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation : Calcul différentiel* S.Gonnord N.Tosel mais c'est assez calculatoire, pour un équivalent de $p(n)$ on peut utiliser la méthode du cercle mais c'est très largement hors-programme.

<u>Références utilisées :</u>

— (1) *Analyse* X.Gourdon
— (2) *Oraux X-ENS Analyse 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Oraux X-ENS Mathématiques Volume* 6 S.Francinou, H.Gianella S.Francinou
— (4) *Probabilités Tome 1* JY.Ouvrard
— (5) *Oraux X-ENS Analyse 4* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (6) *Calcul Intégral* B.Candelpergher

Séries entières, propriétés de la somme - Exemples et applications.

243

I Généralités

A. Convergences

Lemme 1: Si $(a_n R^n)_n$ bornée alors pour $|z|<R$ $\sum a_n z^n$ AC.

Définition 1: Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$. On dit que f est développable en série entière en x si f coincide avec la somme d'une série entière sur un voisinage de x.

Proposition 2: Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière alors le nombre $R := \sup\{r / (|a_n| r^n)_n \text{ bornée}\}$ est bien défini. On l'appelle rayon de convergence et on le note $\rho\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ où ρ_a s'il n'y a pas d'ambiguité.

Proposition 3: Pour $|z|<R$ $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

Pour $|z|>R$ $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Remarque 4: Pour $|z|=R$ on ne peut rien dire $\sum_{n\geq 1} z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

Proposition 5: Si $a_n = O(b_n)$ alors $\rho\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) \geq \rho\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)$

Si $a_n \sim b_n$ alors $\rho\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) = \rho\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)$

Proposition 6: (Règle d'Hadamard) on a:

$$\rho\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$ avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Proposition 7: Soit $(a_n)_n$ $(b_n)_n$ deux suites et ρ_a, ρ_b leurs rayons de convergences respectifs. On note $(c_n)_n$ le produit de Cauchy de a et b. Alors

$\rho_{a*b} \geq \inf(\rho_a, \rho_b)$

$\rho_c \geq \inf(\rho_a, \rho_b)$

Remarque 8: Les inégalités peuvent être strictes.

Proposition 9: Soit $\rho = \rho\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) > 0$ et f la somme sur $D(0,\rho)$ si $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est la somme d'une série entière au voisinage de l'origine.

B. Régularité

On se fixe une suite $(a_n)_n$ de rayon de convergence $\rho_a = R > 0$

Proposition 10: $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $D(0,R)$

Remarque 11: Il n'y a pas forcément convergence normale sur $D(0,R)$.

Théorème 12: $f: z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$

Définition 13: La série entière dérivée de $\sum a_n z^n$ est $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$. Elles ont même rayon de convergence.

Proposition 17: f est C^∞ sur $D(0,R)$. De plus $\forall p \in \mathbb{N}$ $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$

Application 18: Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ $\sum b_n z^n$ coincident sur un voisinage de 0 alors $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 0$.

Application 19: (Problème des moments).

Remarque 20: Une fonction C^∞ n'est pas forcément somme d'une série entière comme le montre $x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Proposition 21: $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur $D(0,R)$.

Inversement, toute fonction $g: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe est DSE sur tout disque inclus dans Ω.

Application 22. La composée de fonctions DSE est DSE

(1)

Proposition 23: (Principe des zéros isolés).
Soit f la somme d'une série entière dont les zéros de f sont isolés.

Application 24: (Prolongement analytique)
Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont DSE sur Ω et qui coincident sur un ensemble $U \subset \Omega$ avec un point d'accumulation alors $f = g$ sur Ω.

Proposition 25: (Formule de Cauchy). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors pour $r < R$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Application 26: Théorème de Liouville
Application 27: Théorème de D'alembert - Gauss
Proposition 28: (Formule de Parseval) Sous les hypothèses de prop 25:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

C. Théorèmes relatifs aux séries entières

(2)

Proposition 29: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[0, R]$.

Application 30:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{18}$$

(1)

Théorème 31: (Bernstein) Soit $f \in C^\infty([-a, a], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in]-a, a[\ \forall n \in \mathbb{N} \ f^{(n)}(x) \geq 0$ alors f est DSE sur $]-a, a[$.
Application 32: $\ln$ est DSE sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
Théorème 33: (Abel angulaire).

(1)

Théorème 34: (Tauber faible)
Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ la réciproque est vraie.

II. Sommes de séries

A. Exemples de DSE.

Proposition 35: (Exemples de DSE).

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!_0} \quad R = +\infty \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!_0} \quad R = +\infty$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!_0} \quad R = +\infty \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \quad R = 1$$

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \quad R = 1.$$

Proposition 36: $\forall x \in]-1, 1[\ \forall \alpha \in \mathbb{C}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!_0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Exemple 37: $\forall |x| < 1 \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n} \binom{2n}{n}$

Proposition 38: (DSE d'une fraction) rationnelle. Soit $F = \frac{P}{Q}$
Après décomposition en éléments simple il suffit de déterminer le DSE de $\frac{1}{(z-z_0)^{p+1}}$:

$$\forall z \in \mathbb{C} \ |z| < |z_0| \quad \frac{1}{(z-z_0)^{p+1}} = \frac{1}{(z_0)^{p+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

(2)

Exemple 39: (Utilisation d'une EDO).

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!_0^2}{(2n+1)!_0} x^{2n+1}$$

B. Quelques sommes remarquables.

(2)

Proposition 40: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall |x| < 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n = \arctan\left(\frac{x \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$-\alpha + \frac{\pi}{2}$

Proposition 41: Soit $p \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(pn)!_0} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{e^{\frac{2ik\pi}{p}}}$$

(2)

Proposition 42 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ $\quad \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Définition 43 : On définit les nombres de Bernoulli par

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} t^n \qquad |t| < 2\pi$$

Proposition 44 : $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} b_{2k}}{2(2n)!}$

III Séries génératrices

A. Probabilités.

(4)

Définition 45 : Soit X une vad. On définit sa fonction génératrice par $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) t^n$

Proposition 46 : G_X est C^∞ sur $]-1,1[$ et caractérise la loi de X.

Exemple 47 : Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $G_X(t) = (pt+q)^n$

Proposition 48 : $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow G_{X+Y} = G_X G_Y$

Proposition 49 : X admet un moment d'ordre r ssi G_X r fois dérivable en 1^-. Dans ce cas :

$$G_X^{(r)}(1^-) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1))$$

B. En combinatoire

(3)

Proposition 50 : Le nombre de dérangements de S_n vaut $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} z^n = \frac{e^{-z}}{1-z}$ $\quad |z|<1$

Proposition 51 : Le nombre de Partition de $[\![1,k]\!]$ B_k (nombre de Bell) vaut :

$$B_k \quad \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \Big/ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = e^{e^z - 1} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Application 52 : $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$

Proposition 53 : Le nombre I_n d'involutions de S_n vaut $\sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} \frac{n!}{k! 2^k (n-2k)!}$. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} z^n \quad z \in \mathbb{C}$

Application 54 : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} + \sqrt{n} - \frac{1}{4}}$

Définition 55 : (Partition d'un entier). On note pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n = \left| \left\{ (a_1, \dots, a_k) \;/\; \sum_{i=1}^{k} a_i = n \right\} \right|$$

Proposition 56 : $\forall |x|<1$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-x^n}$

Application 57 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $p_n \in \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$

Proposition 58 : (ADMis) (Hardy et Ramanujan 1918).

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

IV Deux applications

(5)

A. Résolutions d'équations différentielles

Exemple 59 : Equation Bessel

B. Problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur.

(6)

Définition 60 : On dit que $(a_n)_n$ est Abel sommable si $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge alors $(a_n)_n$ Abel sommable et $\sum_{\text{Abel}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

$$\sum_{\text{Abel}} a_n := \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ existe}$$

Problème 61 : (Dirichlet) Soit v continue sur $C(0,1)$. On cherche u continue sur $\overline{D(0,1)}$ telle que $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ sur } D(0,1) \\ u = v \text{ sur } C(0,1) \end{cases}$

Proposition 62 : Cf 246

2.26 Leçon 245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Il manque un lien avec les séries de Fourier (cf problème de Dirichlet par exemple).

Références utilisées :

— (1) *Complex Analysis* EM.Stein R.Shakarchi
— (2) *Analyse complexe* E.Amar E.Mathéron
— (3) *Calcul Intégral* B.Candelpergher

Fonctions d'une variables complexes. Exemples et applications.

245

(1)

(2)

Ω désigne en ouvert de $\mathbb{C}$.

I Fonctions holomorphes

A. Généralités

Définition 1: $f: \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe en $z_0 \in \Omega$ si

$$f'(z_0) : \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

existe et est finie. f est holomorphe sur Ω si f est holomorphe en tout point de Ω on note $H(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions

Exemple 2: Soit $P \in \mathbb{C}[Y]$ alors $P \in H(\mathbb{C})$

Exemple 3: $z \mapsto \bar{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

Proposition 4: $(H(\Omega), +, \times)$ est une algèbre stable par composition. De plus les règles sur les dérivées des fonctions à variables réelles restent vraies.

Remarque 5: Pour $f: \Omega \to \mathbb{C}$ on peut identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ et considérer f comme une fonction $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Théorème 6: Soit $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction. Alors f est holomorphe sur Ω ssi u et v sont C^1 sur Ω et $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. La jacobienne en (x,y) est alors une similitude directe.

On appelle ces équations les équations de Cauchy-Riemann.

Corrollaire 7: Si f holomorphe, de parties réelles et imaginaires C^2 alors elles sont harmoniques.

Remarque 8: En notant $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$ on a f holomorphe sur Ω ssi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Proposition 9: Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et f définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

alors f holomorphe sur Ω.

B. L'exemple des séries entières.

(1)

On considère une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$. On note f la somme sur $\Omega = D(0,R)$.

Proposition 10: f est holomorphe sur Ω et $\forall z \in \Omega$.

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

En particulier f' est aussi holomorphe sur Ω

Exemple 11: exp, cos, sin sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

C. Intégration sur un chemin

(1)

Définition 12: Un chemin tracé dans $\mathbb{C}$ est une application C^1 par morceau $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$. C'est un lacet si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 13: Deux chemins γ et $\tilde{\gamma}$ sont dits équivalents s'il existe une bijection φ C^1 telle que $\varphi' > 0$ et $\gamma \circ \varphi = \tilde{\gamma}$.

Définition 14: Soit $f: \Omega \to \mathbb{C}$ continue alors on définit

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \quad \text{pour } \gamma \ C^1.$$

cela ne dépend pas de la classe de γ et on l'appelle l'intégrale de f sur le contour γ.

Définition 15: Si $\gamma \in C^1_{pm}$ on définit $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

Exemple 16: $\int_C \frac{dz}{z} = 2i\pi$ où C est le cercle unité

(2)

Définition 17: (Indice) $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$

Proposition 18: $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

D. Logarithme complexe.

(2)

Définition 19: Soit $X \subset \mathbb{C}^*$. Un logarithme sur X est une application ℓ telle que $\forall z \in X$ $\exp(\ell(z)) = z$

(2) Proposition 20. Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur le cercle unité.

Définition 21 Pour $z \in \mathbb{C}^*$ on note $\arg(z)$ l'unique argument de z dans $]-\pi, \pi]$.

Définition 22. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ on appelle détermination principale du logarithme la fonction :

$$\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\arg z$$

Proposition 23 Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

Remarque 24 : On peut obtenir d'autre détermination sur $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta} / r \geq 0\}$.

II Formule de Cauchy et conséquences

A. Formule de Cauchy.

(n) Théorème 25 : (Goursat) Soit $f \in H(\Omega)$ et $T \subset \Omega$ un triangle alors $\int_T f(z)dz = 0$

Proposition 26 : Si $f \in H(\Omega)$ alors pour un lacet $\gamma \subset \Omega$ $\int_\gamma f(z)dz = 0$

Application 27 : (Fresnel) $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ $a > 0$

(2) Théorème 28 : (Formule de Cauchy). Soit Ω simplement connexe et $f \in H(\Omega)$. Soit γ un chemin tracé dans Ω alors :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \text{où } z \notin \mathrm{Im}(\gamma).$$

Remarque 29 : En particulier $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$

(1) Corollaire 30 : Soit $f \in H(\Omega)$ alors $f' \in H(\Omega)$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Corollaire 31 : Si $f \in H(\Omega)$ alors pour tout $D(z_0, r) \subset \Omega$ f est développable en série entière sur $D(z_0, r)$. On dit que f est analytique. De plus $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$.

B. Théorèmes Fondamentaux.

Définition 32 : $f \in H(\mathbb{C})$ est dite entière.

Théorème 33 : (Liouville) si $f \in H(\mathbb{C})$ bornée alors f constante

Application 34 : $f \in H(\mathbb{C})$ alors $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

Proposition 35 : Soit $f \in H(\mathbb{C})$ $f(z) = O(|z|^n)$ alors $f \in \mathbb{C}_{[X]}[X]$

Proposition 36 : (Principe des zéros isolés). Soit $f \in H(\Omega)$ Ω connexe. Alors soit f est nulle soit les zéros de f sont isolés.

Application 37 : Soit $f \in H(\mathbb{C})$ non nulle alors f a un nombre dénombrable de zéros. Cf produit de fn holomorphes.

Théorème 38 : (Principe du prolongement analytique). Soit Ω connexe et $(f,g) \in H(\Omega)^2$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f = g$ sur Ω
- $\exists z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z)$
- $f = g$ sur $O \subset \Omega$ O a un point d'accumulation dans Ω.

Théorème 39 : (Weierstrass) Soit $(f_n)_n \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers g. Alors $g \in H(\Omega)$ et f_n' CVU vers g' sur tout compact de Ω.

Application 40 : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$

Théorème 40 : (Holomorphie sous l'intégrale)

Application 41 : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$

Théorème 42 : (Application ouverte). Soit $f \in H(\Omega)$ non constante alors f application ouverte.

Application 43 : Théorème de D'alembert Gauss

(1,2)

(2)

Théorème 44 (Principe du maximum) (Ω borné)
$f \in H(\Omega)$ $f \in C(\bar{\Omega})$ alors $|f(z)| \leq \sup_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|$ inégalité stricte si Ω connexe et f pas constante

Application 45 : les automorphismes du disque unité sont les $e^{i\theta}\varphi_a$ $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$

III Fonctions méromorphes.

A. Singularités.

(2)

Proposition 46 : Soit f holomorphe sur $V\setminus\{a\}$ où V est un voisinage de a. Alors f admet un unique développement sous la forme $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$ (série de Laurent)

Un tel point a s'appelle une singularité de f.

Proposition 47 : Il y a 3 cas possibles :
- $\forall n<0\ c_n = 0$ a est une singularité éliminable, f se prolonge en une fonction holomorphe en a ex : $\frac{\sin z}{z}$
- $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$, cela a lieu ssi il existe $m>0$ tel que $c_m \neq 0$ et $c_n = 0$ pour $n > m$. On dit que a est un pôle d'ordre m pour f
- l'image de tout voisinage épointé de a est dense dans $\mathbb{C}$ cela a lieu ssi $c_n \neq 0$ pour une infinité de a. On dit que f a une singularité essentielle en a.

Définition 48 : f est dite méromorphe sur Ω si f est holomorphe sur $\Omega\setminus S$ où S fermé discret et les singularités de f ne sont que des pôles.

Définition 49 : Si f a un pôle en a on appelle résidu de f en a le coeff en $\frac{1}{z-a}$ dans son développement en série de Laurent

Théorème 50 : (Résidu) : Soit Ω simplement connexe alors et f méromorphe sur Ω et γ chemin C^1 pm tracé dans U qui ne rencontre aucun pôle de f, alors $\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{a\in\Omega\cap U} \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,\mathrm{Res}(f,a)$

Application 51 : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin(\frac{\pi}{n})}$ $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$

(1)

Proposition 52 : (Formule des compléments) $\forall \mathrm{Re}(z) \in]0,1[$
$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ } DVP 1

Proposition 53 : $\forall a \in \mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z}$ $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi\coth(\pi a)}{a}$ (1)

Théorème 54 : Soit Ω simplement connexe, Si $f,g \in H(\Omega)$ γ lacet dans Ω, si $|f-g| < |f|+|g|$ sur $\mathrm{Im}(\gamma)$ alors f et g ont le même nombre de zéros dans Ω. γ délimitant un contour. (2)

Exemple 55 : Si $f \in H(\mathbb{C})$ injective alors f ne s'annule jamais.

IV Application à l'étude de fonctions spéciales

A. Fonction Γ

(2)

Proposition 55 $\forall z \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}(z)>0$ $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

Proposition 56 Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles aux entiers négatifs. De plus
$\mathrm{res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

Proposition 57 $\forall x>0$ $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}}$

Application 58 : $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ (et même $z \mapsto \frac{1}{z\Gamma(z)}$) se prolonge en une fonction entière.

B. Fonction ζ de Riemann

(3)

Proposition 59 Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Alors pour $\mathrm{Re}(s)>0$ $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{p_n^s})$

Application 60 : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge

Proposition 61 ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont le seul pôle est 1. De plus,
$\forall s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ $\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(\frac{s}{2}) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)\Gamma(\frac{1-s}{2})$ } DVP 2

Proposition 62 $\forall s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ $\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$

Application 63 : Les seuls zéros de ζ en dehors de $0\leq\mathrm{Re}(s)\leq 1$ sont aux entiers $-2k$ $k \in \mathbb{N}^*$.

2.27 Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Il faut absolument être au point sur les théorèmes de convergence, le *Calcul Intégral* B.Candelpergher l'explique bien. C'est important je pense de donner des applications *variées.*

Références utilisées :

— (1) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec
— (2) *Analyse* X.Gourdon
— (3) *Calcul Intégral* B.Candelpergher
— (4) *Oraux X-ENS Analyse 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Oraux X-ENS Analyse 4* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Série de Fourier. Exemples et applications

246

I Définition

A. Fonctions périodiques

Définition 1: On note L^0_T les fonctions T périodiques intégrables sur $[0,T]$.

Proposition 2: $f \in C_T$ si et seulement si $x \mapsto f(\frac{x}{2\pi}T)$ est 2π périodique ainsi on se restreint à $T = 2\pi$ dans la suite

Exemple 3: $x \mapsto \cos(x)$ est 2π périodique.

Proposition 4: Soit $f \in L^1_{2\pi}$, alors l'intégrale de f de b sur une période ne dépend que de la longueur de l'intervalle.

Définition 5: Pour $(f,g) \in (L^1_{2\pi})^2$ on définit $f*g$ par

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

Si f ou g est 2π périodique alors $f*g$ aussi.

B. Coefficients / Séries de Fourier

Définition 6: On note $e_n(t) = e^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Définition 7: Pour $f \in L^1_{2\pi}$, on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt$

Exemple 8: Pour $k \in \mathbb{Z}$ $c_n(e_k) = \delta_{n,k}$

Proposition 9:

Soit $f \in L^1_{2\pi}$ $a \in \mathbb{R}$, $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$ et $g \in L^\infty$ alors

i) $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$

ii) $c_n(\tau_a f) = e^{ina}c_n(f)$ $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$

iii) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$

iv) $f * e_n = c_n(f)e_n$

v) $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$

vi) si $f \in C_{2\pi} \cap C^1_{pm}$ alors $c_n(f') = in\,c_n(f)$

Proposition 10 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

Soit $f \in L^1_{2\pi}$ alors $c_n(f) = o(1)$ quand $|n| \to +\infty$

Proposition 11:

L'application $\mathcal{F} : L^1 \to C_0(\mathbb{Z})$ est un morphisme d'algèbre

$$f \mapsto (c_n(f))$$

de norme 1, il est injectif non surjectif.

Définition 12 Pour $f \in L^1$ on définit $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$ la série de Fourier partielle de f en x

C. Lien entre décroissance et régularité.

Proposition 13:

Soit $f \in C_{2\pi}$

- $f \in C^k \Rightarrow c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$
- $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \Rightarrow f \in C^{k-2}$ $k \ge 2$
- $f \in C^\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$
- f analytique $\Leftrightarrow \exists c > 0$ $c_n(f) = O(e^{-c|n|})$

Corollaire 14: Soit $S_0 = \left\{(a_n)_n \;/\; \forall k \ge 0\ a_n = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)\right\}$ alors

$\mathcal{F}$. $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}) \to S_0$ est un isomorphisme.

$f \mapsto (c_n(f))_n$

(Nécessite Fejer)

II Théorème de convergence et Noyau

A. Noyau de Dirichlet et Fejer

Définition 15 On définit le noyau de dirichlet par

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{ikt}$$

Proposition 16:

- D_N est pair et $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)\,dt = 1$
- pour $x \not\equiv 0 [2\pi]$ $D_N(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
- $S_N(f) = f * D_N$
- $\|D_N\|_1 \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty$

(1) Définition 17: On définit pour $n \in \mathbb{N}$ le noyau de Fejer par $K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$. (Noyau de Fejer).

Proposition 18:
Pour $x \notin 0[2\pi]$ $K_n(x) = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{n\sin^2(\frac{x}{2})}$ et $\|K_n\|_1 = 1$ pour $n>0$

Définition 19: Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\sigma_n(f)(x) = (K_n * f)(x)$.

B. Théorème de convergence de Fejer et conséquences

(1) Théorème 20 (Fejer) — DVP
- Soit $f \in C^0_{2\pi}$ alors $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Soit $f \in L^p_{2\pi}$ alors $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(2) Proposition 21: Il existe $f \in C^0_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en 0.

(1) Corollaire 22:
i) Si $S_n(f)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ alors $l = f(x)$
ii) Si $(c_n(f))_n \in \ell^1$ alors $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ et il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$.
iii) $(e_n)_n$ est une base Hilbertienne de $L^2_{2\pi}$
iv) Si $f \in C_{2\pi} \cap C^1_{pm}$ alors $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$
v) $\mathcal{F}$ est injective
vi) (Weierstrass). Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite de polynômes.

Théorème 23: (Dirichlet). Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$
On suppose $f^+ := \lim_{t\to 0^+} f(x_0+t)$ et $f^- := \lim_{t\to 0^+} f(x_0-t)$ existent
s'il existe $\delta > 0$ tel que $\int_0^\delta \left|\frac{f(x_0+t) - f^+}{t}\right| dt < +\infty$
et $\int_0^\delta \left|\frac{f(x_0-t) - f^-}{t}\right| dt < +\infty$.
Alors $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}(f^+ + f^-)$

Application 24: $\forall a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ $\pi\cot(\pi a) = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}$ (1)(3)

C. Série de Fourier dans L^2.

Proposition 25: Soit $f \in L_{2\pi}$ alors $f \in L^1_{2\pi}$ ssi $c_n(\theta) \in \ell^1(\mathbb{Z})$

Proposition 26: Soit $f \in L^2_{2\pi}$ alors $\|f - S_n(\theta)\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Proposition 27: (Egalité de Parseval). Soit $f \in L^2_{2\pi}$ alors
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt =: \|f\|_2^2$$
Donc $L^2_{2\pi} \to \ell^2$ $f \mapsto (c_n(f))_n$ est une isométrie

Proposition 28: Pour $f, g \in L^2_{2\pi}$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}$

Application 30:

III Applications

A. Formule sommatoire de Poisson.

(1) Théorème 31: (Formule sommatoire de Poisson)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ telle que $|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\alpha}$ avec $C>0$ et $\alpha > 1$: alors,
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$ DVP

Application 32 (Fonction theta de Jacobi) Soit $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ alors $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t})$ $t>0$ (1)(3)

Application 33 $\forall a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ $\pi\cot(\pi a) = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}$

Application 34 La fonction ζ de Riemann se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et pour $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$
$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\tfrac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Application 35 les seuls zéros de ζ en dehors de $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ sont les $-2k$ $k \in \mathbb{N}^*$.

B. Calcul de sommes

(1) Proposition 36 $\forall a \in]0,2\pi[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$

(2) Proposition 37 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

Proposition 38 $\forall x \in]-1,1[\quad \sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$

Proposition 39 $\forall x \in]-\pi,\pi[\setminus \{0\} \quad \frac{1}{\sin^2(x)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x - n\pi)^2}$

(4) Définition 40 On note $(b_n)_n$ les nombres de Bernoulli définis par : $\forall |z| < 2\pi \quad \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$

Proposition 41 $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2n)!} b_{2k}$

(1) Proposition 42 (Sommes de Gauss)

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n^2}} = \frac{(1 + i^{-n})(1+i)\sqrt{n}}{2}$$

C. Inégalité isopérimétrique

(1) Proposition 43 (Inégalité de Wirtinger) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in C^1 \cap C_{2\pi}$ de moyenne nulle. Alors $\|f\|_2 \leq \|f'\|_2$ avec égalité ssi f est de la forme $ae^{ix} + be^{-ix}$ $(a,b) \in \mathbb{C}^2$

Application 44 (Inégalité isopérimétrique) Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ une courbe de Jordan C^1 par morceaux de longueur L et enfermant une surface S. Alors $L^2 \geq 4\pi S$ et il y a égalité ssi la courbe définit un cercle.

(5) ## IV. Résolution d'EDO et d'EDP

A. Résolution d'EDO

Proposition 45 $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$

Proposition 46 : Les solutions de $y'' + y = |\sin(x)|$ sont de la forme $a\cos(x) + b\sin(x) + f(x)$ avec $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}$

B. Equation de la chaleur

Application 47 (Equation de la chaleur sur le cercle) Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle C^1 par m et 2π périodique alors l'équation

$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$ admet une unique solution : $u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u_0) e^{-n^2 t} e^{inx}$

Schrödinger / Ondes si la place

C. Problème de Dirichlet sur le demi-plan supérieur

Définition 48 : Une suite $(u_n)_n$ est dite Abel sommable si

$$\sum_{\text{Abel}} u_n := \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \text{ existe et est finie}$$

Proposition 49 : Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $(u_n)_n$ est Abel sommable et $\sum_{\text{Abel}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Remarque 50 : On étend cette définition à $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par

$$\sum_{\text{Abel}} v_n = \lim_{r \to 1^-} \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n r^{|n|}.$$

Proposition 51 : Soit $f \in C^0_{2\pi}$ on a :

$$\sum_{\text{Abel}} c_n(f) e^{2i\pi n x} = \lim_{r \to 1^-} (P_r * f)(x) = f(x)$$

Avec $P_r(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2}$

Théorème 52 : Soit $f \in C^0_{2\pi}([0,2\pi])$, il existe un unique $u \in C^0([0,1[\times [0,2\pi]) \cap C^0([0,1] \times [0,2\pi])$ tel que $u(r,\cdot)$ 2π périodique vérifiant :

i) $\Delta u = 0$ sur $[0,1[\times [0,2\pi]$ ii) $\lim_{r \to 1^-}$ CVU $u(r,\theta) = f(\theta)$

Application 53 : Si $\Delta u = 0$ sur $[0,1[\times [0,2\pi]$ et $u \to 0$ alors $u = 0$

2.28 Leçon 250 : Transformation de Fourier. Exemples et applications.

Le jour de l'oral j'aurai rajouté une partie sur les distributions tempérées.

Références utilisées :

— (1) *Chemin d'Analyse Tome 1* D.Chiron
— (2) *Objectif Agrégation* V.Beck J.Malick G.Peyré
— (3) *Complex Analysis* EM.Stein R.Shakarchi
— (4) *Fourier Analysis* EM.Stein R.Shakarchi
— (5) *Analyse* X.Gourdon
— (6) *Probabilités Tome 2* JY.Ouvrard

I Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

A. Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Définition 1 : Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|$

$\alpha! = \prod_i \alpha_i!$ $\quad x^\alpha = \prod_i x_i^{\alpha_i}$ $\quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ si $\beta \le \alpha$

Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ on note $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$

Définition 2 : On appelle espace de Schwartz l'ensemble

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \,/\, \forall r \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \|(1+|x|^2)^r \partial^\beta f\|_\infty < +\infty \right\}$$

Exemple 3 : $x \mapsto e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour $a > 0$

$x \mapsto \frac{1}{ch(x)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Définition 4 : On note pour $r \in \mathbb{N}$, $N_r(f) = \max_{|\alpha| \le r} \|(1+|x|)^r \partial^\alpha f\|_\infty$

et on munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de la distance $d(f,g) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{2^r} \frac{N_r(f-g)}{1+N_r(f-g)}$

Proposition 5 : $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d)$ est complet.

Proposition 5 : $(\mathcal{S}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre stable par dérivation et multiplication par un polynôme.

Définition 6 : Soit f, g deux fonctions, on définit quand cela a un sens la convolée de f et g par

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y)\, dy$$

Proposition 7 : Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g$ est bien défini et appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha(f*g) = f * \partial^\alpha(g)$

Proposition 8 : $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), +, *, \cdot)$ est une algèbre commutative

B. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 11 : Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on définit sa transformée de Fourier par : $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$.

Proposition 10 : On a pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}^d)^2$

i) $\mathcal{F}(\partial^\beta f) = (-i\xi)^{|\beta|} \mathcal{F}(f)$ ii) $\mathcal{F}(x^\alpha f) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha(\mathcal{F}(f))$

iii) $\mathcal{F}(f(\cdot - a)) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}(f)$ iv) $\mathcal{F}(e^{iax} f) = \mathcal{F}(f)(\xi - a)$

Exemple 11 : Si $f(x) = e^{-a\|x\|^2}$ alors $\mathcal{F}(f)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4a}}$

Exemple 12 si $f(x) = \frac{1}{ch(\pi x)}$ $\quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{ch(\pi \xi)}$

Proposition 13 : (Formule d'inversion). $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est un homéomorphisme et pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, dx.$$

Proposition 14 : Soient $f, g \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^2$ alors

i) $\int_{\mathbb{R}^d} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} g$ ii) $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

iii) $(2\pi)^d \mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$

Théorème 15 : Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

En particulier $(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une isométrie bijective.

II Extension de la transformation de Fourier

A. Extension à L^1.

Proposition 17 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Proposition 18 : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ s'étend en une application $\mathcal{F} : L^1 \to C_0(\mathbb{R}^d)$

Proposition 19 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$.

(1)

Proposition 20 : (Lemme de Riemann-Lebesgue). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\|\xi\| \to +\infty]{} 0$.

Proposition 21 $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}^d), \|.\|_1) \to (C_0(\mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ est continue

Exemple 22 ($d=1$) $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \notin L^1$

Proposition 23 : Si $(f,g) \in L^1$ $f*g$ est bien défini dans L^1 et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Proposition 24 Soient f et g dans L^1, alors $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$

Application 25 : $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ algèbre non unitaire.

Proposition 26 : Soit $f \in L^1$ telle que $\hat{f} \in L^1$ alors

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad \text{p.p}$$

Application 27 $\mathcal{F} : L^1 \to C_0(\mathbb{R}^d)$ injective

Remarque 28 Pas surjective.

Application 29. $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = e^{-|t|}$ (Loi de Cauchy).

(3)

Application 30 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $\rho : I \to \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$ pour $\alpha > 0$. alors $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $L^2(\rho)$.

Exemple 31 : pour $I =]-1,1[$ $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ les polynômes orthogonaux pour $\langle f|g \rangle = \int fg\rho$ sont les polynômes de Tchebychev T_n.

Ils vérifient $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

B. Extension à L^2

(1)

Proposition 32 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|.\|_2)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

et donc $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|.\|_2) \to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|.\|_2)$ s'étend en une application $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ qui vérifie :

$$\forall f \in L^2 \quad \|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

(1)

Proposition 33 Si $f \in L^1 \cap L^2$ alors les définitions coïncident bien.

Application 34 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Proposition 35 Si $f \in L^2$ alors pour $n \in \mathbb{N}$ $f_n := f \mathbb{1}_{B(0,n)} \in L^1 \cap L^2$ et $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_2 \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Définition 36 On définit pour $n \in \mathbb{N}$ les polynômes de Hermites par $H_n = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

Définition 37 On définit pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction de Hermite par $h_n(x) = \mu_n H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ où μ_n est choisi pour avoir $\|h_n\|_1 = 1$

Théorème 38 : La famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}(h_n) = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n$$

(4)

III Quelques applications :

A. Résolution d'EDP.

Théorème 39 : (Equation des ondes). Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ il existe une unique $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ à $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vérifiant

$u(x,0) = f(x)$ $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$.

iii) $\forall T > 0 \ \forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 \ \sup_{|x| < T} \left| x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l} \right| =: M_{k,l}^T < +\infty$.

Théorème 40 : (Equation de Schrödinger). Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant : } DVP1

i) $\partial_t u = i \partial_x^2 u$ ii) $u(x,0) = f(x)$

iii) $\forall T > 0 \ \forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 \ \sup_{|x| < T} \left| x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l} \right| =: M_{k,l}^T < +\infty$.

De plus, u est donné par $u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-it\xi^2} e^{ix\xi} d\xi$

(4)

Théorème 41 : (Équation de la chaleur).
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*})$ telle que :
i) $\partial_t u = \frac{\partial^2 u}{\partial x}$ $\quad u(x,0) = f(x)$.
iii) $\forall T>0 \ \forall (k,l)\in\mathbb{N}^2 \ \sup_{0\le t\le T} \| x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l} \| =: M_{k,l}^T < +\infty$.

Proposition 42 : Soit $f \in C_b^0(\mathbb{R})$. Alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$ par $u = (f * H_t)(x)$ $H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ vérifie :
i) $\partial_t u = \partial_x^2 u$ ii) $\forall x\in\mathbb{R}$ $u(x,t) \xrightarrow[t\to 0]{} f(x)$
sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$

Remarque 43 : On voit l'effet régularisant de l'équation de la chaleur $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*})$

Remarque 44 : Il n'y a pas forcément unicité : Si $f \equiv 0$ $u \equiv 0$ et $u(x,t) = \frac{x}{t^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$ vérifient i) et ii).

B. Principe d'incertitude d'Heisenberg

(7)

Proposition 41 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = 1$
Alors $\left(\int_{\mathbb{R}^d} x^2 |f(x)|^2 dx\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |\hat f(\xi)|^2 d\xi\right) \ge \frac{d^2}{4}$ (*)

Proposition 42 Il y a égalité dans (*) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ $\nabla f(x) = \lambda x f(x)$

C. Formule sommatoire de Poisson

(5)

Proposition 43 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $C>0$, $\alpha>1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^\alpha}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat f(n)| < +\infty$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f(n)$

Application 44 : Si $\Theta = \sum e^{-\pi n x^2}$ alors $\forall x \ \Theta(x) = \Theta(\frac{1}{x})$

(5)

Application 45 : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$

Application 46. La fonction ξ de Riemann se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$
$$\xi(s)\,\Gamma(\tfrac{s}{2})\,\pi^{-\frac{s}{2}} = \xi(1-s)\,\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\,\pi^{-\frac{1-s}{2}}$$

(6)

IV Fonctions caractéristiques

Définition 47 Soit X une ver on définit sa fonction caractéristique par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$

Exemple 48. Si $X \sim \text{Cauchy}(1)$ $\varphi_X(t) = e^{-|x|}$

Proposition 49 La fonction caractéristique caractérise la loi

Proposition 50. Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ alors X admet une densité f donnée par $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t) e^{ixt} dt$

Proposition 51 Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

Proposition 52. - Si X admet un moment d'ordre n alors φ est C^k et $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$ pour $k \le n$
- Si φ_X k fois dérivable en 0 alors X admet des moments à l'ordre $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$

Remarque 53 φ_X peut être dérivable en 0 sans que la variable aléatoire admette une moyenne.

Proposition 54 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ simplement

Application 55 : Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ iid L^2 et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$
alors $\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sqrt{\text{Var}(X)})$

2.29 Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Utilisation de la notion de convexité en analyse.

253

Soit E un evn et $f : C \subset E \to \mathbb{R}$ C convexe

I Fonctions convexes

A. Généralités.

Définition 1 : f est dite convexe si pour tout $(x,y) \in C^2$ $t \in [0,1]$ $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$.
concave si $-f$ convexe.

Proposition 2 : Supposons $C \subset \mathbb{R}$ alors pour $(a,b,c) \in C^3$ $a < b < c$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Cf dessin.

Application 3 : On suppose $C \subset \mathbb{R}$ et f convexe, alors f est continue en tout point de $\mathring{C}$ et admet des dérivées à droite et à gauche en tout point de $\mathring{C}$.

Application 4 : Les points de non dérivabilités d'une fonction convexe sont au plus dénombrables.

B. Lien avec la différentiabilité.

Théorème 5 : On suppose $C \subset \mathbb{R}$ et f dérivable. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
i) f convexe
ii) f' croissante
iii) La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes.

Corollaire 6 : Si f deux fois dérivables alors f est convexe ssi $f'' \geq 0$

Application 7 : $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0,+\infty[$

Application 8 : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x$

Application 9 : Parmi les fonctions C^1 la droite est le plus court chemin entre deux points a et b.

Proposition 10 : On suppose f différentiable sur C ouvert alors f est convexe ssi $\forall (x,y) \in C^2$ $f(y)-f(x) \geq df(x)\cdot(y-x)$
Si f C^2 alors f convexe ssi $Hess(f)(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour tout x.

C. Inégalités classiques.

Proposition 11 : (Inégalité arithmético-géométrique)
Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs alors :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

il y a égalité ssi tous les x_i sont égaux

Application 12 : (Inégalité de Carleman). $\forall (a_n) \geq 0$ tq $\sum a_n$ converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

et e est la meilleure constante possible.

Proposition 12 : $\forall x \in \mathbb{R}$ $1+x \leq e^x$

Application 13 : Lemme de Borel-Cantelli.

Proposition 14 : (Inégalité de Chernoff).

Proposition 13 : (Inégalité de Young) Soit $(x,y) > 0$ et $(p,q) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ conjugués alors $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$

Application 14 : (Inégalité de Hölder)
Soient $f \in L^p(\mu)$ $g \in L^q(\mu)$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $fg \in L^1$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Application 15 : (Inégalité de Minkowski)
Soient $f, g \in L^p$ $p \in [1, +\infty[$ alors

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Conséquence 16 : $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(\mu)$.

Proposition 17: (Inégalité de Jensen)
Soit X une va intégrable et $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $\varphi(X)$ intégrable.
Alors $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$
Application 19: Théorème de Fejer.

II Ensembles convexes

A. Enveloppe convexe

Proposition 20: Une intersection de convexes est convexe
Définition 21: Pour $A \subset E$ on note $\mathrm{Conv}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset C \\ C \text{ convexe}}} C$
on l'appelle l'enveloppe convexe de A.
c'est le plus petit convexe contenant A.
Exemple 22: Cf Annexe
Théorème 23: (Gauss Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ alors les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.
Application 24: Si $P \wedge P' = 1$ alors les racines de P sont alignés.
Théorème 25: (Caratheodory). On suppose $\dim E = n$. Alors tout élément de $\mathrm{conv}(A)$ est combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de A.
Application 26: Si A compact alors $\mathrm{conv}(A)$ compact.
Théorème 27: (Helly). Soit E de dim n et $m \geq n+1$.
Soient $K_1, \dots, K_m$ des compacts convexes tels que toute intersection de $n+1$ de ces compacts est non nulles. Alors $\bigcap_{i=1}^{m} K_i \neq \emptyset$
Application 28: (Théorème de Jung)
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ de diamètre 1. Alors A est inclus dans une boule de rayon $\leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$

B. Points fixes.

Théorème 29: (Kakutani).
Soit $G < GL_n(\mathbb{R})$ compact et K convexe compact tel que $\forall g \in G,\ g(K) \subset K$. Alors il existe $x \in K$ tel que $gx = x$ pour tout $g \in G$.
Application 30: Soit $G < GL_n(\mathbb{R})$ compact, alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

C. Points Extrêmaux.

Définition 31: $x \in C$ est dit extrémal si $C \setminus \{x\}$ est convexe. On note $\mathrm{Extr}(C)$ l'ensemble de ces points.
Proposition 32: Si $\dim E < +\infty$ et C convexe compact alors $\mathrm{Extr}(C) \neq \emptyset$
Contre-Exemple 33: $\mathrm{Extr}(\overline{B}_{L^\infty(\mathbb{R})}) = \emptyset$
Proposition 34: Supposons E euclidien et C convexe fermé. Alors pour $x \in \partial C$ il existe un hyperplan affine H de E passant par x tel que C soit contenu dans un des demi-espace délimité par C.
Théorème 35: (Krein-Millmann). Soit E euclidien et $K \subset E$ convexe compact. Alors $\mathrm{Conv}(\mathrm{Extr}(K)) = K$
Application 36: $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \overline{B}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ pour la norme subordonnée à la norme euclidienne.
Théorème 37: (Choquet). Soit K convexe compact et $f: K \to \mathbb{R}$ linéaire continue. Alors f atteint son minimum en un point extrémal de K.

III Optimisation

A Application à l'existence de minimum

Proposition 38: Supposons f convexe, alors si x minimum local de f, c'est aussi un minimum global.
Définition 39: On dit que f est:
strict convexe si $f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y)$ $\forall t \in]0,1[$ et $x \neq y$
α-convexe si $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x-y\|^2$

Proposition 40 : α convexe $\Rightarrow$ strict convexe $\Rightarrow$ convexe

Proposition 41 : (Existence d'extremum)

- Si f convexe ni existence $(x_n) \to x$ ni unicité $(x(L) - f(x))$
- Si f strict convexe pas forcément existence mais unicité
- Si f α convexe existence et unicité

B. Application à la recherche de minimum

But 42 : Résoudre $Ax = b$ de manière approchée.

Proposition 43 : Soit $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors f est convexe coercive et le minimum de f est atteint en l'unique point vérifiant $Ax = b$.

Définition 44 On considère $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et $X^{(k+1)} = X^{(k)} - \rho \nabla f(X^{(k)})$ où $\rho > 0$. On l'appelle méthode de gradient à pas fixe.

Définition 45 $X^{(n+1)} = \underset{u \in x^{(k)} + F_k}{\operatorname{argmin}} f(u)$ où $F_k = \mathrm{Vect}(\nabla f(X^{(k)}))$

méthode de gradient à pas optimal.

Lemme 46 (Inégalité de Kantorovich). Notons $S_n(A) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$ alors pour $X \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|X\|^4}{\|X\|_A^2 \, \|X\|_{A^{-1}}^2} \geq \frac{4\lambda_1\lambda_n}{(\lambda_1+\lambda_n)^2}$$

où $\|X\|_A^2 = \langle AX, X\rangle$.

Proposition 47 Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et $X_{k+1} = X_k - \alpha_{k+1} R_k$

$$\alpha_{k+1} = \frac{\|R_k\|^2}{\|R_k\|_A^2} \qquad R_k = AX_k - B.$$

Alors $\|X_k - \bar{X}\| \leq \sqrt{\mathrm{cond}_2(A)} \left(\frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1}\right)^k \|X_0 - \bar{X}\|$ où $A\bar{X} = b$ $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$

IV Convexité en analyse fonctionnelle

A. Espace de Hilbert

H Hilbert C convexe fermé non vide

Théorème 48 (Projection sur un convexe fermé).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique $P_C(x) \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - P_C(x)\|$. De plus $P_C(x)$ caractérisé par :

- $\forall y \in C \quad \langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0 \qquad P_C(x) \in C$
- Si C sev fermé $\begin{cases} P_C(x) \in F \\ x - P_C(x) \perp F \end{cases}$

Application 49 : (Théorème supplémentaire orthogonal)

Soit $F \subset H$ sev fermé. Alors $H = F \oplus F^\perp$

Application 50 (Critère de densité dans un Hilbert). Soit F sev de H alors F dense dans $H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$.

Application 51. Polynômes orthogonaux

Théorème 52 (Représentation de Riesz).

$\forall f \in H' \; \exists! \, x \in H, \; \forall y \in H \quad f(y) = \langle y, x\rangle$

Application 53 Définition adjoint

Définition 54. On dit que $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si $\forall y \in H \quad \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. On note $x_n \rightharpoonup x$

Théorème 55 Si $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ bornée alors il existe une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge faiblement. / OVP

Application 56 : Soit $J : H \to \mathbb{R}$ continue convexe / coercive, alors J atteint son minimum.

Application 57 : Soit $f \in C^0(0,1)$ $p > 1$, il existe une unique solution $u \in H_0^1(0,1)$ où $-u'' + |u|^{p-1}u = f$.

2.30 Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Le livre *Probabilités pour les non probabilistes* W.Appel contient une tonne d'exemples non triviaux qui enrichissent énormément toutes les leçons ou on peut parler de probabilités.

Références utilisées :

— (1) *Probabilités Tome 2* JY.Ouvrard
— (2) *Probabilités* P.Barbe M.Ledoux
— (3) *Probabilités pour les non probabilistes* W.Appel

Loi d'une variable aléatoire. Caractérisations, exemples et applications.

261

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé, $X : \Omega \to E$ variable aléatoire.

I Loi d'une variable aléatoire

A - Généralités.

(1)

Définition 1 : La loi de X est la mesure image de $\mathbb{P}$ par X ie $P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$.

Proposition 2 : P_X est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si $P_X = p\delta_0 + (1-p)\delta_1$ ie $\mathbb{P}(X=0) = p$ $\mathbb{P}(X=1) = 1-p$

Définition 3 : Si P_X est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue on dit que X est une var à densité. Si P_X est absolument continu par rapport à la mesure de comptage on dit que X est une va discrète (vad).

Définition 4 : Si X est une var on appelle densité de X la fonction $f = \frac{dP_X}{d\lambda}$

Proposition 5 : En annexe les lois usuelles discrètes et à densités.

B. Fonction de répartition.

(2)

Définition 6 : Soit X une var on appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

Proposition 7 : F_X vérifie les propriétés suivantes :

i) $0 \leq F \leq 1$

ii) F est croissante, continue à droite limite à gauche en tout point

iii) $\lim_{+\infty} F = 1$ $\lim_{-\infty} F = 0$

iv) F a un nombre au plus dénombrable de points de discontinuités.

Inversement, si g est une fonction vérifiant i) ii) et iii) alors g est la fonction de répartition d'une va.

Exemple 8 : Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $F_X(t) = (1 - e^{-\lambda t}) 1_{\mathbb{R}_+}(t)$

$X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp$ $F_{\min(X_i)}(t) =$ $F_{\max(X_i)}(t) =$

Proposition 9 : Si X est à densité f alors pour $t \in \mathbb{R}$.

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$

Proposition 10 : Si F_X est C^1 alors X est de densité f.

Remarque 11 : Si X est à valeur dans $\mathbb{R}^d$ on utilise l'ordre partiel : $t \leq t'$ ssi $\forall i$ $t_i \leq t'_i$.

Définition 12 : Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire. On appelle $i$ème loi marginale la loi de X_i.

Proposition 13 : X détermine ses marginales, la réciproque est fausse.

Proposition 14 : Si X, Y sont deux var à densité et (X,Y) à densité, alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $f_X(x) f_Y(y)$.

II Caractérisation de la loi d'une va.

A. Fonction de répartition

Proposition 15 : F_X caractérise la loi de X.

Application 16 : Si $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ alors $\ln(X) \sim \mathcal{E}(1)$

Application 17 :

B. Fonctions continues bornées

(3)

Proposition 18 : X et Y ont la même loi si pour toute fonction continue bornée h on a :

$$\mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(h(Y)).$$

Application 19 : Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $\frac{X}{Y} \sim \mathcal{C}(1)$

(2)

(2) Application 21: Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $X^2+Y^2 \sim \mathcal{E}(1)$.

C. Fonctions caractéristiques génératrices.

(3) Définition 22: Soit X une var à densité (resp. discrète) on définit la fonction caractéristique de X par $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ (resp. fonction génératrice par $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

Exemple 23: $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $G_X(t) = (pt+q)^n$.

Exemple 24: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Proposition 25: En annexe, fonction caractéristique des lois usuelles.

Proposition 26: $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ (où $G_{X+Y} = G_X G_Y$)

Théorème 27: G_X / φ_X caractérise la loi de X.

Application 28: Si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X+Y \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Application 29: Si $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim \mathcal{B}(p)$ alors $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$.

D. Le problème des moments.

(3) Définition 30: On définit le $n$ème moment (s'il existe) par $m_n = \mathbb{E}(X^n)$ et $\mu_n = \mathbb{E}(|X|^n)$.

Proposition 31: Si $X \sim Y$ alors $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$

Remarque 32: La réciproque est fausse

Proposition 33: Si X admet un moment d'ordre n alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{itX})$.

(1) Proposition 34: Si φ_X est de classe $\mathcal{C}^k$ alors X admet des moments d'ordre i pour $i \leq 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

Exemple 35: Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{E}(X^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ impair} \\ ? & \text{sinon} \end{cases}$

(1) Exemple 36: Si $\delta_X = \sum_{|k|\geq 2} a_k \delta_{-k}$ $a_k = \frac{c}{k^2 \ln(k)}$ alors φ dérivable en 0 mais X n'admet pas de moments d'ordre 1.

Proposition 37: X admet un moment d'ordre k ssi G_X k fois dérivable en 1^-. On a alors:

$$G_X^{(k)}(1^-) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1)).$$

DVP 1

Théorème 38: (Problème des moments). On suppose que $\frac{1}{R} := \overline{\lim} \frac{\mu_n^{\frac{1}{n}}}{n} < +\infty$ alors X est caractérisé par ses moments.

Application 39: Si X à support fini alors X caractérisé par ses moments.

Contre-exemple 40: La loi log-normale n'est pas caractérisée par ses moments.

III Applications.

A. Inverse généralisé.

(3) Définition 41: Soit X une var de fonction de répartition F_X. On note $G(u) := \inf \{ t \in \mathbb{R} / F(t) \geq x \}$.

Proposition 42: Si $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ $G(U)$ est une va qui admet F_X pour fonction de répartition.

Application 43: On peut utiliser ce résultat pour simuler des variables aléatoires. Th Glivenko-Cantelli.

B. Convergence en loi.

(3) Définition 44: On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction h continue bornée,

$$\mathbb{E}(h(X_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(h(X)).$$

(3)

On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Proposition 45: CV presque sure $\Rightarrow$ CV proba $\Rightarrow$ CV loi.

Proposition 46: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ en tout point de continuité de F_X.

Application 47: Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R}$ (va constante) alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

Théorème 48: (Paul-Lévy). On a l'équivalence:

i) $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ simplement

ii) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Application 49: (Théorème central-limite). Soit $(X_n)_n$ une suite de va iid dans L^2, on a alors:

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Remarque 50: On peut généraliser à des vecteurs aléatoires.

Application 51: $e^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}$ $\quad n\to+\infty$

Application 52: Construction d'intervalles de confiances asymptotiques.

Proposition 53: (Marche aléatoire sur $[0,1]$).

DVP 2

Proposition 54: (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$)

DVP 3

2.31 Leçon 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Références utilisées :

- (1) *Probabilités* P.Barbe M.Ledoux
- (2) *Probabilités pour les non probabilistes* W.Appel
- (3) *Probabilités Tome 2* JY.Ouvrard
- (4) *Oraux X-ENS Mathématiques Volume* 6 S.Francinou, H.Gianella S.Nicolas

Convergence d'une suite de va. Théorèmes Limites. Exemples et applications

262

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. $(X_n)_n$ et X des va sur Ω

I Différents modes de convergences

Définition 1: On dit que X_n tend presque sûrement vers X et on note $X_n \xrightarrow{p.s} X$ si :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega / X_n(\omega) \underset{n\to+\infty}{\to} X(\omega)\right\}\right) = 1$$

Proposition 2: Lemme de Borel Cantelli

Proposition 3 Si pour tout $\varepsilon > 0$ $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$. Si les (X_n) sont mutuellement indépendants alors la réciproque vraie.

Exemple 4 Supposons $X_n \sim \mathcal{E}(1)$. Soit $M_n = \max_{i=1..n} X_i$ alors $\frac{M_n}{\ln(n)} \xrightarrow{p.s} 1$

Proposition 5 Si $X_n \xrightarrow{p.s} X$ $Y_n \xrightarrow{p.s} Y$ alors $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{p.s} \alpha X + \beta Y$

Définition 6 On dit que X_n tend vers X en probabilité si : $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ on note alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Proposition 7 Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ alors $X = Y$ p.s

Exemple 8 Si X_n centré acc $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2 \to 0$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

Proposition 9 Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ alors $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha X + \beta Y$

Proposition 10 La convergence en probabilité est métrisable $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff d(X_n, X) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ où $d(X,Y) = \mathbb{E}(|X-Y| \wedge 1)$ Ce n'est pas le cas de la convergence presque sûre.

Proposition 11 L'ensemble des va sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complet pour cette distance.

Définition 12 On dit que X_n converge vers X dans L^p vers si $X_n - X \in L^p$ et $\|X_n - X\|_p = (\mathbb{E}|X_n - X|^p)^{\frac{1}{p}} \to 0$

Définition 13 On dit que X_n converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée f $\mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{E}(f(X))$ On note alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Remarque 14 les X_n ne sont plus nécessairement définis sur le même Ω.

Remarque 15 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ $\not\Rightarrow$ $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X + Y$

Prendre $X_n = X$ $Y_n = -X$ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

Proposition 16 (Caractérisation de la convergence en loi) Les conditions suivantes sont équivalentes:

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
- $\varphi_{X_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \varphi_X$ simplement où $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que F_X continue en alors $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\to} F_X(x)$

Remarque 17 Si $X_n \in L^1$ $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors X_n n'est pas forcément dans L^1, et même si c'est le cas on n'a pas $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{E}(X)$

Proposition 18 Supposons les X_n et X de densité f_n et f. Alors Si $f_n \xrightarrow{CVS} f$ $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. La réciproque est fausse.

Proposition 19 Si X_n, X sont des va discrètes à valeurs dans $(x_k)_k$ alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
- $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X_n = x_k) \to \mathbb{P}(X = x_k)$
- $G_{X_n} \xrightarrow{CVS} G_X$ où $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$

Exemple 20 Si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ $\lambda > 0$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

Exemple 21 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

II Lien entre les différents types de convergence.

Proposition 22 Si $X_n \xrightarrow{p.s} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Remarque 23 La réciproque est fausse : $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n})$

Proposition 24 Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ extractrice telle que $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s} X$.

Proposition 25 Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$ alors $X_n \xrightarrow{L^q} X$ pour $q \leq p$

Proposition 26 Si $X_n \xrightarrow{L^1} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

(1)

Application 51: Sous les hypothèses du TCL, il n'existe pas de va Z telle que $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Z$

IV Le cas des séries aléatoires

(2)

Proposition 52 (Inégalité de Kolmogorov)
Soit $X_1, \dots, X_n$ des va indépendantes d'espérance nulle et admettant une variance. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors pour $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{k=1} |S_k| \geq \alpha \right) \leq \frac{V(S_n)}{\alpha^2}$$

Théorème 53 (Kolmogorov) Soit $(X_n)_n$ iid d'espérance nulle telle que $\sum_{n\geq 0} V(X_n)$ converge. Alors la série $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge presque sûrement.

But 54 Soit $(\varepsilon_n)_n$ des va iid à valeurs dans $\{\pm 1\}$ on s'intéresse à la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ selon la loi de ε_1.

Proposition 56. Si $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) \neq \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1)$ alors $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge presque sûrement.

Proposition 57 Si $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) \left(= \frac{1}{2}\right)$ alors $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge presque sûrement.

V Marche aléatoire

A. Cas continu.

(1)

Définition 58 On définit la fonction B par $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ où $x, y > 0$

Proposition 59: $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ où $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$

(1)

Définition 60 On dit que X suit une loi Beta de paramètre $(p,q)\geq 0$ si X est à densité f donnée par:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

Proposition 61 (Marche aléatoire sur $[0,1]$). Soit $p \in]0,1[$ et $(\varepsilon_n)_n$ iid $\sim \mathcal{B}(p)$ $(U_n)_n$ iid $\sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ et indépendantes des ε_i. Soit $x \in [0,1]$ et $(X_n)_n$ définie par:

$$\begin{cases} X_0 = x \\ X_{n+1} = U_n X_n + \varepsilon_n (1 - U_n) \end{cases}$$

/DVP

Alors X_n converge en loi vers une loi Beta de paramètre $(p, 1-p)$

B. Cas discret.

(3)

Cadre 62 Soit $(X_n)_n$ iid à valeur dans $\{\pm 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Soit $p = \mathbb{P}(X_n = 1)$ $q = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p$.

Proposition 63 Si $p \neq q$ alors $|S_n| \xrightarrow{p.s} +\infty$

Proposition 64 Si $p = q = \frac{1}{2}$ $\mathbb{E}(|S_n|) \sim \sqrt{\frac{4n}{\pi}}$

Proposition 65 On pose $a_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ (la marche revient en 0) et $b_n = \mathbb{P}(S_0 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0)$ (le premier retour est à l'instant n). Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqt^2}} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = 1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}$$

Théorème 66 (Polya) On considère maintenant Y_n à valeur dans $\{\pm 1\}^d$ et de loi uniforme; alors:

Si $d = 1$ ou 2 $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$ et

Si $d \geq 3$ $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 0$ et de plus

$|S_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} +\infty$

/DVP1

(1,2)

Remarque 27 : La réciproque est fausse

Définition 28 : On dit que $(X_n)_n$ est uniformément intégrable (u.i.) si : $\lim_{C \to +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{|X_n| > C} |X_n| \, dP = 0$

Théorème 29 : (Théorème de Vitali). Il y a équivalence entre
i) $X_n \xrightarrow{IP} X$ et $(X_n)_n$ u.i.
ii) $X_n \xrightarrow{L^1} X$

Proposition 30 : Si $X_n \xrightarrow{IP} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Remarque 31 : La réciproque est fausse $X_n = (-1)^n X$, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

Proposition 32 : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R}$ alors $X_n \xrightarrow{IP} c$

Théorème 33 : (Slutsky) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \in \mathbb{R}$ alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$

Application 34 : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n - X_n \xrightarrow{IP} 0$ alors $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Application 35 : Intervalle de confiance asymptotique

Proposition 36 : (Continuous mapping theorem). Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Si $X_n \xrightarrow{p.s., IP, \mathcal{L}} X$ alors $g(X_n) \xrightarrow{p.s., IP, \mathcal{L}} g(X)$

III Théorèmes limites

A. Loi des grands nombres

(2)

Proposition 37 : (Loi faible des grands nombres) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ L^2, indépendantes et de même espérance m / variance σ^2. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{IP} \mathbb{E}(X_1)$$

Application 38 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ alors en notant ω le module de continuité de f on a :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Application 39 (Weierstrass) : L'ensemble des fonctions polynomiales sont denses dans $C^0([0,1])$.

Proposition 40 : (Loi forte des grands nombres) Soit $(X_n)_n$ iid de même loi $X \in L^1$. Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1)$

Application 41 : Théorème de Glivenko - Cantelli

Application 42 : Test de Kolmogorov - Smirnov

Application 43 : Méthode de Monte-Carlo pour approximer des intégrales.

(2)

B. Théorème central limite

Théorème 44 : (Central limite) Soit (X_n) iid L^2 de variance $\sigma^2 > 0$. Soit $m = \mathbb{E}(X_1)$. Alors

$$\frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Proposition 45 : Le TCL donne $F_{X_n} \xrightarrow{CVS} F_X$, le 2ème lemme de Dini permet de montrer $F_{X_n} \xrightarrow{CVU} F_X$.

Application 46 : $e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$

Application 47 : (Stirling) $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \, n^n e^{-n}$

Application 48 : Construction d'intervalles de confiance

Proposition 49 : TCL multid

(1)

(2)

C. Un raffinement : la loi du logarithme itéré

Théorème 50 (Admis) (Loi du logarithme itéré) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. iid centrée de variance égale à 1.

Alors $IP\left(\overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln(\ln(n))}} = 1 \right)$ $\left(S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

2.32 Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Références utilisées :

- (1) *Probabilités pour les non probabilistes* W.Appel
- (2) *Oraux X-ENS Mathématiques Volume* 6 S.Francinou, H.Gianella S.Nicolas
- (3) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec
- (4) *Probabilités Tome 2* JY.Ouvrard
- (5) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas

Variables aléatoires discrètes. Exemples et Applications.

264

(A)

(A)

(A)

(C1)

(S)

(C)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé X une var sur Ω

I Variables aléatoires discrètes.

A. Généralités

Définition 1: On dit que X est une var discrète (vad) si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Exemple 2: Si on lance un dé et X est le résultat possible alors $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et X est discrète.

Proposition 3: Soit X une vad, si X est finie $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_k\}$ alors X admet une espérance donnée par $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X=x_k)$

Si $X(\Omega)$ est infini alors on dit que X admet une espérance si $\sum_{k\geq 1} |x_k| \mathbb{P}(X=x_k)$ converge et on note alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X=x_k)$

Si X est à valeurs positives et $\sum_{k\geq 1} x_k \mathbb{P}(X=x_k)$ diverge on notera $\mathbb{E}(X) = +\infty$

Proposition 4: (Formule de Transfert) Soit X vad et $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $\mathbb{E}(\varphi(X))$ admet une espérance ssi $\sum \varphi(x_k)\mathbb{P}(X=x_k)$ converge et dans ce cas $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(x_k)\mathbb{P}(X=x_k)$.

Application 5: $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta \mathbb{E}(Y)$

Définition 6: On dit que X admet un moment à l'ordre n si l'espérance de la variable aléatoire X^n existe.

Exemple 7: $\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{\zeta(k)} \times \frac{1}{n^k}$ admet des moments $\leq k-2$

Définition 8: Si X admet un moment d'ordre 2 on appelle variance de X la quantité $V(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$

B. Variable aléatoire de Bernoulli.

Définition 9: Soit $p \in [0,1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si $\mathbb{P}(X=1)=p$ $\mathbb{P}(X=0)=1-p$

Une telle variable l'issue possible d'un pile ou face.

Proposition 10: Soit $A \in \mathcal{F}$ alors $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

Proposition 11: $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$

Application 12: (Formule du Crible) Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Application 12 Proba nombres premiers entre eux

Remarque 13 On peut construire des variables de Bernoulli grâce à des un développement dyadique

C. Autres lois classiques.

Définition 14 (loi uniforme) $X \sim \mathcal{U}[\![a,b]\!]$ si $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{b-a+1}$

Définition 15 : Soit $p \in [0,1]$ $n \in \mathbb{N}^*$ on dit que X suite loi $\mathcal{B}(n,p)$ si pour $k \in [\![0,n]\!]$ $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ une Bernoulli telle variable simule la répétition de n épreuve de Ber indépendantes

Proposition 16 $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $\mathbb{E}(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$

Définition 17. Soit $p \in]0,1[$, On dit que X suit une loi $p(1-p)^{k-1}$ géométrique et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si pour $k \geq 1$ $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$ on une telle variable simule l'arrivée du premier succès quand réalise des epreuves de Bernoulli.

Proposition 18 $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Proposition 19 X suit une loi géométrique ssi $\forall (k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ $\mathbb{P}(X > k+l \mid X > l) = \mathbb{P}(X > k)$

Définition 20 On dit que X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $k \geq 0$ cette loi le nombre d'évènements pendant un temps donné.

Proposition 21 Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda$

Définition 22 On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètre N, n et p si $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. Cette loi modélise la situation d'un tirage sans remise

Proposition 23 Si $X \sim H(N,n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$ $V(X) = npq$ $\frac{N-n}{N-1}$
$q = 1-p$

II Outils pour les variables aléatoires discrètes

A. Indépendance

(1)
Proposition 24 : Soient X, Y deux vad alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi
$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \quad \mathbb{P}(X=x_k, Y=y_\ell) = \mathbb{P}(X=x_k)\mathbb{P}(Y=y_\ell)$

Proposition 25 $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \Rightarrow \varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

Proposition 26 Soit $s > 1$ alors $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}$ où $(p_n)_n$ suite croissante des nombres premiers.

Application 27 : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge

Proposition 28 Soit X, Y deux vad indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors pour $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$

Application 29 Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ $X \perp\!\!\!\perp Y$ $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$

Application 30 Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ $X \perp\!\!\!\perp Y$ $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

B. Fonctions caractéristiques

(1)
Définition 31 Soit X une vad à valeur dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction caractéristique de X et on note $G_X(t)$ la fonction

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$$

Proposition 32 : G_X est continue sur $[-1,1]$ et C^∞ sur $]-1,1[$, convexe
De plus X admet un moment d'ordre k ssi G_X est k fois dérivable à gauche en k. Dans ce cas $G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-k+1))$

Proposition 33 Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$

Proposition 34 G_X caractérise la loi de X : $\mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Application 35 Si $(X_1, \dots, X_n)$ iid $\mathcal{B}(p)$ alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$

(2)
Application 36 On ne peut pas truquer deux dés pour que la somme suive une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

(1)
Proposition 37 Soit (X_n) des vad et X une vad, il y a équivalence entre :

(1)
i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
ii) $G_{X_n} \xrightarrow{CVS} G_X$
iii) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X_n = x_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = x_k)$

Application 38 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ TDVP

(1)
Application 39 : Si $X \sim \mathcal{B}(n,p_n)$ $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ alors $X \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

C. Inégalité.

Chernoff application marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$

Hoeffding (App : Bernstein)

III Les séries aléatoires

(1)
Proposition 44 (Inégalité de Kolmogorov)
Soit $X_1, \dots, X_n$ des va indépendantes d'espérance nulle et admettant une variance. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors pour $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{k=1}^{n} |S_k| \geq \alpha\right) \leq \frac{V(S_n)}{\alpha^2}$$

Théorème 45 (Kolmogorov) Soit $(X_n)_n$ iid d'espérance nulle telle que $\sum V(X_n)$ converge. Alors la série $\sum X_n$ converge p.s

But 46 Soit $(\varepsilon_n)_n$ des va iid à valeurs dans $\{\pm 1\}$ on s'intéresse à la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n^\alpha}$ selon la loi de ε_1.

(1)

Proposition 47. Si $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) \neq \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1)$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge presque sûrement.

Proposition 48 Si $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) \left(= \frac{1}{2}\right)$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge presque sûrement.

IV Théorèmes limites

(1)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des va indépendantes de même espérance m et de même variance. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Proposition 50 (Loi faible des grands nombres) $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} m$

Proposition 51 (Loi forte des grands nombres) On suppose de plus les $(X_n)_n$ iid, alors $S_n \xrightarrow{p.s} m$.

(3)

Application 52 Soit $f \in C^0([0,1])$ et $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$

alors en notant ω le module de continuité de f on a

$\|B_n f - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. De plus $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ vérifie

$\|B_n f - f\|_\infty \geq c\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ /DVP

Application 53 Toute fonction $f \in C^0([0,1])$ est limite uniforme de polynômes :

(1)

Théorème 54 Soit $(X_n)_n$ une suite de va iid de loi X. On note la fonction de répartition empirique $F_n(x, \omega) = \frac{1}{n} \left| \{ k \in [\![1, n]\!] / X_k(\omega) \leq x \} \right|$ alors (Théorème de Glivenko-Cantelli):

$$\mathbb{P}\left(\|F_n - F\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right) = 1$$

Proposition 55 (Kolmogorov) $\mathbb{P}\left(\|F_n - F\|_\infty \geq \frac{r}{\sqrt{n}} \right) \longrightarrow \alpha(r)$

$\alpha(r) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 r^2} = 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{r} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{8 r^2}}$

Théorème 56 (Moivre Laplace) Soit X_n iid $X_n \sim \mathcal{B}(p)$

(1)

alors pour $x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Théorème 57 (Théorème limite central)

Application 58 Intervalle de confiance asymptotique, $e^{-n} \sum \frac{n^k}{n!} \sim \frac{1}{2}$

V Deux exemples importants

A. Processus de Galton-Watson

Soit X vad à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. Soit $(X_i^n)_{i \geq 1, n \geq 0}$ iid de loi X et $Z_0 = 0$ $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n$.

Proposition 59 (Identité de Wald) $G_{Z_{n+1}} = G(G_{Z_n}(t))$.

Proposition 60 Soit $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ (probabilité d'extinction), alors x_n vérifie $x_{n+1} = G(x_n)$. x_n converge vers la plus petite solution de $x = G(x)$ que l'on note α.

Si $G'(1) < 1$ alors $\alpha = 1$: extinction certaine

Si $G'(1) > 1$ alors $\alpha \in]0,1[$ extinction non certaine

Si $G'(1) = 1$ extinction certaine si $p_1 < 1$.

(2)

B. Cas discret

Cadre G1 Soit $(X_n)_n$ iid à valeurs dans $\{\pm 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Soit $p = \mathbb{P}(X_n = 1)$ $q = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$.

Proposition 62 Si $p \neq q$ alors $|S_n| \xrightarrow{p.s} +\infty$

Proposition 63 Si $p = q = \frac{1}{2}$ $\mathbb{E}(|S_n|) \sim \sqrt{\frac{4n}{\pi}}$

Proposition 64 On pose $a_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ (la marche revient en 0) et $b_n = \mathbb{P}(S_0 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0)$ (le premier retour est à l'instant n). Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqt^2}} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = 1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}$$

Théorème 65 (Polya) On considère maintenant X_n à valeurs dans $\{\pm 1\}^d$ et de loi uniforme; alors :

Si $d = 1$ ou 2 $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$ et

Si $d \geq 3$ $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 0$ et de plus

$|S_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} +\infty$ /DVP

2.33 Leçon 265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Le rapport du Jury 2021 donne plein d'exemples possibles si on veut être original.

Références utilisées :
— (1) *Analyse complexe* E.Amar E.Mathéron
— (2) *Analyse* X.Gourdon
— (3) *Oraux X-ENS Analyse 2* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (4) *Oraux X-ENS Algèbre 1* S.Francinou H.Gianella S.Nicolas
— (5) *Calcul Intégral* B.Candelpergher

I Fonctions usuelles

A. Fonctions exponentielles et trigonométrique

Définition 1: On définit la fonction exponentielle $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Proposition 2: exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et vérifie $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ $(x,y) \in \mathbb{C}^2$. En particulier exp ne s'annule pas

Définition 3: On note $e = \exp(1)$ et pour $z \in \mathbb{C}$ on note $\exp(z) = e^z$

Proposition 4: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes son noyau est un sous groupe de $i\mathbb{R}$ donc de la forme $ia\mathbb{Z}$. On note alors $\frac{a}{2} = \pi$.

Définition 5: Soit $x \in \mathbb{R}$ on définit les fonctions cos et sin par $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$

On a alors $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

Proposition 6: Pour $x \in \mathbb{R}$ $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Proposition 7: cos et sin sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ $\cos' = -\sin$ $\sin' = \cos$

Proposition 8: cos et sin sont 2π périodiques on a la relation pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$

Proposition 9: On prolonge cos et sin en des fonctions entières grâce à la proposition 6:

Proposition 10: Grace à la définition de cos et sin on peut en déduire des relations trigonométriques comme par exemple $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

B. La fonction logarithme.

Définition 11: On note ln la bijection réciproque de $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$.

Proposition 12: ln est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$. $\ln(1) = 0$ et pour $x > 0$ $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. $\forall x \in]0,1[$ $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Proposition 13: ln est l'unique fonction continue $f: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Définition 14: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^*$, une détermination du logarithme est une fonction $f: \Omega \to \mathbb{C}$ qui vérifie $\forall z \in \mathbb{C}$ $e^{f(z)} = z$

Proposition 15: Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Définition 16: On note $\mathrm{Arg}: \mathbb{C}^* \to]-\pi, \pi]$ la fonction qui à $z \in \mathbb{C}^*$ renvoie son unique argument dans $]-\pi, \pi]$

Définition 17: On appelle détermination principale du logarithme du Logarithme sur $\mathbb{C}^*$ la fonction Log définie par $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$

Proposition 18: Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

Remarque 19: On peut définir d'autres déterminations du logarithme qui seront holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{te^{it} / t > 0\}$ à choisir.

II Fonctions eulériennes

A. Fonction Γ d'Euler

(1,2)

Définition 20 : On définit pour $z \in \mathbb{C}$ $Re(z)>0$ la fonction Γ d'Euler par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

Proposition 21 : - Γ est holomorphe sur $\{z / Re(z)>0\}$
- $\forall z$, $Re(z)>0$ $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- $\Gamma(n+1) = n!_0$
- $\Gamma(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}$

Proposition 22 : La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles en $-k$ $k \in \mathbb{N}$ et $Res(\Gamma, -k) = \frac{(-1)^k}{k!_0}$. On note encore Γ ce prolongement.

Proposition 23 : $\forall z \in \mathbb{C}$ $Re(z)>0$ $\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!_0\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$

Application 24 : (Formule de Weirstrass). $\forall z \in \mathbb{C}$ $Re(z)>0$
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \left(\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right) z e^{\gamma z}$$

Proposition 25. (Formule de duplication). $\forall z \in \mathbb{C}$ $Re(z)>0$
$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$$

Application 26 : $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Théorème 27 : $\frac{1}{\Gamma}$ se prolonge en une fonction entière.

Proposition 28 : (Formule des compléments).
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Application 29 : (Intégrale de Raabe).
Pour $x>0$ $\int_x^{x+1} \log(\Gamma(t))\, dt = x(\log(x)-1) + \frac{1}{2}\log(2\pi)$

Application 29. $\forall x \in]-\pi, \pi[$ $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$

Application 30 : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Proposition 31 : $\forall x>0$ $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$

Application 32 : $\int_0^{+\infty} \log(t) e^{-t} dt = -\gamma$.

Théorème 33 : (Bohr-Mollerup). Γ est l'unique fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant : $f(1)=1$, $f(x+1) = xf(x)$ $\log \circ f$ convexe.

B. Fonction B d'Euler

Définition 33 : On définit pour $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ $Re(x)>0$ $Re(y)>0$
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

Proposition 34 : $B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta) d\theta$

$B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$

Proposition 35 : $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Application 36 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt = \cdots$

Application 37 : $\int_0^{+\infty} \tan(x)^\alpha dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}$ $\alpha \in [0,1[$

Application 38 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!_0^2}{(2n)!_0} = \frac{\pi^2}{18}$

Proposition 39 : Marche aléatoire sur $[0,1]$

III Fonctions ζ de Riemann Θ de Jacobi et Théorie des nombres

A. Fonction ζ de Riemann

(2,3)

Définition 40: On définit pour $Re(s)>1$ la fonction zéta de Riemann par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

Proposition 41: ζ est holomorphe sur $\{Re(s)>1\}$

- $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$

Proposition 42: Pour $k \in \mathbb{N}^*$ $\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} b_{2k} \pi^{2k}}{2(2k)!}$ où $(b_k)_k$ est la suite des nombres de Bernoulli.

Proposition 43: Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. On a la formule valable pour $Re(s)>1$.

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-p_n^{-s}}$$

Application 44: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge

(4)

Proposition 45: On note μ la fonction de Möbius alors pour $Re(s)>1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$

Application 46: Si l'on tire uniformément deux entiers dans $\mathbb{N}^*$, la probabilité qu'ils soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$.

(2)

Théorème 47 (Admis) (Théorème des nombres premiers) Soit $\pi(x)$ le nombre de nombre premier $\leq x$ alors

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$$

Théorème 48 (Admis) Le théorème des nombres premier est équivalent à $\sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$

B. Fonction Θ de Jacobi

(5)

Définition 49: On définit la fonction Θ de Jacobi par $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x}$. On note aussi

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{2}(\Theta(x)-1)$$

(2)

Proposition 50: (Formule sommatoire de Poisson). Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ $|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\alpha}$ $\alpha>1$ $C>0$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$

Application 51: $\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right)$

(5)

Théorème 52: La fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et pour $s \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_1^{+\infty} \Phi(x)\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{dx}{x}$$

/02

Proposition 53: $s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)$$

Conjecture 54: les zéros non triviaux de la fonction ζ ont pour partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

2.34 Leçon 266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

Références utilisées :

— (1) *Probabilités pour les non probabilistes* W.Appel
— (2) *Oraux X-ENS Mathématiques Volume* 6 S.Francinou, H.Gianella S.Nicolas
— (3) *Analyse pour l'Agrégation* C.Zuily H.Queffélec

Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

266

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

I Notion d'indépendance

A. Définition

(1)

Définition 1 : Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ on note $A \perp\!\!\!\perp B$.

Remarque 2 : Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Proposition 2 : $A \perp\!\!\!\perp A \iff \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$

Définition 3 : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements on dit que :

$(A_i)_{i \in I}$ mutuellement idpts si : $\forall J \subset I$ fini $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$

Deux à deux idpts si : $\forall i \neq j$ $A_i \perp\!\!\!\perp A_j$

Proposition 4 : mutuellement idpts $\Rightarrow$ 2 à 2 idpts

Remarque 5 : Réciproque fausse

Proposition 6 : Si $(A_i)_{i \in I}$ mut idpts alors $(B_i)_{i \in I}$ aussi avec $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$

Définition 7 : Deux tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes si pour $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{G}$ $A \perp\!\!\!\perp B$. On définit de même l'indépendance de tribus.

Définition 8 : Deux va X et Y sont dites indépendantes si $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \sigma(Y)$ où $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ tribu engendrée par X.

On a alors $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$ pour tout boréliens A et B.

Théorème 9 : (Coalitions). Soit $(X_i)_{i \in I}$ des va mut idpts Soit $(J_k)_k \in \mathcal{P}(I)^{(k)}$ disjoints 2 à 2. Soit $g_k : \mathbb{R}^{J_k} \to \mathbb{R}$ mesurable alors

$\left(g_k((X_j)_{j \in J_k})\right)_k$ sont des va mut idpts

Soit $A_1, \dots, A_n$ des tribus indépendantes alors $\sigma(A_1, \dots, A_m)$ et $\sigma(A_{m+1}, \dots, A_n)$ sont des tribus indépendantes.

Soit C_k des π systèmes indépendants, alors $(\sigma(C_k))_k$ sont des tribus indépendantes.

Proposition 10 : Soit X, Y deux va, alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$

Proposition 11 : Soit X, Y deux va avec $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Proposition 12 : $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathrm{cov}(X, Y) = 0$ réciproque fausse.

B. Cas des variables discrètes.

(1)

Proposition 13 : Soit X, Y deux vad à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell)$

Proposition 14 : Soit X, Y deux va à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes alors $\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = n - i)$

Application 15 : Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$

Application 16 : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Proposition 17 : $\forall n \geq 1$ $\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ où le produit sur les nombres premiers divisent n.

Proposition 18 : Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers alors pour $s > 1$ $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}$

Application 19 : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge

Proposition 20 : Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ $G_{X+Y} = G_X G_Y$ où $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$

(2)

Application 21 : On ne peut pas truquer deux dés pour que la somme suive une loi uniforme sur $[\![1; 6]\!]$.

C. Cas des variables à densités.

Soit X de densité f_X Y de densité f_Y.

(1) Proposition 22 : $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Application 23 : Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\frac{X}{Y} \sim$ Cauchy

(1) Application 24 : (Méthode de Box Muller) Soit $U \sim \mathcal{U}_{(0,1]}$ (1)
$V \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ $U \perp\!\!\!\perp V$ soit $X = R\cos\Theta$ $Y = R\sin\Theta$ où
$R = \sqrt{-2\ln(U)}$ $\Theta = 2\pi V$. Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X \sim Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

Proposition 25 : Soit $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et $X = \max X_i$
alors $F_X = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}$

Application 26 : Si $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $X \sim \mathcal{E}(n\lambda)$

(1) Proposition 27 : Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ où $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$

Application 28 : Truc de TCB + Somme de loi normale

II Théorèmes limites

A. Loi des grands nombres

(1) Proposition 29 : (Loi faible des grands nombre) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ L^2, indépendantes et de même espérance m / variance σ^2.
Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$$

(3) Application 30 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et
$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ alors en notant ω le module de continuité de f on a :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Application 31 (Weierstrass)^2 L'ensemble des fonctions polynomiales sont denses dans $C^0([0,1])$.

(1) Proposition 32 : (Loi forte des grands nombres) Soit $(X_n)_n$ iid de même loi $X \in L^1$. Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s} \mathbb{E}(X_1)$

Application 33 Théorème de Glivenko - Cantelli

Application 34 Test de Kolmogorov - Smirnov

Application 35 Méthode de Monte - Carlo pour approximer des intégrales.

B. Théorème central limite

(1) Théorème 36. (Central limite) Soit (X_n) iid L^2 de variance $\sigma^2 > 0$. Soit $m = \mathbb{E}(X_1)$. Alors

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Proposition 37. Le TCL donne $F_{X_n} \xrightarrow{CVS} F_X$, le 2ème lemme de Dini permet de montrer $F_{X_n} \xrightarrow{CVU} F_X$.

Application 38 $e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

Application 39 : (Stirling) $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

Application 40 : Construction d'intervalles de confiance

Proposition 41 TCL multid

C. Borel Cantelli et 0-1 de Kolmogorov

(1) Proposition 42 (Lemme de Borell - Cantelli). Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements indépendants alors :

- si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$
- si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$

Application 43 Soit $(X_n)_n$ des va indépendants alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$ $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge

Application 44 : Il existe pas de mesure de proba sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

(1)

Définition 45: Soit $(X_n)_n$ une suite de va indépendantes. On note $A_n = \sigma\left(\bigcup_{k=0}^{n} \sigma(X_k)\right)$ et $C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$ (Tribu asymptotique)

$B_n = \sigma\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \sigma(X_k)\right)$

Proposition 46: (Loi du 0-1 de Kolmogorov). Soit $A \in C$ alors $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$

III Le cas des séries aléatoires

(2)

Proposition 47 (Inégalité de Kolmogorov)
Soit $X_1, \dots, X_n$ des va indépendantes d'espérance nulle et admettant une variance. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors pour $\alpha > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{k=1}^{n} |S_k| \geq \alpha\right) \leq \frac{V(S_n)}{\alpha^2}$$

Théorème 48 (Kolmogorov) Soit $(X_n)_n$ iid d'espérance nulle telle que $\sum_{n\geq 0} V(X_n)$ converge. Alors la série $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge presque sûrement.

But 49 Soit $(\varepsilon_n)_n$ des va iid à valeurs dans $\{\pm 1\}$ on s'intéresse à la convergence de $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ selon la loi de ε_1.

Proposition 50. Si $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) \neq \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1)$ alors $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ diverge presque sûrement.

Proposition 51 Si $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) \left(= \frac{1}{2}\right)$ alors $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge presque sûrement.

Proposition 52: Il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon 1 admettant un prolongement analytique en aucun point du cercle unité. (ADMIS)

IV Marche aléatoire

A. Cas continu.

Définition 58 On définit la fonction B par $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ où $x, y > 0$

Proposition 59: $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ où $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$

Proposition 60: (Marche aléatoire sur $[0,1]$). Soit $p \in]0,1[$ et $(\varepsilon_n)_n$ iid $\sim \mathcal{B}(p)$ $(U_n)_n$ iid $\sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ et indépendantes des ε_i. Soit $x \in [0,1]$ et $(X_n)_n$ définie par:

$$\begin{cases} X_0 = x \\ X_{n+1} = U_n X_n + \varepsilon_n (1 - U_n) \end{cases}$$

Alors X_n converge en loi vers une loi Beta de paramètre $(p, 1-p)$

/DVP

B. Cas discret

Cadre 61 Soit $(X_n)_n$ iid à valeur dans $\{\pm 1\}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
Soit $p = \mathbb{P}(X_n = 1)$ $q = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p$.

Proposition 62 Si $p \neq q$ alors $|S_n| \xrightarrow{p.s} +\infty$

Proposition 63 Si $p = q = \frac{1}{2}$ $\mathbb{E}(|S_n|) \sim \sqrt{\frac{4n}{\pi}}$

Proposition 64 On pose $a_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ (la marche revient en 0) et $b_n = \mathbb{P}(S_0 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0)$ (le premier retour est à l'instant n). Alors

$$\forall t \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqt^2}} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = 1 - \sqrt{1-4pqt^2}$$

Théorème 65 (Pólya) On considère maintenant X_n à valeur dans $\{\pm e_i\}^d$ et de loi uniforme; alors:
Si $d = 1$ ou 2 $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$ et
Si $d \geq 3$ $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 0$ et de plus $|S_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} +\infty$

/DVP

V Galton - Watson

cf 264