Groupes linéaires

J. Le Borgne

Soit $\mathbf{K}$ un corps et soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $n = \dim E$.

1 Groupe linéaire et groupe spécial linéaire

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. *Le groupe $GL(E)$ est le groupe des automorphismes $\mathbf{K}$-linéaires de E. C'est aussi le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E.*
Le groupe $SL(E)$ est l'ensemble des éléments de $GL(E)$ de déterminant 1.

Définition 2. *Le groupe $GL_n(\mathbf{K})$ est le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le groupe $SL_n(\mathbf{K})$ est l'ensemble des éléments de $GL_n(\mathbf{K})$ de déterminant 1.*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'application d'écriture dans la base $\mathcal{B}$, donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_n(K) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneaux, et induit des isomorphismes de groupes $GL(E) \to GL_n(\mathbf{K})$ et $SL(E) \to SL_n(\mathbf{K})$.

Lemme 1. *Le centre de $GL(E)$ est le sous-groupe des homothéties.*
Le centre de $SL(E)$ est $SL(E) \cap Z(GL(E)) \simeq \mu_n$.

Démonstration. Soit $u \in Z(GL(E))$ Comme $GL(E)$ engendre $\mathcal{L}(E)$, u commute avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$ non nul, et soit H un hyperplan supplémentaire de la droite engendrée par x. Notons v le projecteur sur cette droite parallèlement à H. Alors, comme $uv = vu$, on a $u(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Donc x est vecteur propre de u. Ainsi u est diagonalisable, et comme tout élément de E est dans un sous-espace propre, il y a nécessairement un seul sous-espace propre : u est une homothétie.
Le même raisonnement montre que le centre de $SL(E)$ est $SL(E) \cap Z(GL(E))$. L'homothétie de rapport λ est dans $SL(E)$ si et seulement si $\lambda^n = 1$, *i.e.* $\lambda \in \mu_n$. □

Lemme 2. *On dispose des la suites exactes :*

$$1 \to SL(E) \to GL(E) \to \mathbf{K}^\times \to 1.$$

$$1 \to SL_n(\mathbf{K}) \to GL_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}^\times \to 1.$$

En particulier, $SL(E)$ et $SL_n(\mathbf{K})$ sont des sous-groupes distingués respectivement de $GL(E)$ et $GL_n(\mathbf{K})$.

On considère une décomposition $E = D \oplus H$ avec D une droite et H un hyperplan. Soient π_D, π_H les projections sur D et H relatives à cette décomposition. Pour $\alpha \in \mathbf{K}^\times$, on pose $d_\alpha = \alpha\pi_D + \pi_H \in GL(E)$. Alors l'application $d : \alpha \mapsto d_\alpha$ est un morphisme de groupes, et $\det \circ d = id_{K^\times}$.

Proposition 1. *L'action $K^\times \to Aut(SL(E))$ définie par $\alpha \cdot v = d_\alpha v d_\alpha^{-1}$ munit $SL(E) \times K^\times$ d'une structure de produit semi-direct, et le morphisme canonique $SL(E) \rtimes K^\times \to GL(E)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Cela résulte de la théorie générale des produits semi-directs et du fait que d est une section de $\det$. Dans ce cas précis, on vérifie sans peine que, pour (v, α) et $(w, \beta) \in SL(E) \rtimes K^\times$, on a $v d_\alpha w d_\beta = v(\alpha \cdot w) d_{\alpha\beta}$. □

Remarque 1. *Un raisonnement analogue montre que $GL_n(\mathbf{K}) \simeq SL_n(\mathbf{K}) \rtimes \mathbf{K}^\times$.*

1.2 Familles génératrices

1.2.1 Transvections et dilatations

Définition 3.
— *On dit que u est une* transvection *si $u - id_E$ est de rang 1 et nilpotente.*
— *On dit que u est une* dilatation *si $u - id_E$ est de rang 1 et non nilpotente.*

Remarque 2. *Certains auteurs conviennent que l'identité est à la fois une transvection et une dilatation.*

Définition 4. *On note $(E_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*
— *On dit que M est une matrice de transvection si M est de la forme $I_n + \lambda E_{ij}$ avec $\lambda \in \mathbf{K}$ et $i \neq j$.*
— *On dit que M est une matrice de dilatation de rapport $\alpha \in K^\times$ s'il existe $1 \le i \le n$ tel que $M = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$.*

Lemme 3. *L'ensemble des transvections est inclus dans $SL(E)$ et l'ensemble des dilatations est inclus dans $GL(E)$.*
L'ensemble des matrices de transvection est inclus dans $SL_n(\mathbf{K})$ et l'ensemble des matrices de dilatation est inclus dans $GL_n(\mathbf{K})$.

Proposition 2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est une transvection ;

(ii) il existe une forme linéaire $\phi \in E^* \setminus \{0\}$ et $z \in E \setminus \{0\}$ tels que $u(z) = z$ et $u = id + \phi z$;

(iii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit une matrice de transvection.

Démonstration. On procède par implications circulaires.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Comme $u - id$ est de rang 1, on dispose de $z \in E \setminus \{0\}$ et de $\phi \in E^* \setminus \{0\}$ tels que $u - id = \phi z$. Une récurrence immédiate montre que pour tout $k \ge 1$, $(u - id)^k(z) = \phi(z)^k z$. Comme $u - id$ est nilpotent, $\phi(z) = 0$ donc $u(z) = z$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Soit $H = \ker \phi$. Par hypothèse, $u(z) = z = z + \phi(z)z$ donc $z \in H$. Posons $e_1 = z$. On peut compléter $\{e_1\}$ en une base $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de H. On dispose de $e_n \in E$, tel que $\phi(e_n) = 1$. Vérifions que la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ est libre : supposons que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$, alors $\lambda_n \phi(e_n) = 0$ donc $\lambda_n = 0$. Par suite, $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i = 0$, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. Ainsi, cette famille est une base de E ; la matrice de u dans cette base est manifestement $I_n + E_{1n}$ qui est une matrice de transvection.

$(iii) \Rightarrow (i)$**.** Si M est une matrice de transvection, alors $M - Id$ est nilpotente de rang 1. Ainsi, si la matrice de u dans une base donnée est une matrice de transvection, alors $u - id$ est une transvection. □

Remarque 3. *Attention, la matrice d'une transvection n'est pas nécessairement une matrice de transvection (mais, d'après la proposition précédente, elle est semblable à une matrice de transvection).*

Proposition 3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est une dilatation ;

(ii) il existe une forme linéaire $\phi \in E^* \setminus \{0\}$ et $z \in E \setminus \{0\}$ tels que $u(z) \neq z$ et $u = id + \phi z$;

(iii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit une matrice de dilatation.

Théorème 1. *Soit $M \in SL_n(\mathbf{K})$, alors M est produit de matrices de transvection.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le résultat est évident. Supposons-le vrai pour $n \geq 1$ et montrons-le pour $n + 1$.

Comme M est inversible, la première colonne est non nulle. Quitte à faire une opération de la forme $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$, on peut supposer que le coefficient en haut à gauche de M est non nul. Par opérations élémentaires sur les lignes, on peut alors annuler toute la première colonne (sauf son premier coefficient). Par opérations élémentaires sur les colonnes, on peut faire de même à la première ligne. L'hypothèse de récurrence conclut (avec le fait que les opérations élémentaires se réalisent par multiplication par une matrice de transvection). □

Corollaire 1. *Le groupe $SL_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices de transvection et le groupe $GL_n(\mathbf{K})$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation.*

Remarque 4. *Les matrices de dilatation seules engendrent le groupe des matrices diagonales inversibles, isomorphe à $(K^\times)^n$.*

Corollaire 2. *Le groupe $SL(E)$ est engendré par les transvections et le groupe $GL(E)$ est engendré par les transvections et dilatations.*

Remarque 5. *On peut montrer directement que les transvections engendrent $SL(E)$. Dans ce cas, on a un résultat plus précis : tout élément de $SL(E)$ qui n'est pas une homothétie est produit d'au plus $\dim E$ transvections (et $\dim E + 1$ pour une homothétie). Cela se montre par récurrence sur la dimension de $\ker(u - id)$, le cas exceptionnel étant celui des applications linéaires annulées par $(X - 1)(X - \lambda)$ avec $\lambda \neq 1$.*

Proposition 4. *Le groupe $GL(E)$ est engendré par les dilatations.*

1.2.2 Groupe dérivé

Rappelons que le groupe dérivé d'un groupe G est le groupe engendré par les commutateurs $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$. Dans le cas des groupes linéaires, on a évidemment $D(GL(E)) \subset SL(E)$. Lorsque $\dim E = 1$, on a $GL(E) \simeq K^\times$ et $SL(E) = \{1\} = D(GL(E))$.

Proposition 5. *On suppose que $n \neq 3$ ou $|\mathbf{K}| > 2$. On a $D(GL(E)) = D(SL(E)) = SL(E)$.*

Démonstration. Le cas $n = 1$ est trivial, on peut donc supposer $n \geq 2$. Soit $v \in GL(E)$ une transvection. D'après la proposition 2, on dispose de $\phi \in E^*, z \in E$ non nuls tels que $h = id_E + \phi z$. Si $n \geq 3$, alors il existe z', ϕ' non nuls tels que $\phi'(z') = 1$, $\phi'(z) = \phi(z') = 0$ (en dimension 2, les deux dernières conditions impliquent $z' = z$ et $\phi' = \phi$, ce qui contredit la première). Posons $w = id + \phi' z$ et $w' = id + \phi z'$, alors w et w' sont des transvections, $w^{-1} = id - \phi' z$ et $w'^{-1} = id - \phi z$. Ainsi, $[w, w'] = id + \phi z = v$. En particulier, $v \in D(SL(E)) \subset D(GL(E))$, donc $D(GL(E)) = D(SL(E)) = SL(E)$.
Il reste à traiter le cas $n = 2$, $\mathbf{K} \neq \mathbf{F}_2$, pour lequel on obtient le résultat en calculant explicitement le commutateur de $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et en ajustant les valeurs de λ et α. □

Remarque 6. *L'abélianisé $GL(E)/D(GL(E))$ est $K^\times$.*

2 Actions de groupes linéaires

2.1 Action naturelle

2.1.1 Action sur E

Par essence, $GL(E)$ agit naturellement sur E par transformations linéaires. Ainsi, pour toute partie $X \subset E$, le stabilisateur St_X est un sous-groupe de $GL(E)$. Soit $X = E \setminus \{0\}$, alors l'action de $GL(E)$ sur X est transitive. Le stabilisateur d'un élément donné $x \in X$ est E isomorphe au groupe des matrices triangualaires par blocs avec un bloc de taille 1 avec le coefficient 1, et un bloc de taille $\dim E - 1$.

2.1.2 Action sur les sous-espaces vectoriels

• **Action sur les droites : le groupe $PSL(E)$.**

Théorème 2. *On suppose que $n \geq 3$ ou $|K| \notin \{2, 3\}$. Alors le groupe $PSL(E)$ est simple.*

Démonstration. Soit $D \subset E$ une droite, et soit $S \subset SL(E)$ le stabilisateur de D. La propriété universelle du quotient E/D permet de définir un morphisme de groupes $\varphi_D : S \to GL(E/D)$. Notons $\Gamma_D = \ker \varphi_D$. Soit $g \in S$, et soit g_D l'endomorphisme induit par g sur D. Alors $\det g = \det g_D \det \varphi(g)$. En particulier, pour tout $g \in \Gamma_D$, $g_D = id_D$. Cela permet de montrer que le sous-groupe distingué $\Gamma_D \triangleleft S$ est abélien. En effet, soit $A_D = \{f \in \mathcal{L}(E, D) \text{ t.q. } f(D) = 0\}$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, D)$. Il suffit de vérifier que l'application $\left| \begin{array}{ccc} \Gamma_D & \to & A_D \\ g & \mapsto & g - id_E \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes d'inverse $u \mapsto id_E + u$. On vérifie immédiatement que si $g \in \Gamma_D$, alors $g - id_E$ est à valeurs dans D et que $(g - id_E)(D) = 0$. Réciproquement, si $u \in A_D$, alors $g = id_E + u$ stabilise D et induit l'identité sur D et E/D, donc $g \in \Gamma_D$. Enfin, il est clair que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre.
On dispose donc de $\Gamma_D \triangleleft S$ abélien. Remarquons que si $g \in SL(E)$, et si $\gamma \in \Gamma_D$, alors $g\gamma g^{-1} \in \Gamma_{gD}$. Ainsi, les sous-groupes de la forme Γ_D (où D est une droite de E) sont conjugués dans $SL(E)$. Or, une transvection de la forme $x \mapsto x + \phi z$ est un élément de Γ_D avec $D = \mathrm{Vect}(z)$. En particulier, puisque les transvections engendrent $SL(E)$, la famille de sous-groupes Γ_D engendre $SL(E)$.
Soit maintenant $N \triangleleft SL(E)$ un sous-groupe distingué. On suppose que N n'est pas contenu dans le centre de $SL(E)$. Alors on dispose d'une droite $D \subset E$ et de $h \in N$ tels que $D \neq h(D)$. Fixons

$\Delta_1, \Delta_2 \subset E$ deux droites distinctes. Comme l'action de $SL(E)$ sur les droites est doublement transitive, on dispose de $g \in SL(E)$ tel que $g(D) = \Delta_1$ et $gh(D) = \Delta_2$. Ainsi, $ghg^{-1}(\Delta_1) = \Delta_2$, de sorte que N agit transitivement sur l'ensemble des droites de E. Soit $N\Gamma_D = \{ng, n \in N, g \in \Gamma_D\}$. On vérifie que $N\Gamma_D$ est un sous-groupe de $SL(E)$ et que pour tout $n \in N$ et $g \in \Gamma_D$, $ngn^{-1} = [n, g]g \in N\Gamma_D$. Ainsi, $N\Gamma_D$ contient tous les conjugués de Γ_D par N ; comme N agit transitivement sur les droites, $N\Gamma_D$ contient tous les Γ_Δ pour $\Delta \subset E$ droite. Ainsi, $N\Gamma_D = SL(E)$.
Il reste à remarquer que pour $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ et $g_1, g_2 \in \Gamma_D$, on a :

$$[n_1 g_1, n_2 g_2] = n_1(g_1 n_2 g_1^{-1})(g_2 n_1^{-1} g_2^{-1}) n_2^{-1} \in N,$$

ce qui montre que $SL(E) = D(SL(E)) \subset D(N\Gamma_D) \subset N$, d'où $N = D(SL(E))$. □

Proposition 6. *Les sous-groupes distingués de $GL(E)$ sont en bijection avec les sous-groupes de $K^\times$ (*via *le morphisme canonique $K^\times \to GLE$).*

Démonstration. Soit $N \triangleleft GL(E)$ un sous-groupe distingué. Notons $Z = Z(GL(E))$ le centre de $GL(E)$, c'est-à-dire le sous-groupe des homothéties d'après le lemme 1. On a $SL(E)/(SL(E) \cap Z) = PSL(E)$ qui est un groupe simple. Si $N \not\subset Z$, alors le sous-groupe Γ engendré par les commutateurs $ngn^{-1}g^{-1}$ avec $n \in N$ et $g \in GL(E)$ est un sous-groupe distingué de $SL(E)$ car N est un sous-groupe distingué, non trivial car $N \not\subset Z$, donc $\Gamma \in \{\{\pm id_E\}, SL(E)\}$. □

Action sur les sous-espaces de dimension k Le groupe $GL(E)$ agit sur l'ensemble $\mathcal{G}_k(E)$ des sous-espaces de dimension k de E. L'action est transitive par le théorème de la base incomplète. Le stabilisateur d'un élément est isomorphe au groupe des matrices triangulaires par blocs (2 blocs de tailles $\dim F$ et codim F). Cela permet notamment de dénombrer $\mathcal{G}_k(\mathbf{F}_q)$ par la formule orbite-stabilisateur.
Le groupe $GL(E)$ agit aussi sur les puissances extérieures $\bigwedge^k E$, et le stabilisateur d'un élément de $\bigwedge^k E$ est isomorphe à l'ensemble des matrices triangulaires par blocs, le bloc supérieur étant dans SL_k et le bloc inférieur dans GL_{n-k}.

2.1.3 Action sur les drapeaux

Action sur les filtrations

Définition 5. *Une filtration est une suite de sous-espaces $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r = E$.*

Le groupe $GL(E)$ agit sur les filtrations en préservant les dimensions des quotients. L'action sur l'ensemble des filtrations ayant même suite de dimensions des quotients est transitive, et le stabilisateur d'un élément est isomorphe au groupe des matrices triangulaires supérieures par blocs ayant ces tailles.

En particulier, une filtration est un *drapeau* si les dimensions des quotients successifs sont toutes égales à 1. Dans ce cas, le stabilisateur est le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Remarque 7. *En prenant les filtrations décroissantes plutôt que croissantes, on obtient les matrices triangulaires inférieures (par blocs).*

2.2 Action par conjugaison

L'action par conjugaison $M \mapsto PMP^{-1}$ de $GL(E)$ sur $\mathcal{L}(E)$ a pour orbites les classes de similitude d'endomorphismes de E. Ces classes sont les mêmes que les classes de l'action de $SL(E)$.

Les classes de conjugaison peuvent être décrites par leurs invariants de similitude (ou leur décomposition de Jordan, quand le corps de base est algébriquement clos). En particulier, l'ensemble des orbites est en bijection avec l'ensemble des suites de polynômes unitaires $(P_1, \dots, P_r)$ telles que $\sum_i \deg P_i = \dim E$ et telles que $P_1|P_2|\dots|P_r$. Une autre façon de le dire : si on se donne $(d_1, \dots, d_r)$ une suite d'entiers tels que $n = \sum_j (r+1-j)d_j$, et $Q_i \in K[X]$ est unitaire de degré d_i, alors la famille $(Q_1, Q_1Q_2, \dots, Q_1 \cdots Q_r)$ indexe une orbite de cette action. Pour une telle famile d'entiers $D = (d_1, \dots, d_r)$, il y a un espace de dimension $s_D = \sum_j d_j$ de polynômes possibles. L'ensemble des orbites est en bijection avec $\prod_D K^{s_D}$. En conclusion l'ensemble des orbites est en bijection avec un espace vectoriel dont la dimension est la somme des max des entiers apparaissant dans p pour p partition de n (c'est aussi la somme pour p partition de n du nombre de parties de p, par dualité). La suite donnant cette dimension est A006128 dans OEIS (0,1,3,6,12,20,35,...).

Le stabilisateur d'un élément est son commutant (plus précisément, l'intersection de son commutant avec $GL(E)$).

2.3 Action par congruence

Définition 6. *L'application $M \mapsto PMP^t$ définit une action de $GL_n(K)$ sur $\mathcal{M}_n(K)$, dite action par congruence.*

L'étude de l'action par congruence en général est compliquée. On se contente en général d'étudier sa restriction à l'ensemble S_n des matrices symétriques.

Définition 7. *Soit q une forme quadratique sur E, de forme polaire b. La matrice de q dans une base (e_i) de E est la matrice (symétrique) de coefficient générique $b(e_i, e_j)$. Deux formes quadratiques q, q' sont dites équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ tel que $q \circ u = q'$ (ou de manière équivalente, si leurs matrices sont congruentes).*

L'étude des classes de congruence se ramène alors à la classification des formes quadratiques, qui dépend du corps de base : sur $\mathbf{C}$, deux formes sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. Sur $\mathbf{R}$, on a le théorème de Sylvester : deux formes quadratiques non dégénérées sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature. Sur les corps finis, les formes quadratiques non dégénérés sont classifiées par leur discriminant.

Le stabilisateur d'une forme quadratique (ou d'une matrice symétrique) s'appelle le groupe orthogonal de cette forme quadratique. Le groupe orthogonal de q contient les réflexions (ici, d'axe z non isotrope) : $x \mapsto x - 2\frac{b(x,z)}{q(z)}$.

Proposition 7. *Le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée est engendré par les réflexions.*

Cas particuliers remarquables : $O(s,t)$ pour le groupe orthogonal de la forme quadratique de signature (s,t) sur $\mathbf{R}$, groupe orthogonal de la forme quadratique $\sum x_i^2$ sur $\mathbf{F}_q$ (objet d'étude d'un développement classique démontrant le loi de réciprocité quadratique).

3 Propriétés topologiques

Dans cette partie, on suppose que $K = \mathbf{R}$.

3.1 Décompostion polaire

Théorème 3. *L'application $S(E)\times O(E) \to GL(E)$ définie par $(S,O) \mapsto SO$ est un homéomorphisme.*

Corollaire 3. *Le sous-groupe $O(E)$ est maximal.*

Démonstration. Si $O(E) \subset G$ avec G compact, soit $M \in G$ et $S \in S^{++}(E)$ sa partie symétrique, la suite $S^n, n \in Z$ est bornée donc ses valeurs propres sont de module 1, donc $S = I$. □

3.2 Quelques parties remarquables

3.2.1 Parties denses

3.2.2 Ouverts

3.3 Sous-groupes compacts

Soit E un $\mathbf{R}$-ev.

Lemme 4. *Soit $K \subset E$ compact convexe non vide et stable par $G \subset GL(E)$ compact, alors il existe $x \in K$ tel que pour tout $g \in G$, $g(x) = x$.*

Démonstration. L'application $g \mapsto \sup_{x\in K} \|gx\|$ est une norme, et tout élément de norme minimale est solution. □

Théorème 4. *Tout sous-groupe compact de $GL(E)$ est conjugué à un sous-groupe de $O(E)$.*

Démonstration. On fait agir H par congruence sur $S(E)$, d'où un morphisme $H \to GL(S(E))$. Son image G est compacte. Soit $K = Conv(\{{}^tMM,\ M \in G\}) \subset S(E)$. On a une action de G sur K, et il existe $x \in K$ tel que $g(x) = x$ pour tout g dans G. Comme $K \subset S^{++}(E)$, un tel x est de la forme $x =^t PP$ (Choleski, par récurrence). Donc pour tout $h \in H$, $({}^th^tP)(Ph) = ({}^tP)P$, et donc $PhP^{-1} \in O(E)$. Donc $PHP^{-1} \subset O(E)$. □