Géométrie affine

J. Le Borgne

Table des matières

1 Espaces affines **1**
1.1 Définitions 1
1.2 Sous-espaces affines 2
1.3 Repères affines 3

2 Applications affines **4**
2.1 Définitions 4
2.2 Applications affines et repères affines 5
2.3 Groupe affine 5

3 Barycentres **6**
3.1 Définitions 6
3.2 Repères et coordonnées barycentriques 7
3.3 Théorème fondamental de la géométrie affine 7

1 Espaces affines

Soit K un corps.

1.1 Définitions

Définition 1. *Un espace affine sur K est la donnée d'un couple $(\mathscr{E}, E)$ où $\mathscr{E}$ est un ensemble non vide (l'ensemble des points de l'espace affine), E est un K-espace vectoriel (la direction, ou espace vectoriel directeur, de l'espace affine), et d'une action simplement transitive de E sur $\mathscr{E}$.*

Simplement transtitive siginifie transitive et libre, c'est-à-dire que tous les stabilisateurs sont triviaux (le seul élément du groupe agissant trivialement sur un élément donné est le neutre).

Remarque 2. *Une action est dite fidèle si l'intersection de tous les stabilisateurs est triviale (le neutre est le seul élément du groupe agissant trivialement sur tous les éléments). On a évidemment libre $\Rightarrow$ fidèle.*

Remarque 3. *Pour l'action transitive d'un groupe abélien, la réciproque est vraie : les stabilisateurs des éléments étant conjugués, ils sont égaux et leur intersection est triviale si et seulement s'ils le sont tous.*

Remarque 4. *Ceci est faux si le groupe n'est pas abélien : $\mathfrak{S}_3$ agit transitivement sur $\{1,2,3\}$, le stabilisateur de $\{1\}$ est $\mathfrak{S}_{\{2,3\}}$, l'intersection des stabilisateurs est triviale, l'action est donc fidèle, mais pas libre.*

Exemple 5.
— *Un espace vectoriel E, muni de l'action naturelle par translation sur lui-même, est un espace affine.*
— *Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, l'ensemble $a + F$ est un espace affine de direction F.*
— *Les solutions d'une EDO linéaire forment un sous-espace affine.*

Définition 6. *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine. Soient $A, B \in \mathscr{E}$, alors il existe un unique $\vec{v} \in E$ tel que $\vec{v} \cdot A = B$. On note $\vec{AB}$ cet unique vecteur. On note généralement l'action avec une notation additive, ce qui donne $A + \vec{v} = B$, ou encore $A + \vec{AB} = B$.*

Lemme 7. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} \times \mathscr{E} & \to & E \\ (A, B) & \mapsto & \vec{AB} \end{array}$$

est surjective.

Démonstration. Soit $v \in E$, soit $A \in \mathscr{E}$, en posant $B = A + \vec{v}$ on a bien $\vec{AB} = v$. □

L'application n'est pas injective en général (par exemple, $\vec{AA} = \vec{BB}$ pour tous A, B) en revanche :

Lemme 8. *Soit $A_0 \in \mathscr{E}$. Alors l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \to & E \\ A & \mapsto & \vec{A_0 A} \end{array}$$

est bijective.

Démonstration. C'est une formulation équivalente du fait que l'action de E sur $\mathscr{E}$ est libre et transitive. □

En particulier, à $A_0 \in \mathscr{E}$ fixé, on peut munir $\mathscr{E}$ d'une structure de K-espace vectoriel héritée de celle de E, pour laquelle A_0 est neutre : $\lambda(A_0 + \vec{u}) + (A_0 + \vec{v}) = A_0 + \lambda\vec{u} + \vec{v}$.

Proposition 9 (Relation de Chasles)**.** *Soient $A, B, C \in \mathscr{E}$, alors $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$*

Démonstration. On a $A + \vec{AB} + \vec{BC} = B + \vec{BC} = C = A + \vec{AC}$, d'où le résultat. □

1.2 Sous-espaces affines

Définition 10. *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine. Soit $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$, non vide. On dit que $\mathscr{F}$ est* sous-espace affine *de $\mathscr{E}$ s'il existe $A_0 \in \mathscr{F}$ tel que $F = \{\vec{A_0 A},\ A \in \mathscr{F}\}$ soit un sous-espace vectoriel.*
Sous ces conditions, $(\mathscr{F}, F)$ muni de l'action de F sur $\mathcal{F}$ héritée de celle de E sur $\mathscr{E}$ est un espace affine.

Démonstration. L'action de F sur $\mathscr{F}$ est transitive. En effet, soient $A, B \in \mathscr{F}$, alors $\vec{AB} = \vec{A_0 B} - \vec{A_0 A} \in F$. Cette action est libre car l'action de E sur $\mathscr{E}$ l'est. □

Remarque 11. *On déduit de ce qui précède que si la propriété est vérifiée pour un $A_0 \in \mathscr{F}$, elle l'est pour tout $A_0 \in \mathscr{F}$, avec le même sous-espace vectoriel.*

Remarque 12. *Attention, si $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$ est un sous-espace affine, alors $\{\vec{AB}, (A, B) \in \mathscr{F}^2\}$ est un sous-espace vectoriel, mais la réciproque est fausse ! Par exemple, une demi-droite affine n'est pas un sous-espace affine.*

Proposition 13. *Tout sous-espace affine $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ est de la forme $A_0 + F$, où $A_0 \in \mathscr{F}$ et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel.*

Démonstration. Par définition, un sous-ensemble de cette forme est bien un sous-espace affine. Réciproquement, si $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine, on dispose de $A_0 \in \mathscr{F}$ tel que $A_0 + F = \mathscr{F}$, où $F = \{\vec{A_0 A},\ A \in \mathscr{F}\}$. □

Lemme 14. *Une intersection non vide de sous-espaces affines est un sous-espaces affines, dont la direction est l'intersection des sous-espaces vectoriels directeurs.*

Démonstration. Soit $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathscr{E}$. On suppose $\mathscr{F} = \cap_{i \in I} \mathscr{F}_i \neq \emptyset$. Soit $A_0 \in \mathscr{F}$. Par hypothèse, $F_i = \{\vec{A_0 A},\ A \in \mathscr{F}_i\}$ est l'espace vectoriel directeur de $\mathscr{F}_i$. Soit $F = \cap_{i \in I} F_i$, alors $F = \{\vec{A_0 A},\ A \in \mathscr{F}_i\}$ et F est un sous-espace vectoriel de E. Cela montre que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de direction F. □

Définition 15 (Sous-espace affine engendré par une partie)**.** *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, soit $\mathscr{X} \subset \mathscr{E}$ non vide. Le* sous-espace affine *engendré par $\mathscr{X}$ est l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ contenant $\mathscr{X}$. On le note $\langle \mathscr{X} \rangle$.*

Lemme 16. *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, soit $\mathscr{X} \subset \mathscr{E}$ non vide. Soit $A_0 \in \mathscr{X}$, alors l'espace directeur de $\langle \mathscr{X} \rangle$ est engendré par les $\{\overrightarrow{A_0 A}, A \in \mathscr{X}\}$.*

Démonstration. Tout sous-espace affine contenant $\mathscr{X}$ doit avoir un espace directeur qui contient les $\overrightarrow{A_0 A}$, donc le sous-espace F engendré par ceux-ci. Par ailleurs, le sous-espace affine $A_0 + F$ contient bien $\mathscr{X}$, c'est donc $\langle \mathscr{X} \rangle$. □

Définition 17. *La dimension d'un espace affine est la dimension de son espace vectoriel directeur. On parle en particulier de points affines (ce sont exactement les éléments de $\mathscr{E}$), droite affine (dimension 1), plan affine (dimension 2), hyperplan affine (codimension 1).*

Définition 18. *Deux sous-espaces affines sont dits* parallèles *s'ils ont même direction.*

Proposition 19. *Deux sous-espaces affines parallèles sont confondus ou disjoints.*

Démonstration. Supposons $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ parallèles et non disjoints. On dispose de $A_0 \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}'$. Soit F la direction commune de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$. D'après le lemme 14, $\mathscr{F} \cap \mathscr{F}' = A_0 + F = \mathscr{F}' = \mathscr{F}$. □

Proposition 20. *Dans un plan affine, deux droites affines non parallèles se rencontrent en exactement un point.*

Démonstration. Comme elles ne sont pas parallèles, leurs droites directrices sont distinctes, donc leur intersection est réduite à $\{0\}$. Ainsi, ces droites affines se rencontrent en au plus un point.
En outre, pour la même raison, la somme de leurs droites directrices engendre E. En particulier, soient $A \in \mathscr{D}, A' \in \mathscr{D}'$. Alors $\overrightarrow{AA'} \in D + D'$. Cela montre qu'il existe $u \in D$, $u' \in D'$ tels que $\overrightarrow{AA'} = u + u'$ et donc que $A' - u' = A + u$: cela montre que $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' \neq \emptyset$. □

Proposition 21. *Par un point donné du plan, il passe exactement une parallèle à une droite affine donnée.*

Démonstration. Soit D la direction de la droite et A le point, alors $A + D$ est une droite affine parallèle à la droite donnée. Elle est unique car une droite affine de direction D contenant A est nécessairement $A+D$. □

1.3 Repères affines

Définition 22. *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine. On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ est un repère affine de $\mathscr{E}$ s'il existe $i_0 \in I$ tel que $(\overrightarrow{A_{i_0} A_i}, i \in I \setminus i_0)$ soit une base de E.*

Remarque 23. *Si c'est le cas, alors c'est vrai pour tout $i_0 \in I$ par relation de Chasles.*

Définition 24. *Une famille $(A_i)_{i \in I}$ est dite affinement libre s'il existe $i_0 \in I$ tel que la famille $(\overrightarrow{A_{i_0} A_i}, i \in I \setminus i_0)$ soit libre dans E.*

Proposition 25. *Supposons $(\mathscr{E}, E)$ de dimension finie n, et soit $(A_0, \ldots, A_n)$ soit une famille d'éléments de $\mathscr{E}$. Alors cette famille est un repère affine si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

(i) la famille $(A_0, \ldots, A_n)$ est affinement libre,

(ii) le sous-espace affine engendré par $(A_0, \ldots, A_n)$ est $\mathscr{E}$.

Démonstration. Comme $(A_0, \ldots, A_n)$ est de cardinal $n+1$, c'est un repère affine si et seulement si $(\overrightarrow{A_{i_0} A_i}, i \in I \setminus i_0)$ est libre, ou génératrice. □

2 Applications affines

2.1 Définitions

Définition 26. *Soient $(\mathscr{E}, E)$, $(\mathscr{E}', E')$ des espaces affines. Une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est dite affine s'il existe $A_0 \in \mathscr{E}$ et une application linéaire $\vec{f} \in \mathcal{L}(E, E')$ telles que pour tout $M \in \mathscr{E}$,*

$$f(M) = f(A_0) + \vec{f}(\overrightarrow{A_0M}).$$

Lemme 27. *Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ affine, alors il existe $\vec{f} \in \mathcal{L}(E, E')$ telle que pour tout $A_0 \in \mathscr{E}$, et pour tout $M \in \mathscr{E}$,*

$$f(M) = f(A_0) + \vec{f}(\overrightarrow{A_0M}).$$

Démonstration. On sait qu'on dispose d'un A_0 et d'un $\vec{f}$ vérifiant cette propriété. Soit $B_0 \in \mathscr{E}$, et soit $M \in \mathscr{E}$. Alors $f(M) = f(A_0) + \vec{f}(\overrightarrow{A_0M})$. Or $f(B_0) = f(A_0) + \vec{f}(\overrightarrow{A_0B_0})$, donc par linéarité de $\vec{f}$, $f(M) = f(A_0) + \vec{f}(\overrightarrow{A_0B_0}) + \vec{f}(\overrightarrow{B_0M}) = f(B_0) + \vec{f}(\overrightarrow{B_0M})$. □

Exemple 28. *Soient E, E' des K-espace vectoriels muni de leur structure canonique d'espace affine, alors les applications affines de E vers E' sont les applications de la forme $x \mapsto x_0 + f(x)$ où $f \in \mathcal{L}(E, E')$.*

Définition 29. *On note $\mathscr{A}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ l'ensemble des applications affines de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{E}'$. Le lemme 27 montre qu'on dispose d'une application « partie linéaire » $\mathscr{A}(\mathscr{E}, \mathscr{E}') \to \mathcal{L}(E, E')$.*

Proposition 30. *Une application affine est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si sa partie linéaire l'est.*

Démonstration. On a $\ker \vec{f} = \{u \in E,$tels que $f(A_0 + u) = f(A_0)\}$. Ainsi, f est injective si et seulement si sa partie linéaire l'est.
On a Im$\vec{f} = \{v \in E'$ tels qu'il existe $M \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{f(M)f(A_0)} = v\}$. Si $\vec{f}$ est surjectif, alors pour $N \in \mathscr{E}'$, on dispose de $M \in \mathscr{E}$ tel que $f(\overrightarrow{A_0M}) = \overrightarrow{A_0'N}$. Alors $f(M) = N$. Réciproquement, si f est surjectif, alors tout $v \in \mathscr{E}'$ s'écrit $v = \overrightarrow{f(A_0)f(M)}$, donc $v = \vec{f}(\overrightarrow{A_0M})$. □

Parmi les applications affines remarquables, on peut citer les translations, les homothéties, les affinités (dilatations)...

Théorème 31. *Soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites affines parallèles du plan affine. Soit A un point du plan affine en dehors de $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$. Soient $B, C \in \mathscr{D}$. Alors les droites (AB) et (AC) rencontrent $\mathscr{D}'$ en respectivement B' et C'. Il existe une unique homothétie de centre A envoyant B sur B', et elle envoie C sur C'.*

Démonstration. Soit h l'homothétie affine de centre A et de rapport λ, où λ est l'unique scalaire tel que $\overrightarrow{AB'} = \lambda\overrightarrow{AB}$: c'est l'unique homothétie de centre A envoyant B sur B'. On a $h(C) = A + \lambda\overrightarrow{AC}$, donc $h(C)$ est sur (AC). On a aussi $h(C) = h(B) + \lambda\overrightarrow{BC} = B' + \lambda\overrightarrow{BC}$, donc $h(C)$ est sur la parallèle à (BC) passant par B'. Ainsi, $h(C)$ est à l'intersection de $\mathscr{D}'$ et (AC) : c'est C'. □

Proposition 32. *L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine. Une bijection affine préserve le parallélisme.*

Démonstration. Cela découle directement des résultats analogues pour les applications linéaires. □

Remarque 33. *La réciproque est fausse : par exemple, la conjugaison complexe du $\mathbf{C}$-espace affine $\mathbf{C}^2$ n'est pas une application affine, et pourtant elle préserve le parallélisme et envoie sous-espace affine sur sous-espace affine.*

2.2 Applications affines et repères affines

Proposition 34. *Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$. Soient $M_0, \dots M_n \in \mathscr{E}'$. Alors il existe une unique application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ telle que $f(A_i) = M_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.*

Démonstration. Si une telle application existe, alors elle envoie $A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i}$ sur $M_0 + \sum_{i=1} \lambda_i \overrightarrow{M_0 M_i}$, donc elle est unique. D'après le résultat analogue pour les applications linéaires, on dispose d'une unique application linéaire $\vec{f}$ telle que $\vec{f}(\overrightarrow{A_0 A_i}) = \overrightarrow{M_0 M_i}$. Alors, l'application f définie par $f(M) = M_0 + \vec{f}(\overrightarrow{A_0 M})$ convient : elle est affine et envoie A_i sur M_i. □

2.3 Groupe affine

Définition 35. *Le groupe affine de $\mathscr{E}$ est le groupe des transformations affines bijectives de $\mathscr{E}$, noté $GA(\mathscr{E})$.*

Proposition 36. *L'application « partie linéaire » est un morphisme de groupes surjectif $GA(\mathscr{E}) \to GL(E)$. Son noyau est le sous-groupe $T(\mathscr{E})$ des translations.*

Démonstration. Immédiat. □

Proposition 37. *Une application affine est bijective si et seulement si elle envoie un repère affine sur un repère affine.*

Démonstration. Découle immédiatement du résultat analogue pour les applications linéaires. □

Lemme 38. *Le sous-groupe $T(\mathscr{E})$ est distingué et isomorphe à E.*

Démonstration. Il est distingué car c'est le noyau du morphisme de linéarisation. L'application $E \to T(\mathscr{E})$ définie par $u \mapsto (A \to A + u)$ est un isomorphisme de groupes. □

Définition 39. *On note $HT(\mathscr{E})$ le sous-groupe de $GA(\mathscr{E})$ constitué des homothéties et translations.*

Proposition 40. *Le sous-groupe $HT(\mathscr{E})$ est distingué. Ses éléments sont précisément ceux qui envoient toute droite affine sur une droite parallèle.*

Démonstration. Ce sous-groupe est distingué comme image réciproque du centre de $GL(E)$ par le morphisme de linéarisation. Il est clair que les homothéties et translations envoient une droite sur une droite parallèle. Réciproquement, une application affine qui envoie droite sur droite parallèle a une partie linéaire qui stabilise toute droite, c'est donc une homothétie. □

Si on fixe $A_0 \in \mathscr{E}$, on peut considérer le sous-groupe $GA(\mathscr{E})_{A_0}$ stabilisateur de A_0.

Proposition 41. *La restriction à $GA(\mathscr{E})_{A_0}$ du morphisme de linéarisation induit un isomorphisme vers $GL(E)$ (une translation qui a un point fixe est l'identité).*

Lemme 42. *Soit $(\mathscr{E}, E)$ affine de dimension finie, alors $f \in GA(\mathscr{E})$ admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$*

Démonstration. Si 1 est valeur propre, alors si f admet un point fixe, elle en admet un sous-espace affine de dimension $\dim \ker(f - id) \geq 1$. Par contraposée, si f admet un unique point fixe, alors 1 ne peut être valeur propre.
Réciproquement, supposons que 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$. Le point $M = A_0 + u \in \mathscr{E}$ est fixe si et seulement si $M = f(M) = f(A_0) + \vec{f}(u)$. C'est le cas si et seulement si $\overrightarrow{A_0 f(A_0)} = (f - id)(u)$. Comme $\mathscr{E}$ est de dimension finie et que 1 n'est pas valeur prore de $\vec{f}$, on dispose d'un unique $u \in E$ tel que $(f - id)(u) = \overrightarrow{A_0 f(A_0)}$, et alors $A_0 + u$ est l'unique point fixe de f. □

Théorème 43 (de décomposition)**.** *Si f est une application affine telle que $E = \ker(\vec{f} - id) \oplus Im(\vec{f} - id)$, alors f se décompose de manière unique comme la composée d'une translation et d'une application affine ayant un point fixe, qui commutent entre elles.*

Démonstration. Admis pour le moment. □

3 Barycentres

3.1 Définitions

Lemme 44. *Soient $M_0, \dots, M_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \to & E \\ M & \mapsto & \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{M_i M} \end{array}$$

est soit constante (si $\sum_i \lambda_i = 0$), soit bijective.

Démonstration. Cette application est une homothétie affine de rapport $\sum_{i=0}^n \lambda_i$. En effet, $\overrightarrow{f(A_0)f(M)} = (\sum_{i=0}^n \lambda_i)\overrightarrow{A_0 M}$. □

Définition 45. *Un système de points pondérés de $\mathscr{E}$ est la donnée d'une partie finie de $\mathscr{E} \times K$: $\mathscr{S} = \{(M_i, \lambda_i),\ i \in I\}$, telle que $\sum_i \lambda_i \neq 0$.*

À un tel système, on associe une homothétie affine $h_{\mathscr{S}}$ comme dans le lemme 44.

Définition 46. *Le* barycentre *du système de points pondérés $\mathscr{S}$ est l'unique $G \in \mathscr{E}$ tel que $h_{\mathscr{S}}(G) = \vec{0}$.*

Proposition 47. *Le point G est le barycentre du système $\mathscr{S}$ si et seulement si pour tout $M \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{GM} = h_{\mathscr{S}}(M)$.*

Proposition 48. *Le sous-espace affine engendré par une partie $\mathscr{X}$ est l'ensemble des barycentres de systèmes des points pondérés de $\mathscr{X}$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{X} \subset \mathscr{E}$. Soit $A_0 \in \mathscr{X}$. Par définition, si G le barycentre d'un système de points pondérés de $\mathscr{X}$ alors $G = A_0 + \vec{A_0 G} = A_0 - h_{\mathscr{S}}(A_0) \in \langle \mathscr{X} \rangle$.
Réciproquement, si $G \in \langle \mathscr{X} \rangle$, on dispose de $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{X}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ tels que $\overrightarrow{A_0 G} = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_0 A_i$, donc

$$\left(1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i\right) \overrightarrow{A_0 G} + \sum_{i=1}^k \overrightarrow{A_i G} = \vec{0},$$

ce qui montre que G est bien barycentre d'un système de points pondérés de $\mathscr{X}$. □

Proposition 49. *Les applications affines préservent les barycentres.*

Démonstration. Soit f affine de partie linéaire $\vec{f}$, soit G le barycentre du système $\mathscr{S}$. On note $f(\mathscr{S})$ le système ayant les mêmes poids et dont les points sont les images respectives par f des points de $\mathscr{S}$. Alors

$$h_{f(\mathscr{S})}(f(M)) = \sum_i \lambda_i f(M_i) f(M) = \vec{f}\left(\sum_i \lambda_i \overrightarrow{M_i M}\right).$$

Cela montre que $h_{f(\mathscr{S})} \circ f = \vec{f} \circ h_{\mathscr{S}}$. Ainsi, si $h_{\mathscr{S}}(G) = \vec{0}$ alors $h_{f(\mathscr{S})}(f(G)) = 0$. Donc $f(G)$ est bien le barycentre du système $f(\mathscr{S})$. □

Théorème 50. *Soit f une application qui préserve les barycentres. Alors f est affine.*

Démonstration. Supposons que f préserve les barycentres. On fixe un repère de $\mathscr{E}$: $\mathcal{X} = (A_i)_{i \in I}$. Soit g l'unique application affine envoyant A_i sur $f(A_i)$. Comme g est affine, elle préserve les barycentres, donc elle envoie le barycentre d'un système de points pondérés de $\mathscr{X}$ sur le barycentre des images. En particulier, f et g coïncident sur les barycentres de systèmes de points de $\mathscr{X}$, c'est-à-dire sur le sous-espace affine engendré par $\mathscr{X}$. Comme $\mathscr{X}$ est un repère affine, ce sous-espace est $\mathscr{E}$. □

Proposition 51. *Associativité, homogénéité.*

3.2 Repères et coordonnées barycentriques

Définition 52. *Un repère barycentrique est un repère affine.*

Remarque 53. *Mais on va l'utiliser différemment.*

Proposition 54. *Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère barycentrique. Alors tout point de $\mathscr{E}$ s'exprime comme barycentre des points du repère. La famille des coefficients correspondants est unique à multiplication par un scalaire non nul près. On l'appelle un* système de coordonnées barycentriques *du point en question.*

Démonstration. On a déjà vu l'existence. Montrons l'unicité à multiplication par un scalaire près. Si $\overrightarrow{A_0G} = \sum_{i=1}^n \mu_i \overrightarrow{A_0A_i}$, alors les $(\lambda(1 - \sum \mu_i), \lambda\mu_1, \dots, \lambda\mu_n)$ sont les seuls systèmes de poids convenables. □

Remarque 55. *On passe des coordonnées affines aux coordonnées barycentriques par $(\mu_1, \dots, \mu_n) \mapsto (1 - \sum \mu_i, \mu_1, \dots, \mu_n)$. Le passage inverse est $(\lambda_0, \dots, \lambda_i) \mapsto (\lambda_1/s, \dots, \lambda_n/s)$ où $s = \sum_{i=0}^n \lambda_i$.*

Exemple 56. *Points remarquables du triangle.*

Remarque 57.
- *L'application qui à M associe le barycentre de $\{(A, 1 - \lambda), (M, \lambda)\}$ est l'homothétie de rapport λ et centre A.*
- *Le barycentre de $\{(A, -1), (B, 1), (M, 1)\}$ est $M + \vec{AB}$.*

3.3 Théorème fondamental de la géométrie affine

Définition 58 (Applications semi-linéaires)**.** *Soit K un corps, $\sigma : K \to K$ un automorphisme. On dit que f définie sur un K-espace vectoriel E est semi-linéaire si f est un morphisme de groupes et pour tout λ, x, $f(\lambda x) = \sigma(\lambda) f(x)$.*

Exemple 59.
- *Sur $\mathbf{C}$, les applications antilinéaire sont semi-linéaires.*
- *Le seul automorphisme de corps de $\mathbf{Q}$ est l'identité (même argument pour $\mathbf{F}_p$, p premier).*
- *Le seul automorphisme de corps de $\mathbf{R}$ est l'identité : comme il préserve les carrés, il préserve le signe, donc il est continu.*

Définition 60. *Application semi-affine.*

Théorème 61. *Une transformation d'un espace affine de dimension ≥ 2 est semi-affine si et seulement si elle préserve l'alignement.*

Démonstration. Une semi-affine préserve l'alignement : OK.
Supposons que f préserve l'alignement. Alors f préserve les droites, et f préserve le parallélisme des droites (si 2 droites sont parallèles, leurs images par f ne peuvent se rencontrer).
On fixe $A_0 \in \mathscr{E}$. On prend $u \in E$, on a $A_0 + u = A_u$, $A_0 + v = A_v$, $A_0 + u + v = A_w$. On veut montrer que A_0, A_u, A_w, A_v est un parallélogramme. En effet les droites (A_0A_u), (A_vA_w) sont parallèles, de même que les droites $(A_0A_v), (A_uA_w)$. Ainsi comme f préserve l'alignement, l'image de ce parallélogramme par f est un parallélogramme. Donc $f(A_0 + u + v) = f(A_0 + u) + f(A_0 + v)$: l'application sous-jacente est un morphisme de groupes.
Enfin, l'image de la droite $A_0 + Ku$ est une droite $f(A_0) + Kv$. On définit σ par $f(A_0 + \lambda u) = f(A_0) + \sigma(\lambda)v$. Soit A en dehors de $A_0 + Ku$. Alors $A_0 + (\lambda + \mu)u$ est l'intersection de (Au) avec la parallèle à $B(A + \lambda u)$ passant par $B + \mu v$. En appliquant f, on en déduit que $\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$. De même, on peut représenter le produit par une figure.
On conclut en montrant que l'application sous-jacente est bien définie, grâce au th. de Thalès. □