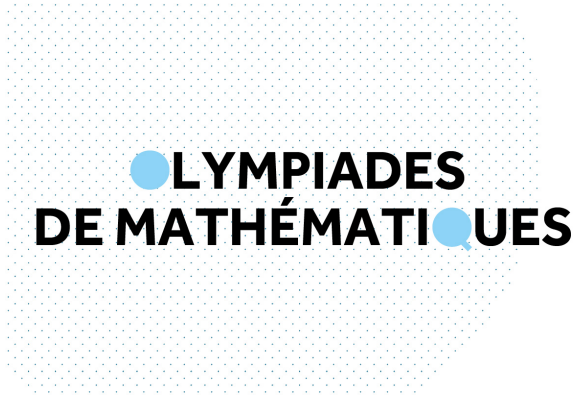
Salade de fruits mathématique

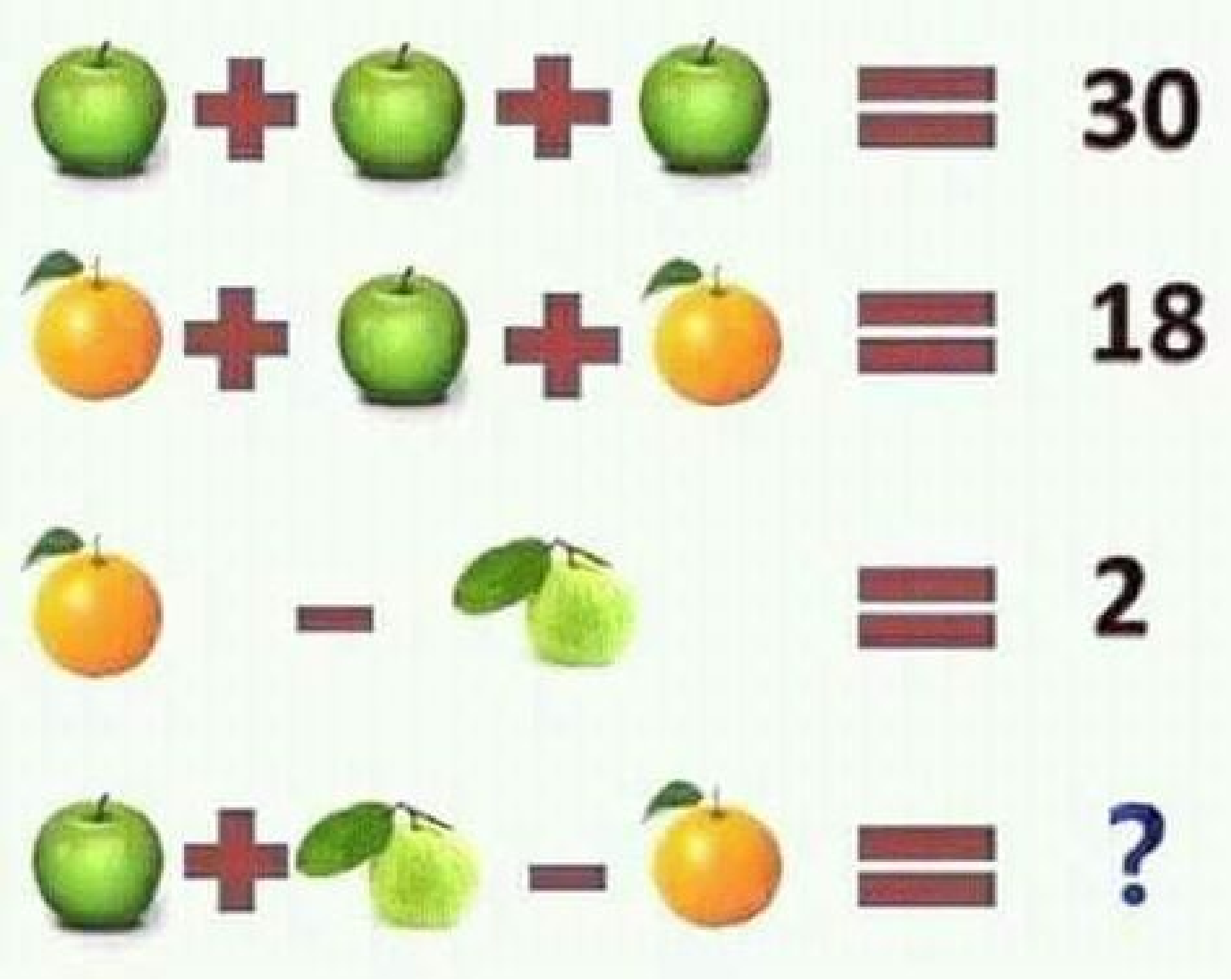
Jérémy Le Borgne

30 mai 2018





Can you find the answer ?



Can you find the answer ?

95% of people cannot solve this!



Can you find positive whole values

for  ,  , **and**  **?**

Une équation très ressemblante

Résoudre l'équation :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4$$

pour $x, y, z > 0$ entiers.

Une équation très ressemblante

Résoudre l'équation :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 2$$

pour $x, y, z > 0$ entiers.

Une équation très ressemblante

Résoudre l'équation :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 2$$

pour $x, y, z > 0$ entiers.

Une solution : $x = y = 1$, $z = 3$.

L'ordinateur à la rescousse ?

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4$$

Algorithme de recherche de solutions.

L'ordinateur à la rescousse ?

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=4$$

Algorithme de recherche de solutions.

pour $1 \leq i \leq 100$
  pour $1 \leq j \leq 100$
    pour $1 \leq k \leq 100$
      si $\frac{i}{j+k}+\frac{j}{k+i}+\frac{k}{i+j}=4$:
        afficher (i,j,k)

L'ordinateur à la rescousse ?

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=4$$

Algorithme de recherche de solutions.

pour $1 \leq i \leq 100$
  pour $1 \leq j \leq 100$
    pour $1 \leq k \leq 100$
      si $\frac{i}{j+k}+\frac{j}{k+i}+\frac{k}{i+j}=4$:
        afficher (i,j,k)

Temps de calcul : 7 minutes.

L'ordinateur à la rescousse ?

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=4$$

Algorithme de recherche de solutions.

pour $1 \leq i \leq 100$
  pour $1 \leq j \leq 100$
    pour $1 \leq k \leq 100$
      si $\frac{i}{j+k}+\frac{j}{k+i}+\frac{k}{i+j}=4$:
        afficher (i,j,k)

Temps de calcul : 7 minutes.
Réponses affichées : aucune.

L'ordinateur à la rescousse ?

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=4$$

Algorithme de recherche de solutions.

pour $1 \leq i \leq 100$
  pour $1 \leq j \leq 100$
    pour $1 \leq k \leq 100$
      si $\frac{i}{j+k}+\frac{j}{k+i}+\frac{k}{i+j}=4$:
        afficher (i,j,k)

Temps de calcul : 7 minutes.
Réponses affichées : aucune.
Pour aller jusqu'à 1000, cela prendrait 5 jours de calcul... et on ne trouverait toujours pas de solution !

On peut mettre l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4$$

On peut mettre l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4$$

ou encore :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3x^2z - 3y^2z - 3xz^2 - 3yz^2 - 5xyz = 0.$$

On peut mettre l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4$$

ou encore :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3x^2z - 3y^2z - 3xz^2 - 3yz^2 - 5xyz = 0.$$

C'est une équation polynomiale à 3 inconnues, de degré 3.

On peut mettre l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4$$

ou encore :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3x^2z - 3y^2z - 3xz^2 - 3yz^2 - 5xyz = 0.$$

C'est une équation polynomiale à 3 inconnues, de degré 3.

Pour $x, y, z > 0$, $E(x, y, z) = 0$

On peut mettre l'équation sous la forme suivante :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 4$$

ou encore :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3x^2z - 3y^2z - 3xz^2 - 3yz^2 - 5xyz = 0.$$

C'est une équation polynomiale à 3 inconnues, de degré 3.

$$\text{Pour } x, y, z > 0,\ E(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow E\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0$$

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$: droite dans le plan

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$: droite dans le plan
- $4x - y + z - 2 = 0$

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$: droite dans le plan
- $4x - y + z - 2 = 0$: plan dans l'espace

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$: droite dans le plan
- $4x - y + z - 2 = 0$: plan dans l'espace
- $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$: droite dans le plan
- $4x - y + z - 2 = 0$: plan dans l'espace
- $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$: un cercle

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$: droite dans le plan
- $4x - y + z - 2 = 0$: plan dans l'espace
- $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$: un cercle
- $xy - 1 = 0$

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$: droite dans le plan
- $4x - y + z - 2 = 0$: plan dans l'espace
- $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$: un cercle
- $xy - 1 = 0$: une hyperbole

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$: droite dans le plan
- $4x - y + z - 2 = 0$: plan dans l'espace
- $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$: un cercle
- $xy - 1 = 0$: une hyperbole
- $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 - 1 = 0$

Équations implicites

Une équation implicite (à 2, 3 variables ou plus) est une équation de la forme $f(x, y) = 0$, ou $f(x, y, z) = 0$...

- $3x + 2y + 1 = 0$: droite dans le plan
- $4x - y + z - 2 = 0$: plan dans l'espace
- $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$: un cercle
- $xy - 1 = 0$: une hyperbole
- $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 - 1 = 0$: une sphère

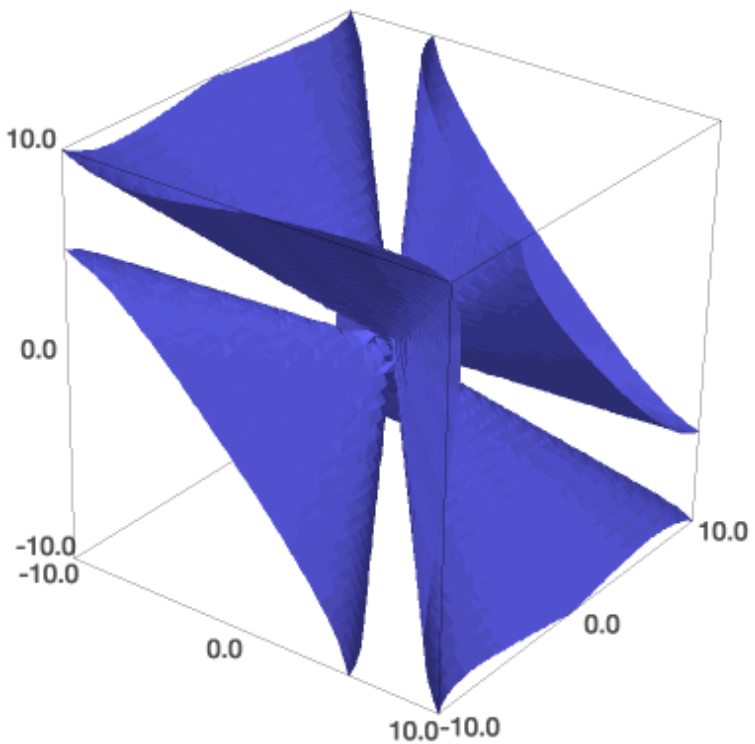
Une vision géométrique

Notre équation $E(x, y, z) = 0$ est l'équation implicite d'une *courbe elliptique*.

Une vision géométrique

$$E(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3x^2y-3xy^2-3x^2z-3y^2z-3xz^2-3yz^2-5xyz$$

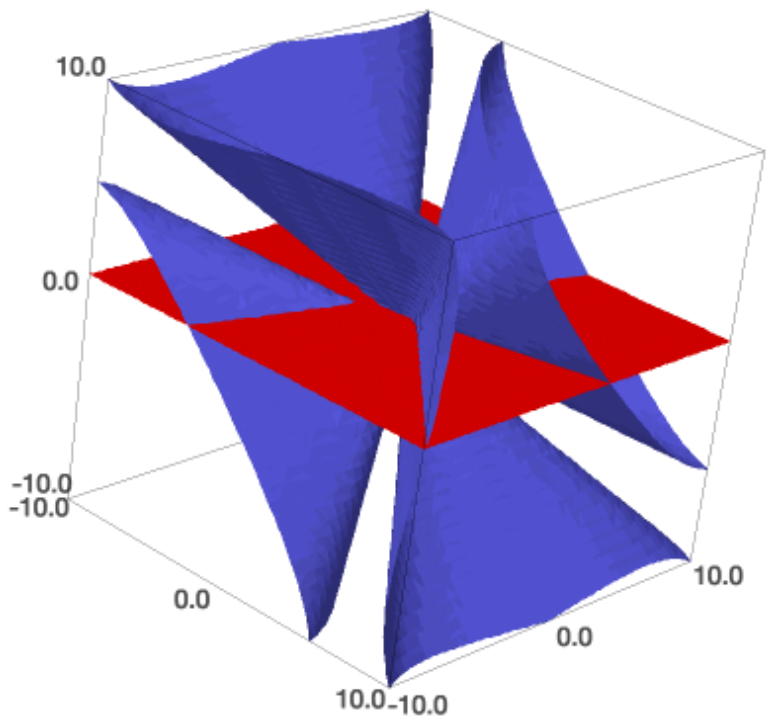
Figure – Surface d'équation $(E = 0)$



Une vision géométrique

$$E(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3x^2y-3xy^2-3x^2z-3y^2z-3xz^2-3yz^2-5xyz$$

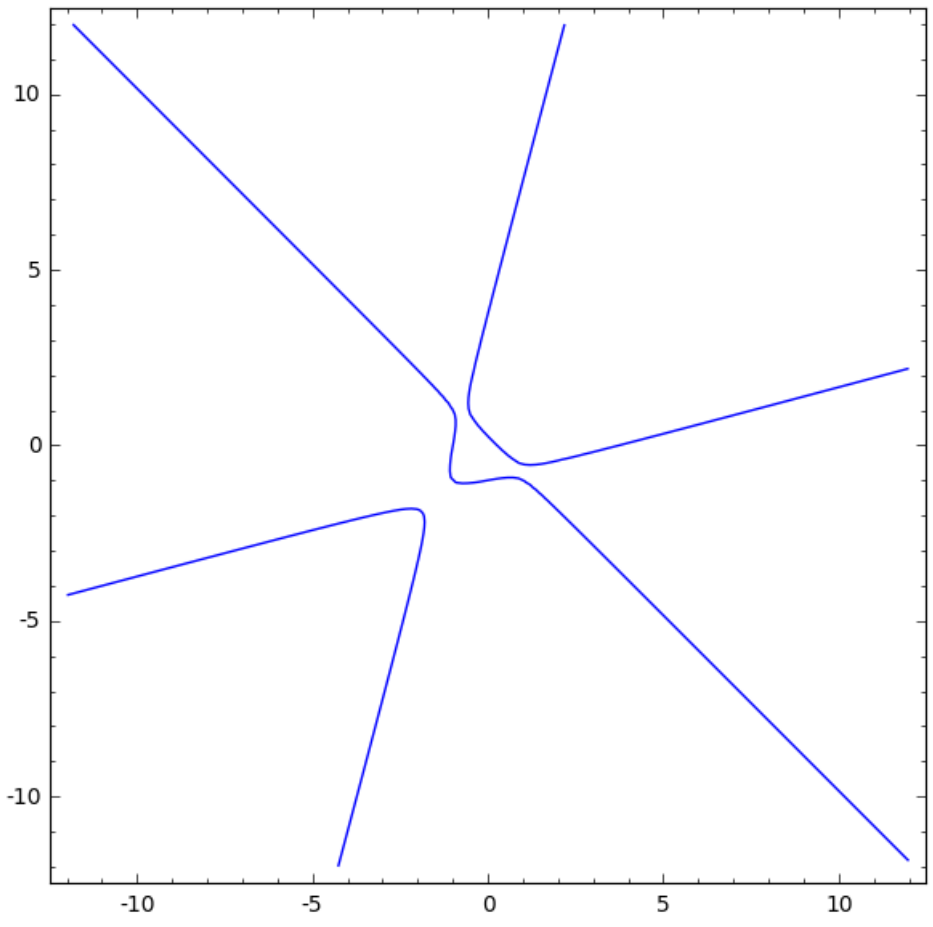
Figure – Surface d'équation $(E = 0)$ et plan $z = 1$



Une vision géométrique

$$E(x, y, 1) = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3x - 3y - 5xy + 1$$

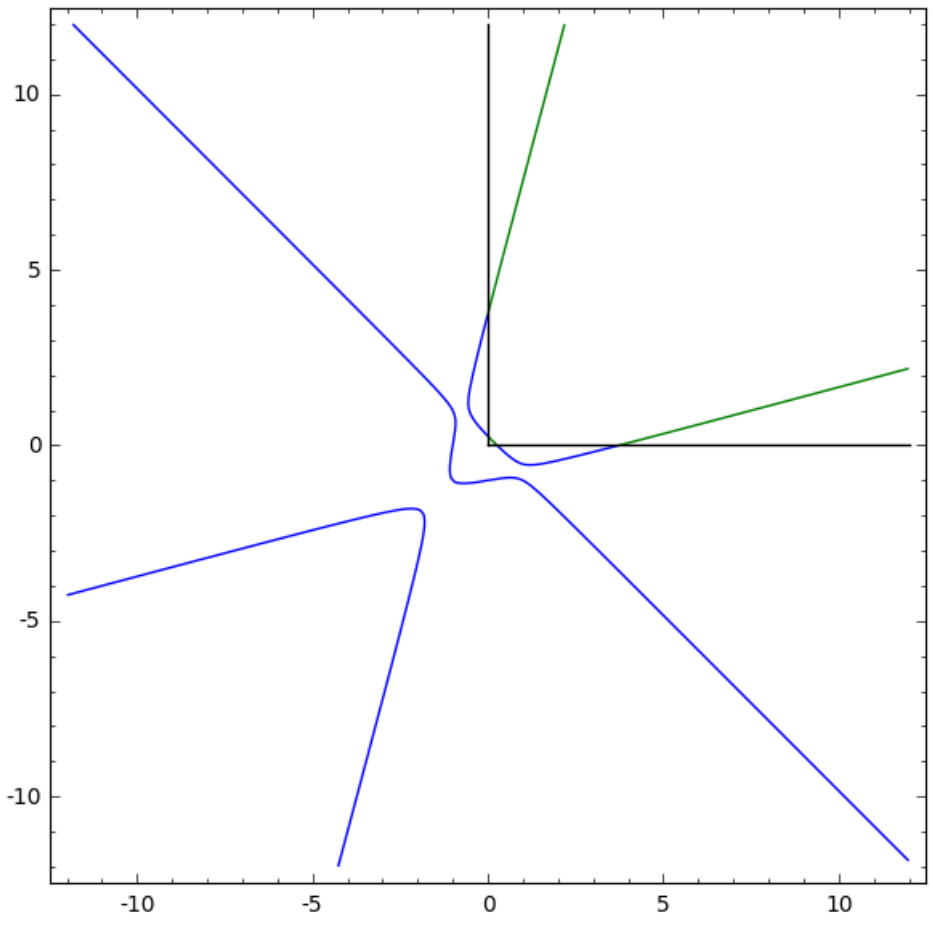
Figure – Coupe par le plan d'équation $z = 1$



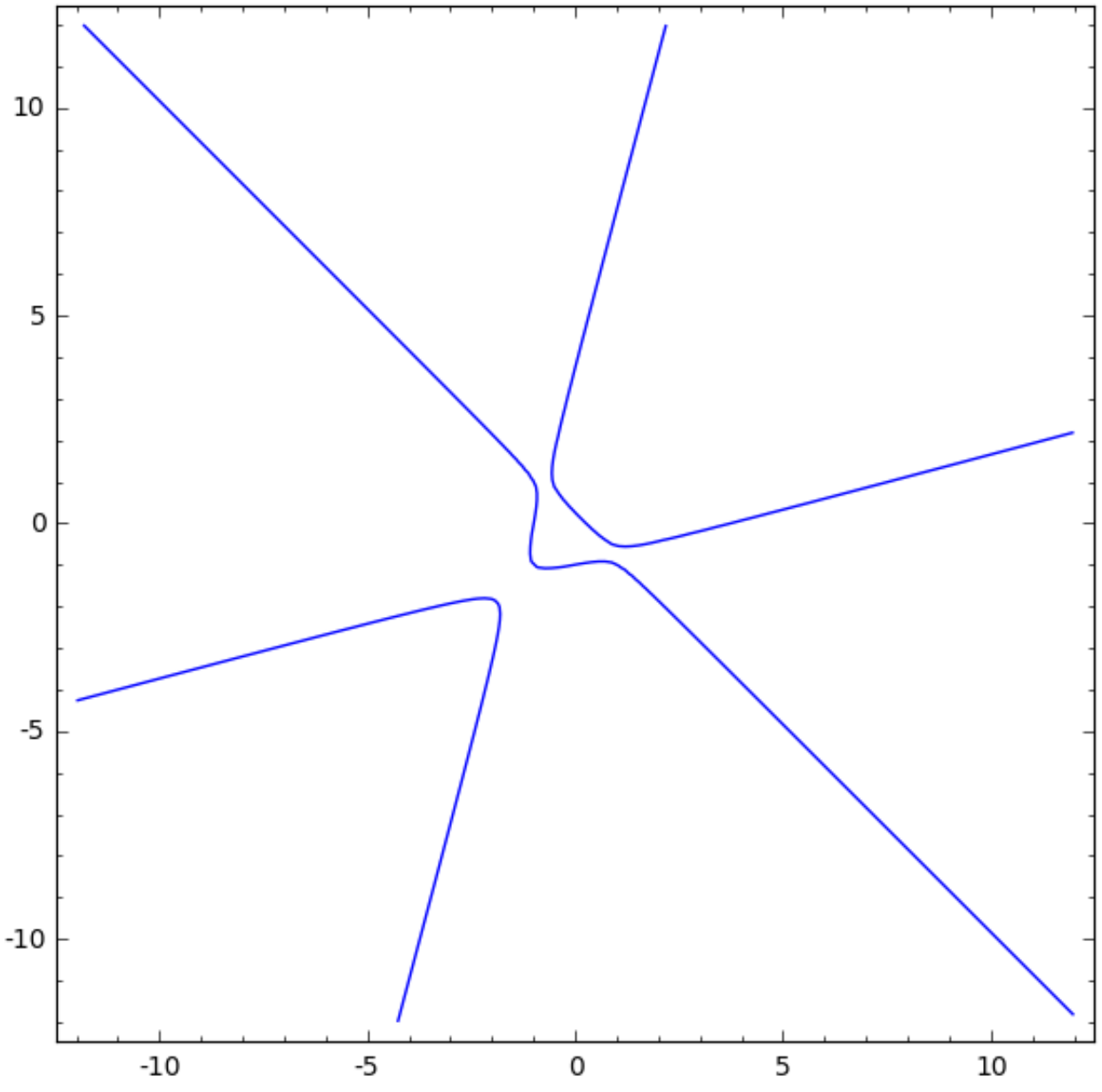
Une vision géométrique

$$E(x, y, 1) = x^3 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3x - 3y - 5xy + 1$$

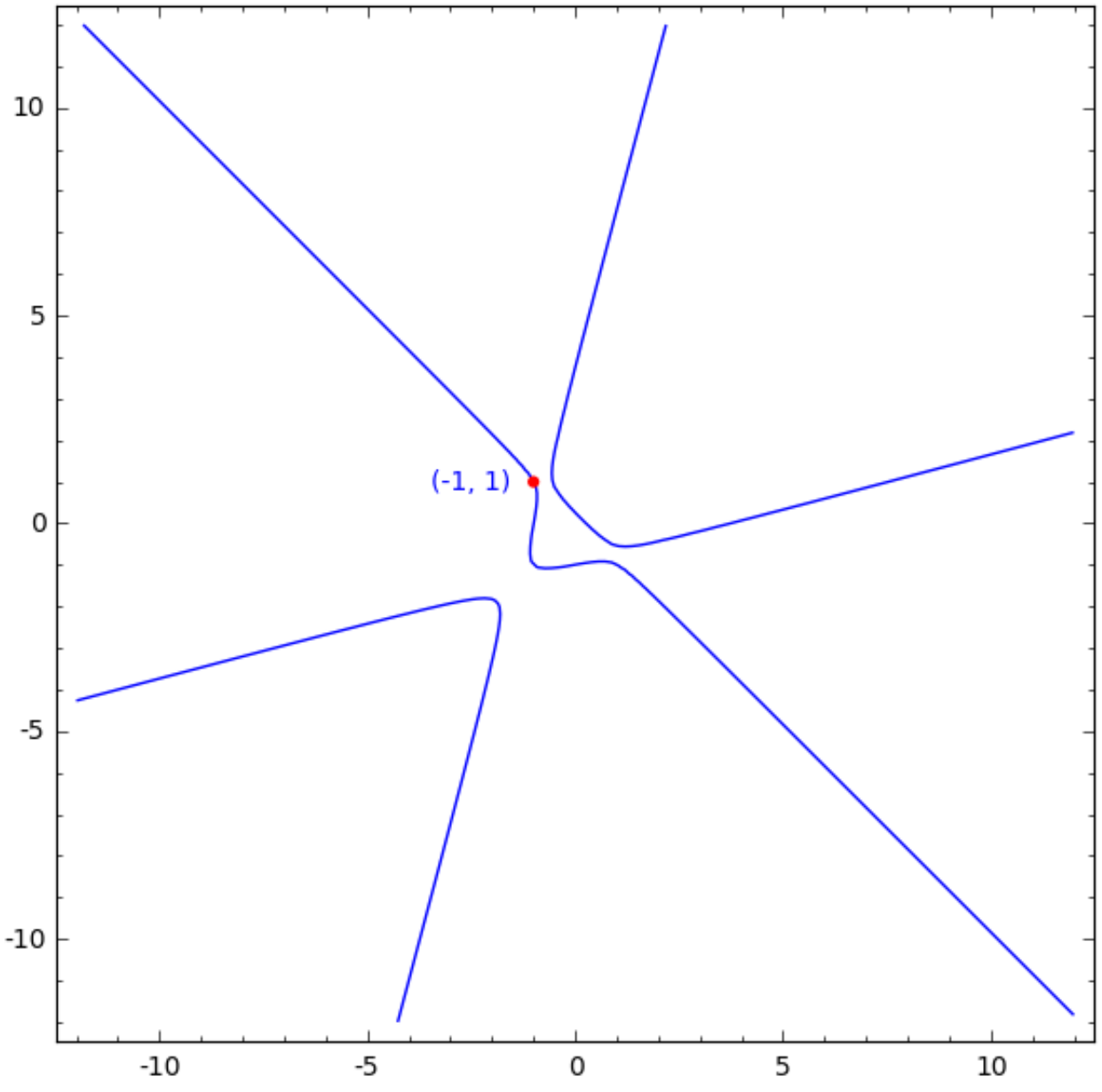
Figure – Coupe par le plan d'équation $z = 1$



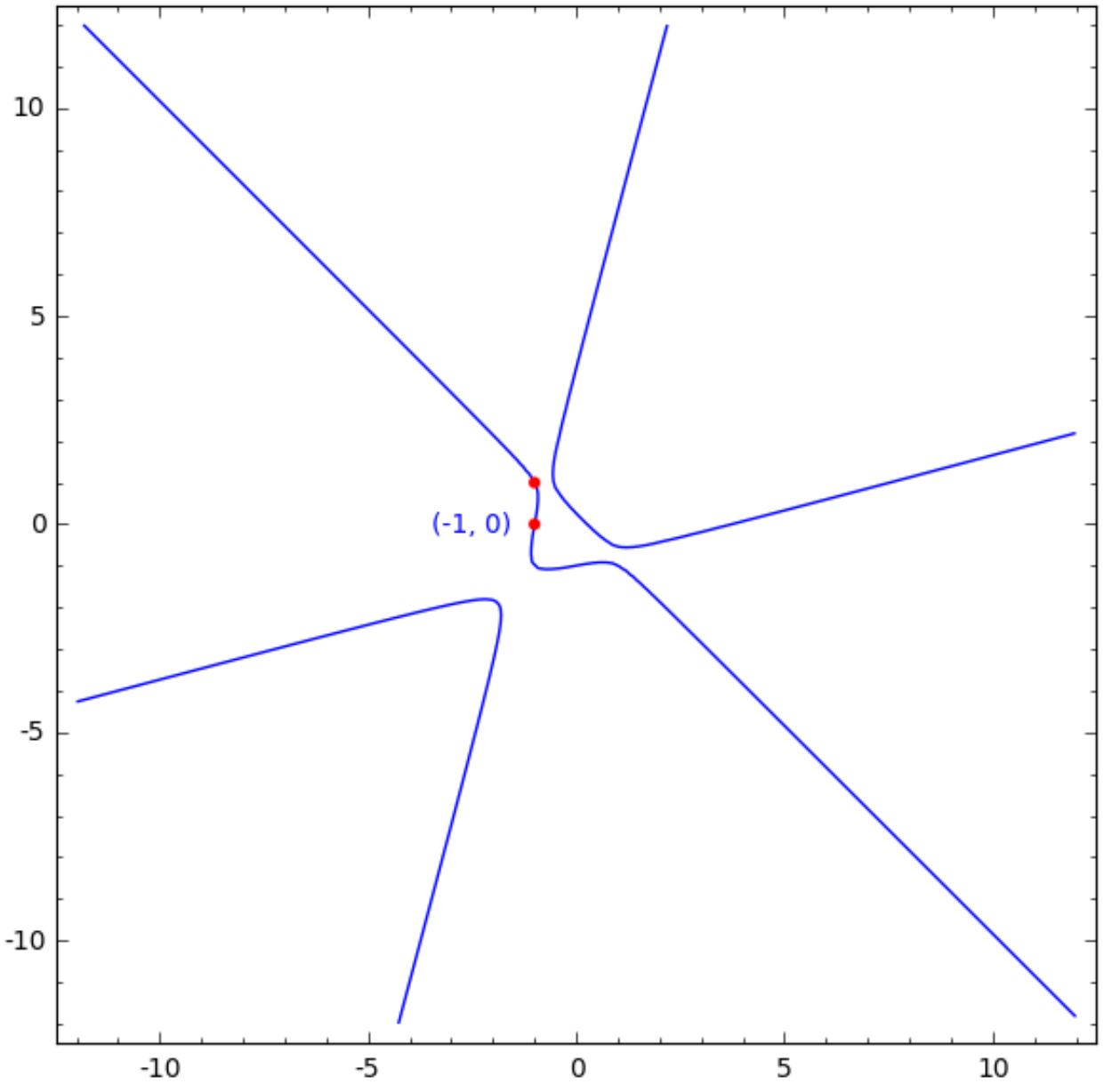
Quelques points rationnels



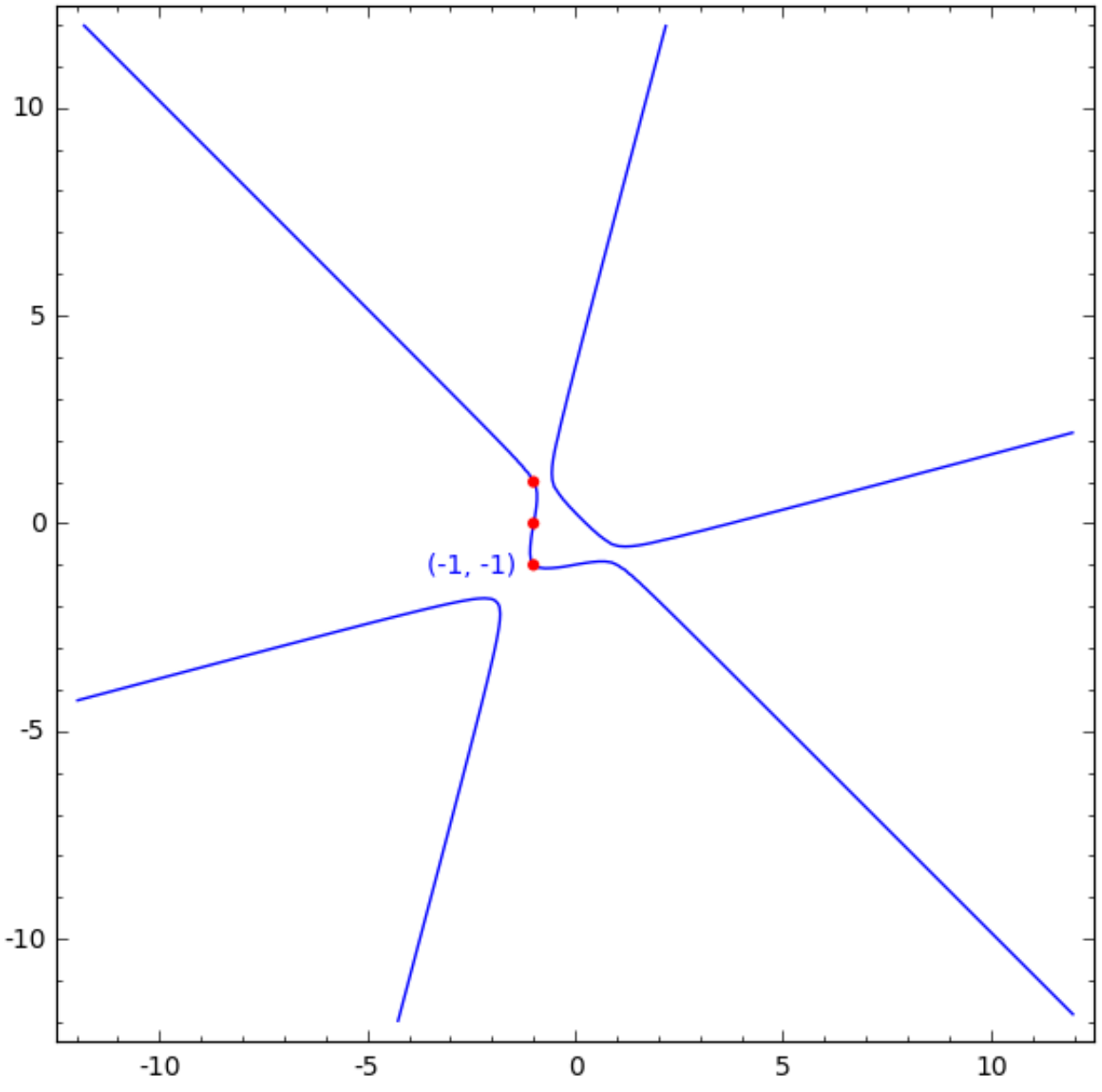
Quelques points rationnels



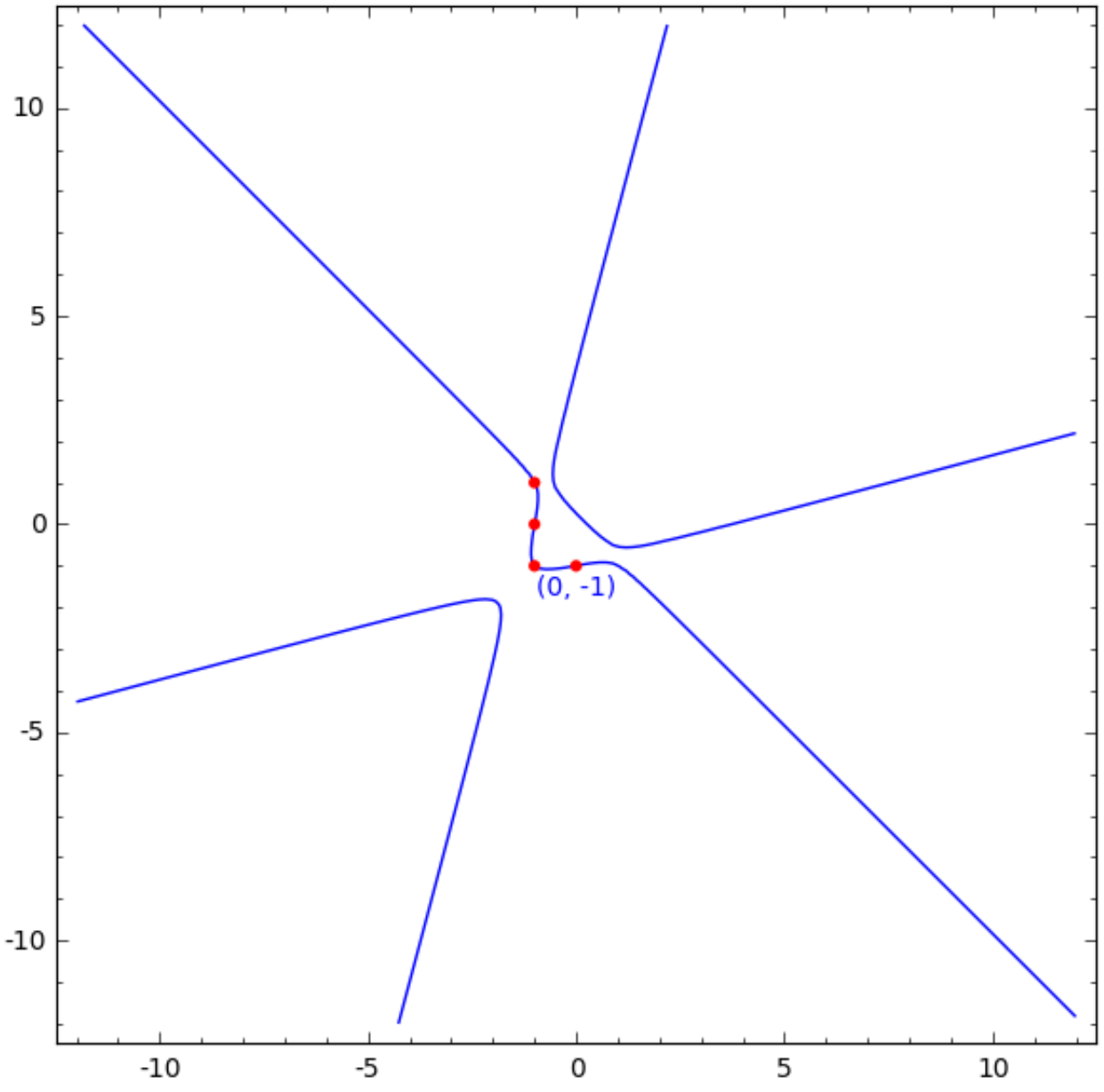
Quelques points rationnels



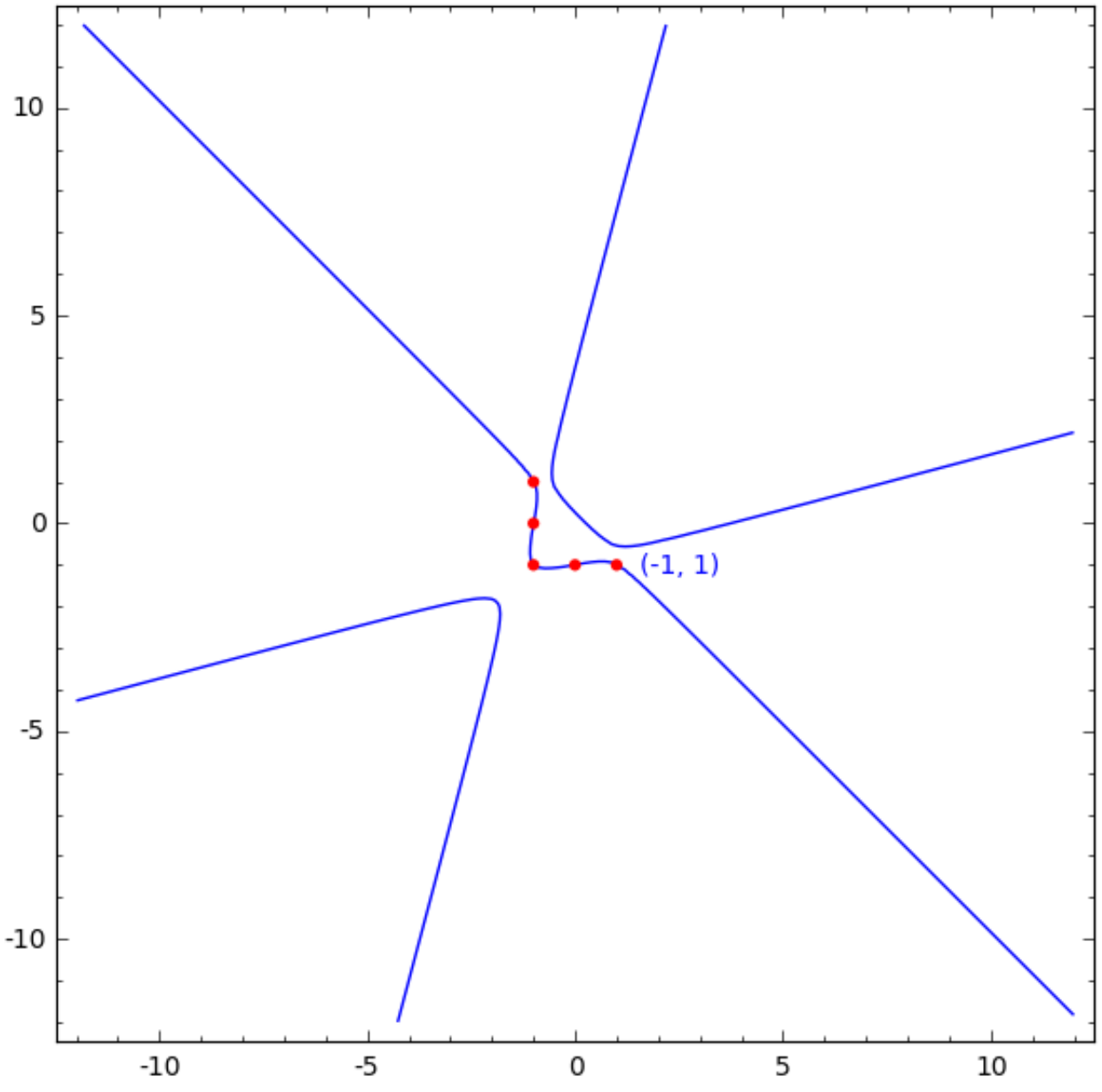
Quelques points rationnels



Quelques points rationnels



Quelques points rationnels



Addition sur une courbe elliptique

Savez-vous additionner les points sur certaines courbes ?

Addition sur une courbe elliptique

Règles d'addition :

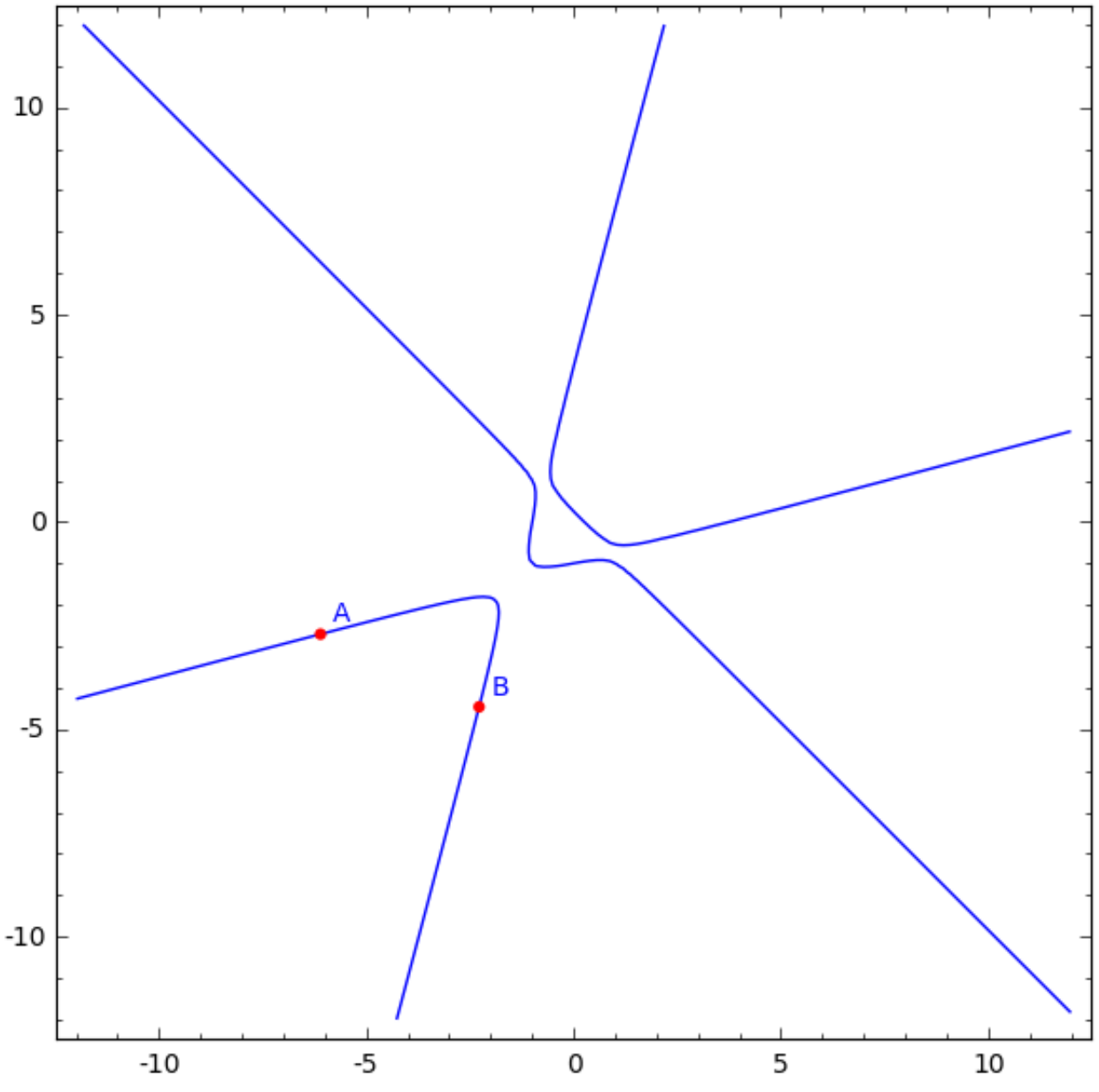
- La somme de 3 points alignés est 0.

Addition sur une courbe elliptique

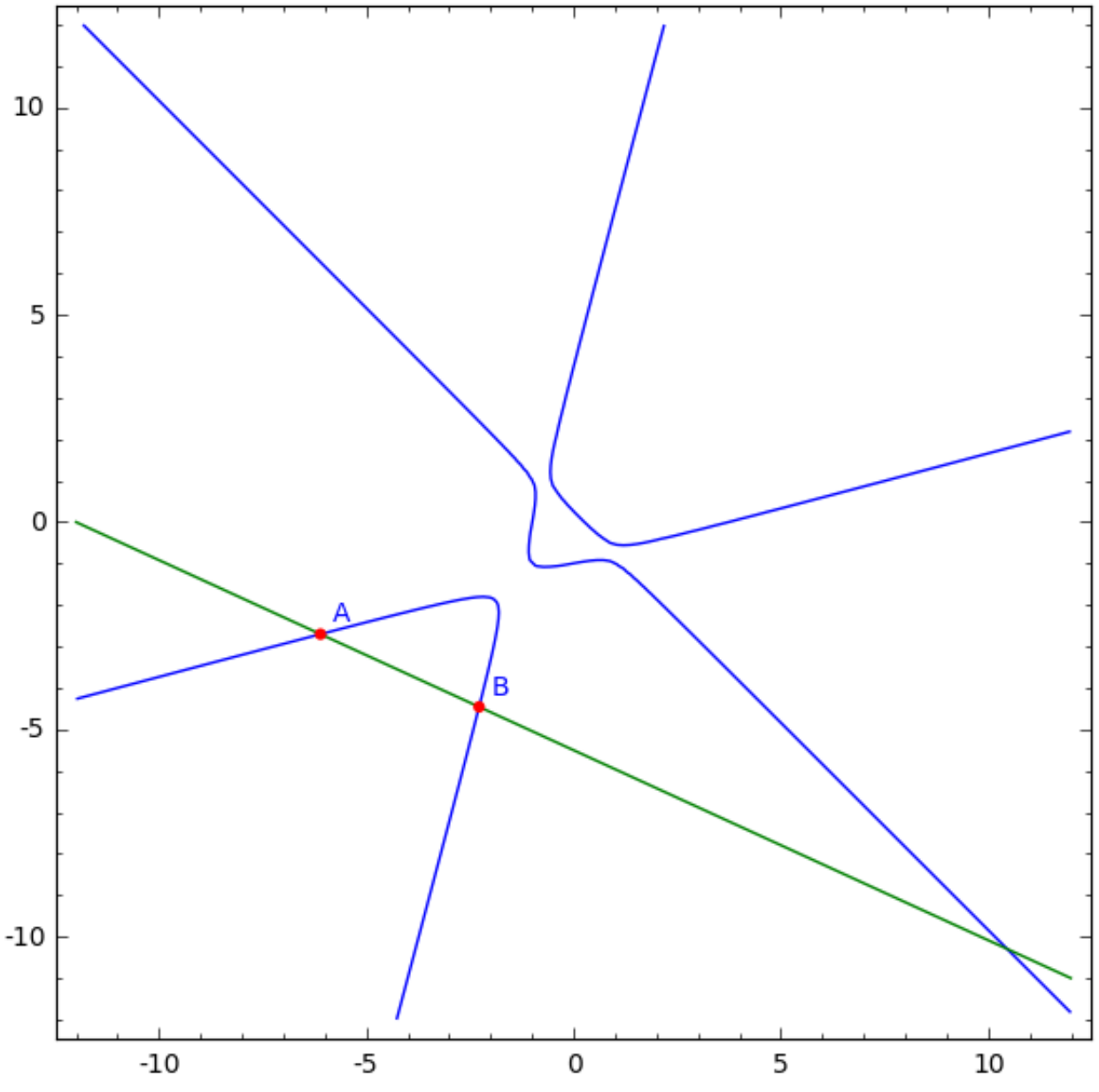
Règles d'addition :

- La somme de 3 points alignés est 0.
- L'opposé d'un point est son symétrique par rapport à l'axe de symétrie de la courbe.

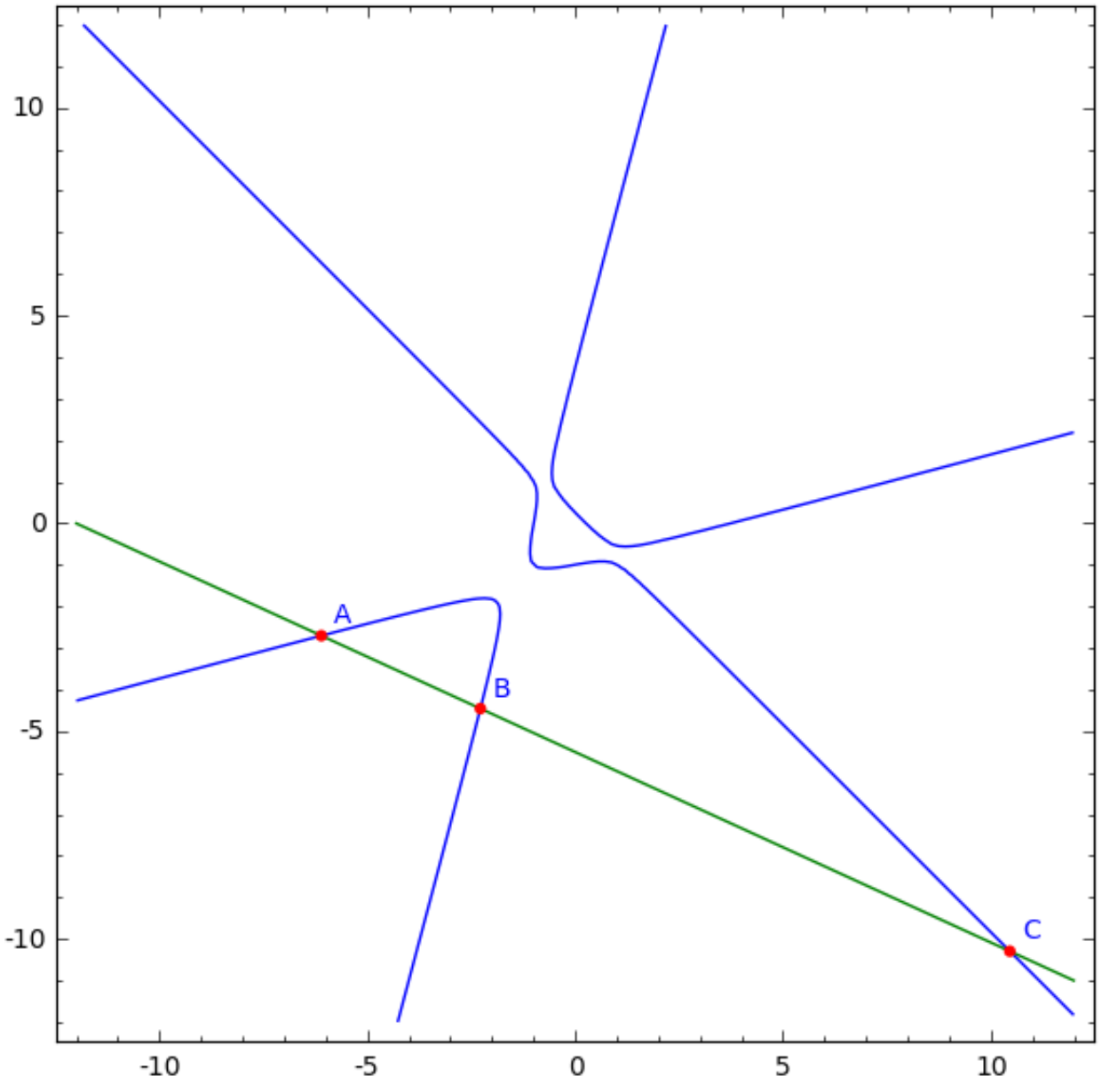
Addition sur une courbe elliptique



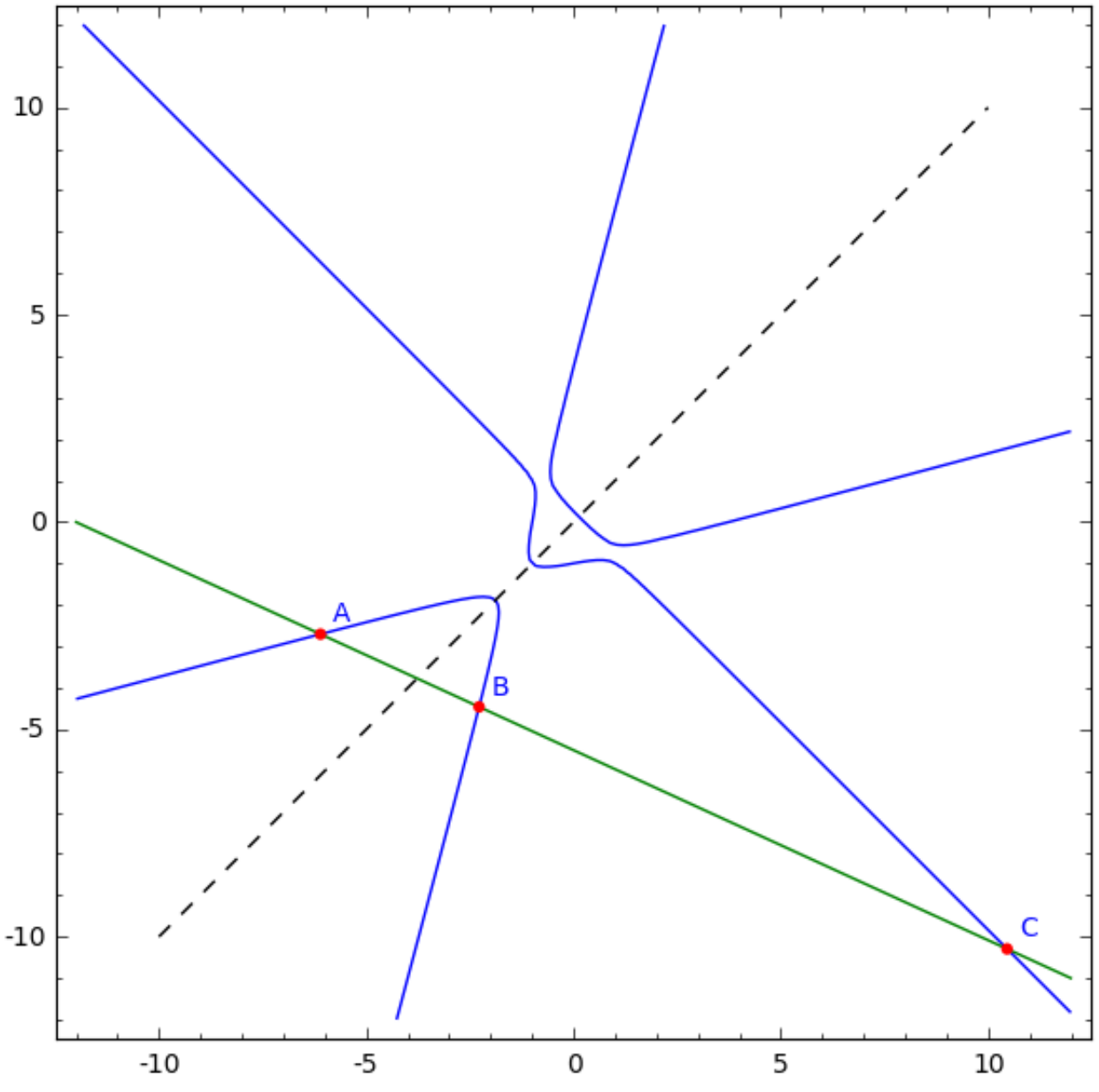
Addition sur une courbe elliptique



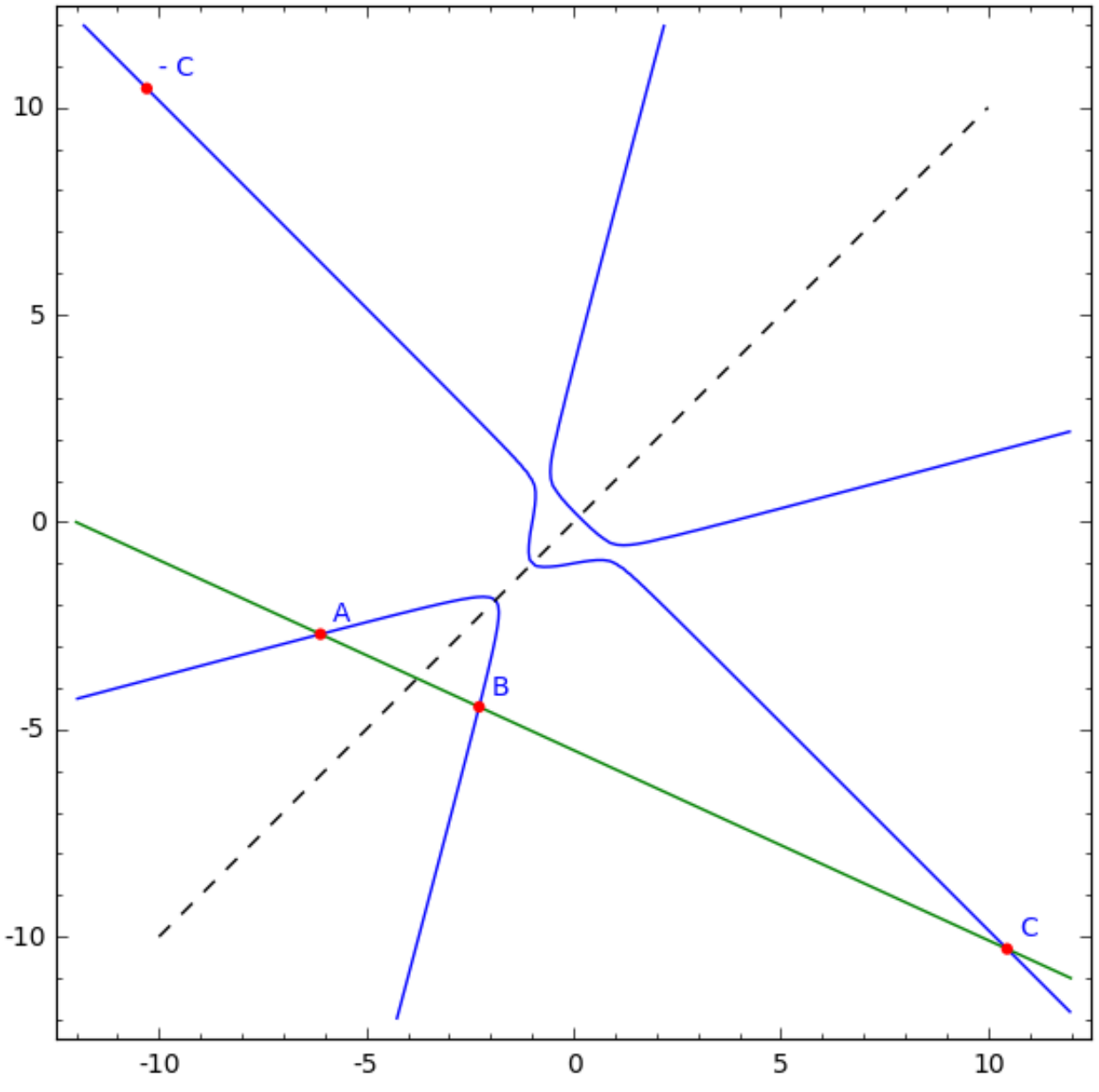
Addition sur une courbe elliptique



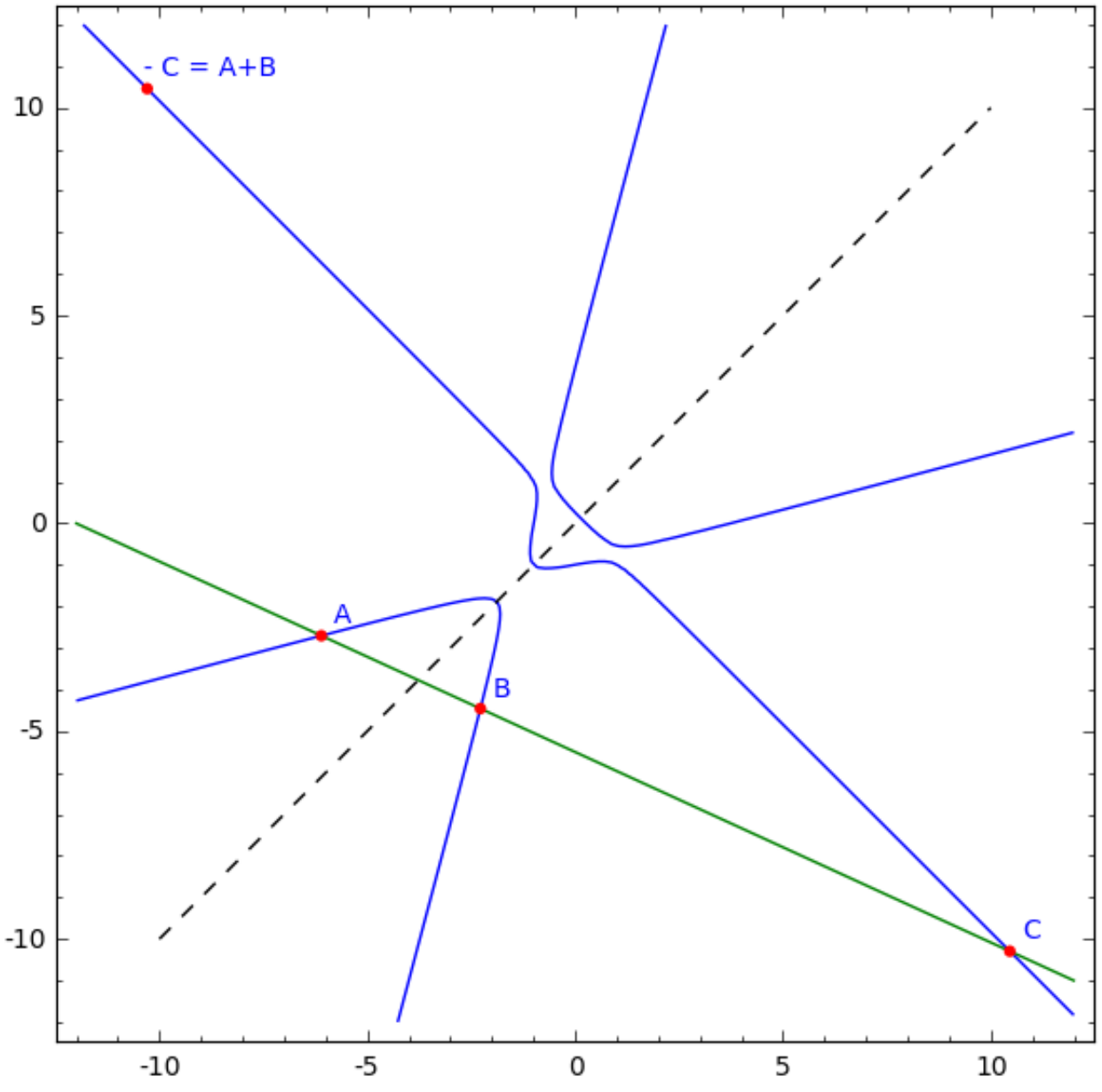
Addition sur une courbe elliptique



Addition sur une courbe elliptique



Addition sur une courbe elliptique



Addition sur une courbe elliptique

Théorème

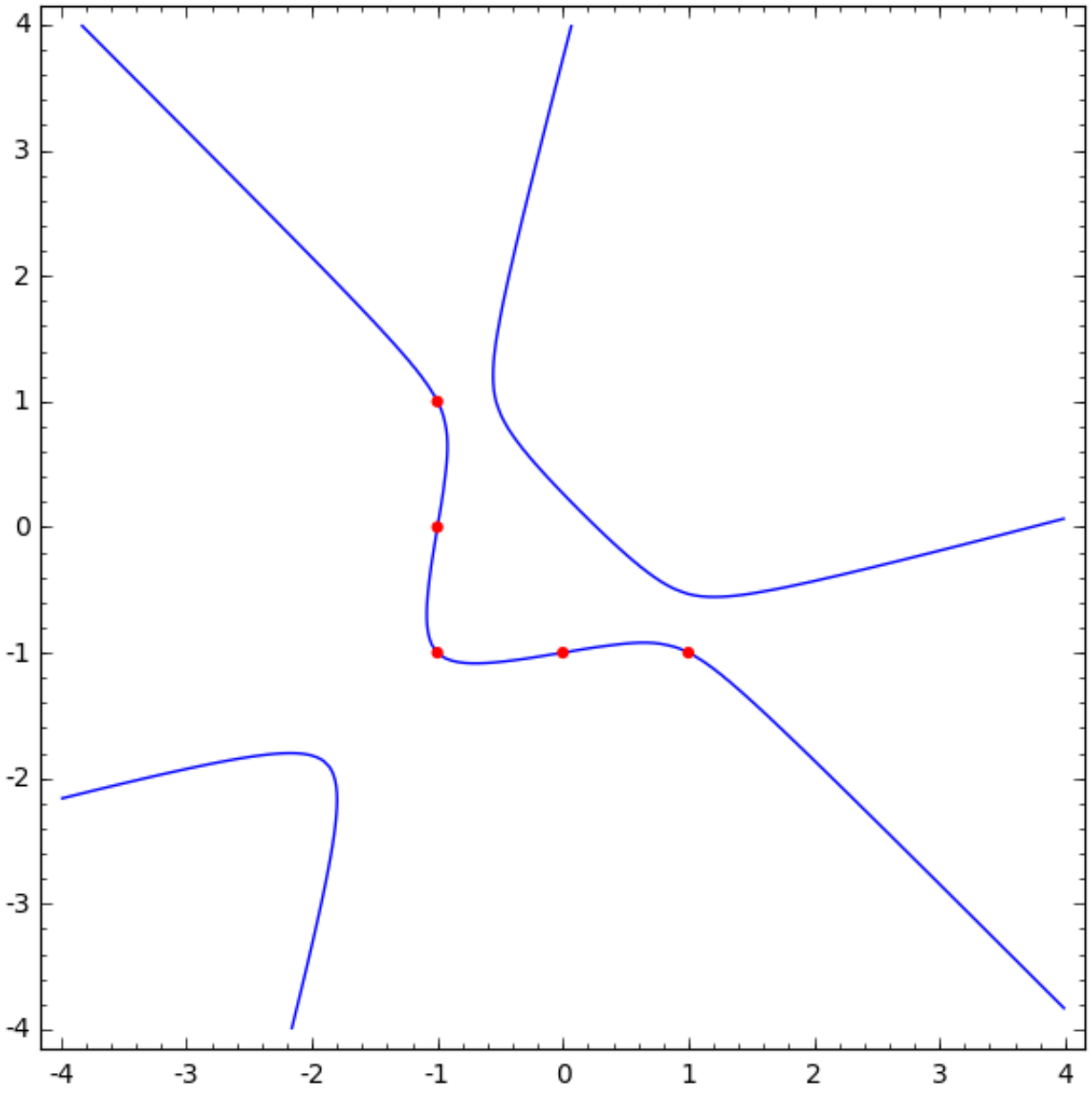
Soit $\mathcal{E}$ une courbe elliptique. Les règles précédentes permettent de définir la somme de 2 points de $\mathcal{E}$, et l'« addition sur la courbe » possède les propriétés usuelles de l'addition.

Fabriquer de nouvelles solutions ?

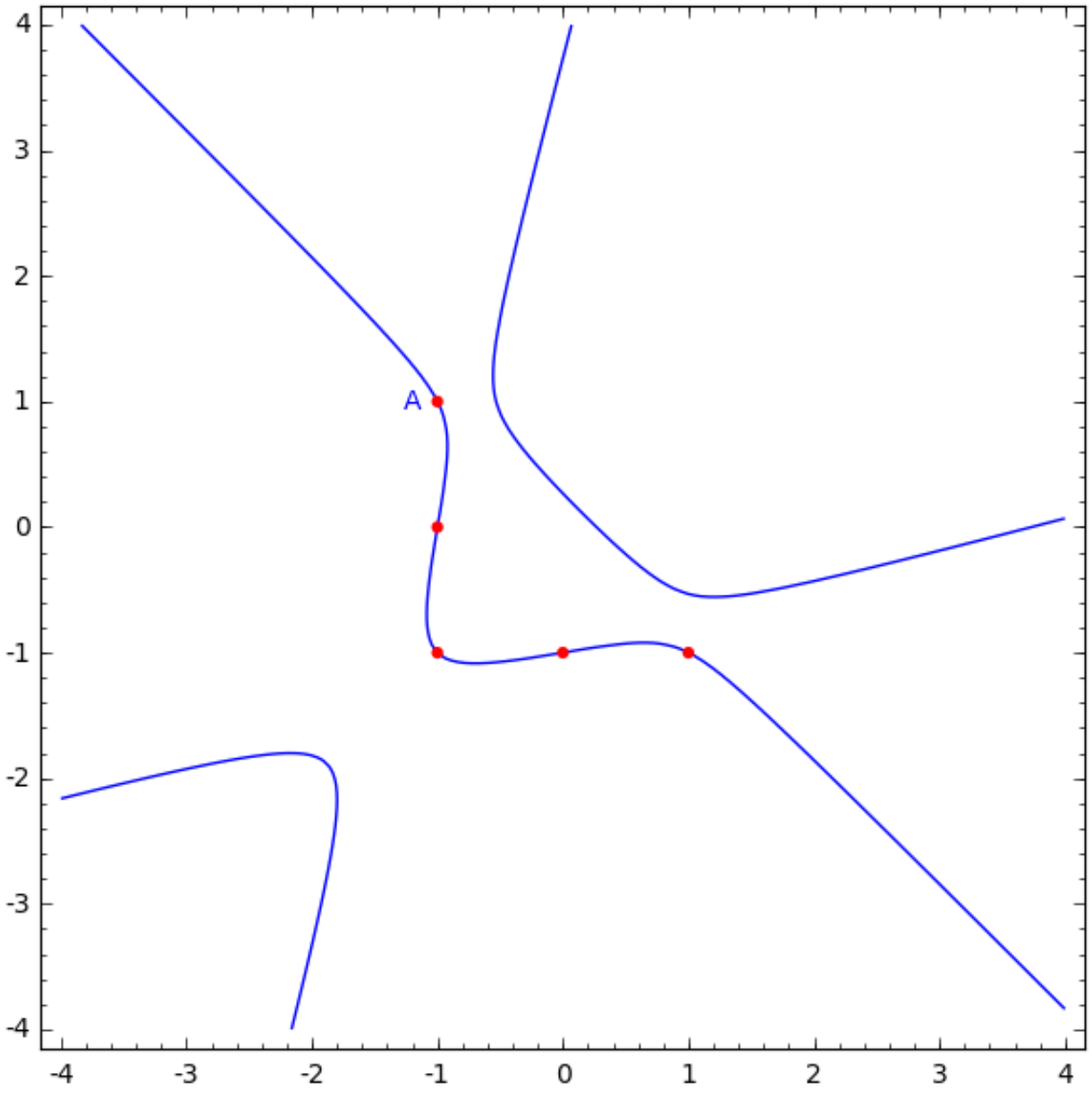
Théorème

Si A et B sont des points à coordonnées rationnelles sur $\mathcal{E}$, alors $A + B$ aussi.

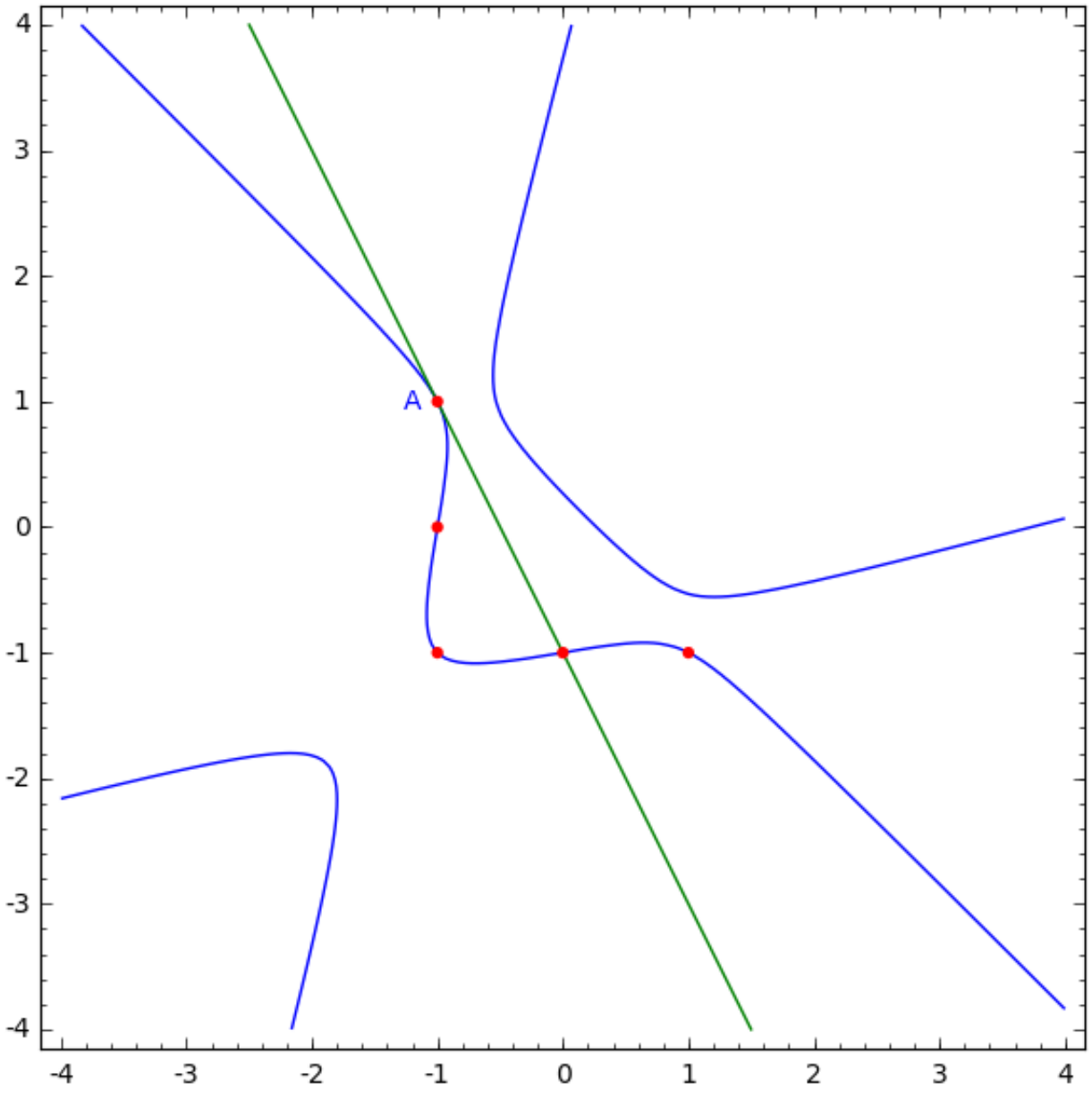
Fabriquer de nouvelles solutions ?



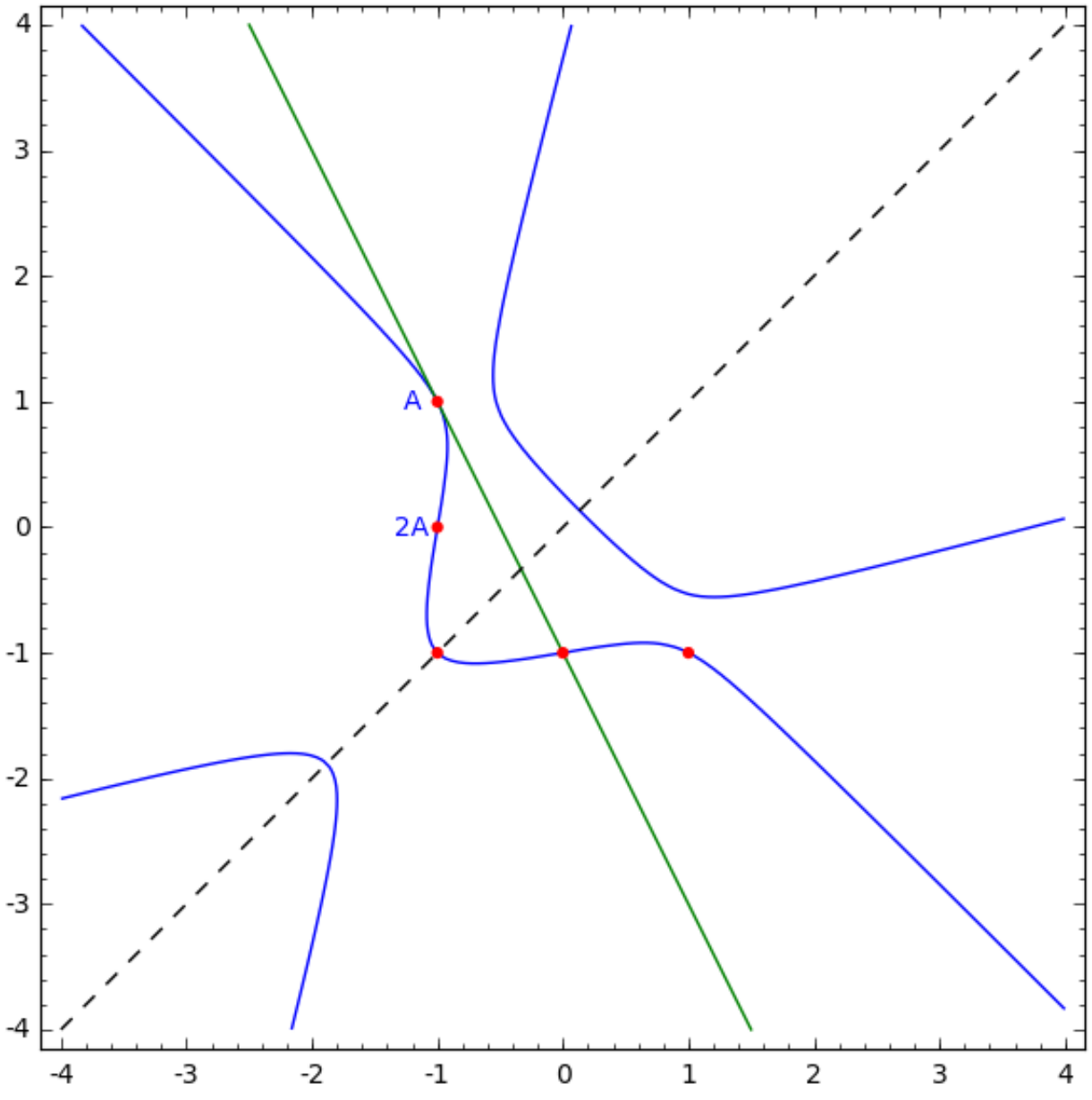
Fabriquer de nouvelles solutions ?



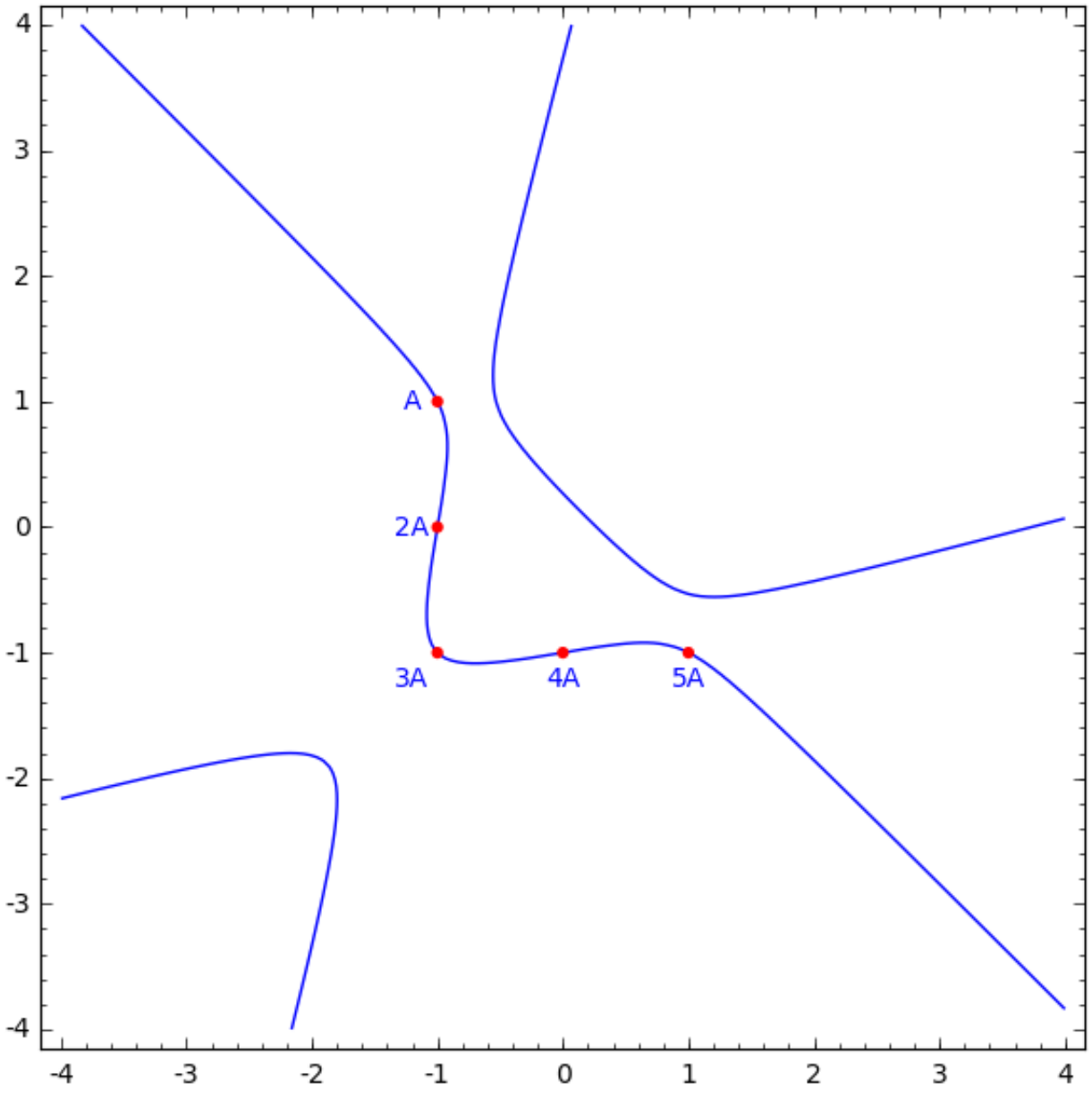
Fabriquer de nouvelles solutions ?



Fabriquer de nouvelles solutions ?



Fabriquer de nouvelles solutions ?



De nouvelles solutions

Algorithme de recherche de solutions *pas nécessairement positives*

pour $-15 < i \leq -1$
  pour $-15 < j \leq -1$
    pour $1 \leq k < 15$
      si $E(i,j,k) = 0$:
        afficher (i,j,k)

De nouvelles solutions

Algorithme de recherche de solutions *pas nécessairement positives*

pour $-15 < i \leq -1$
  pour $-15 < j \leq -1$
    pour $1 \leq k < 15$
      si $E(i,j,k) = 0$:
        afficher (i,j,k)

Temps de calcul : 0.4s

De nouvelles solutions

Algorithme de recherche de solutions *pas nécessairement positives*

pour $-15 < i \leq -1$
  pour $-15 < j \leq -1$
    pour $1 \leq k < 15$
      si $E(i,j,k) = 0$:
        afficher (i,j,k)

Temps de calcul : 0.4s
18 réponses : les $(-a,-a,a)$ pour $1 \leq a < 15$...

De nouvelles solutions

Algorithme de recherche de solutions *pas nécessairement positives*

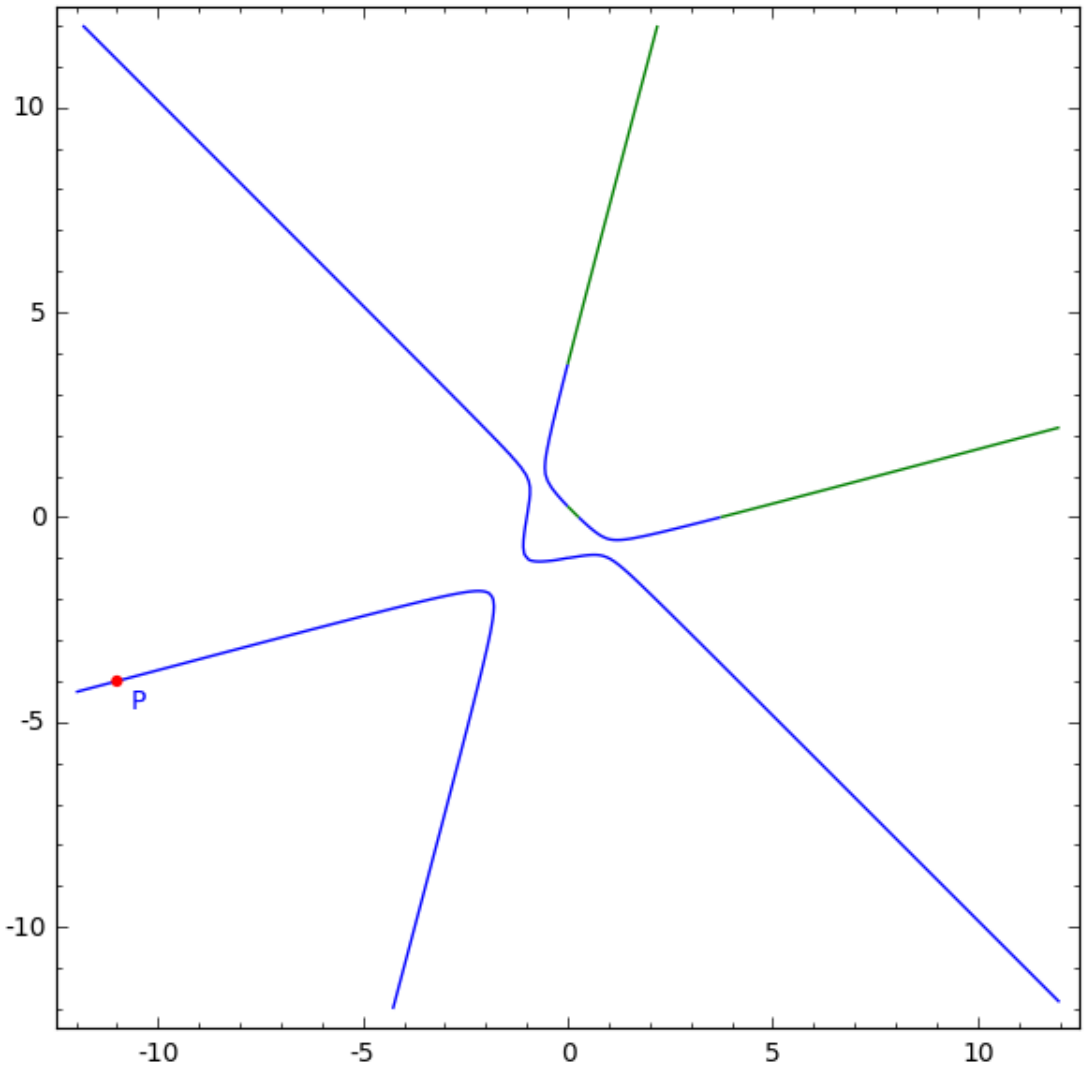
pour $-15 < i \leq -1$
  pour $-15 < j \leq -1$
    pour $1 \leq k < 15$
      si $E(i,j,k) = 0$:
        afficher (i,j,k)

Temps de calcul : 0.4s
18 réponses : les $(-a,-a,a)$ pour $1 \leq a < 15$... et 4 autres :

$$(-4,-11,1),\ (-11,-4,1),\ (-11,-9,5),\ (-9,-11,5)$$

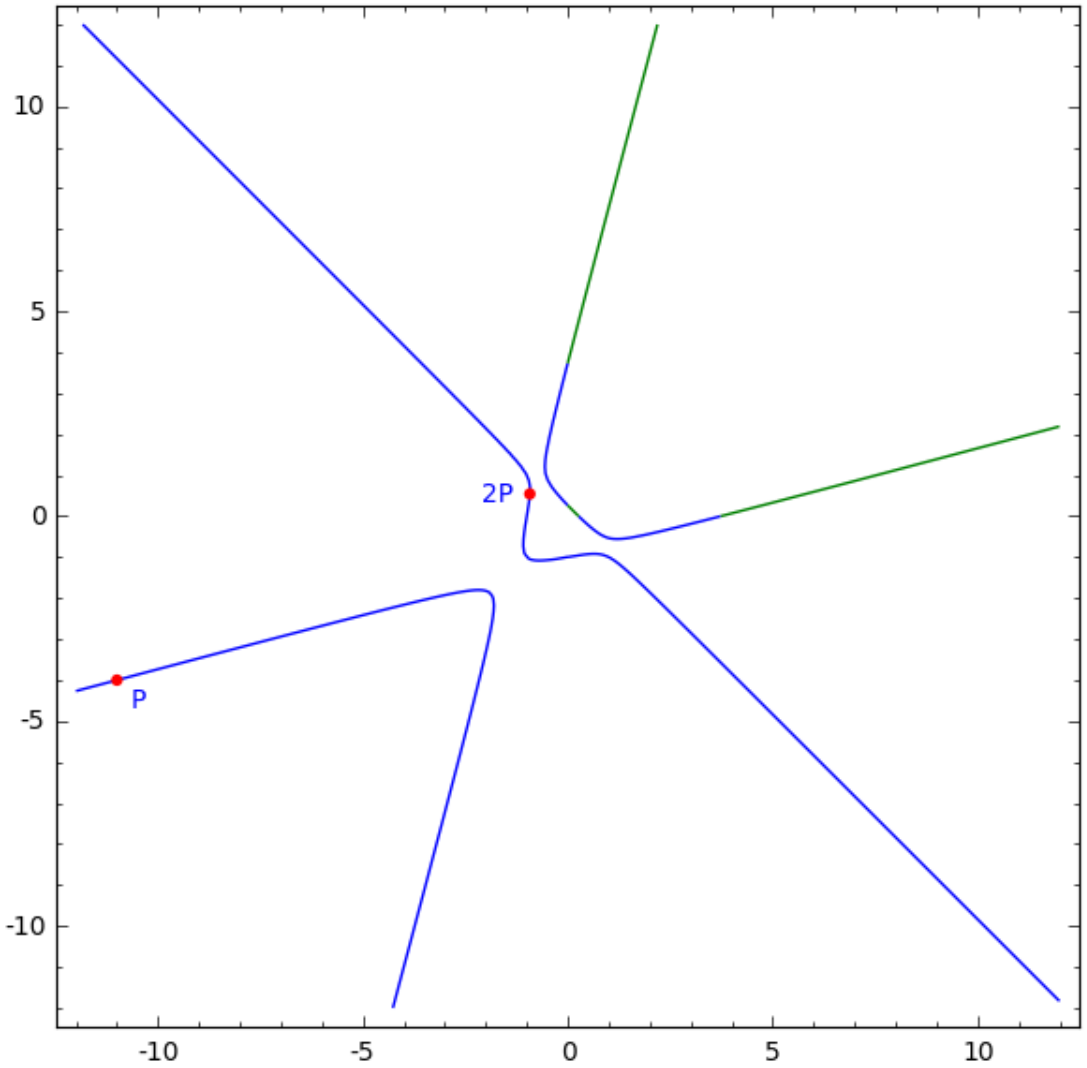
Beaucoup de solutions

$$P : x = -4,\ y = -11$$



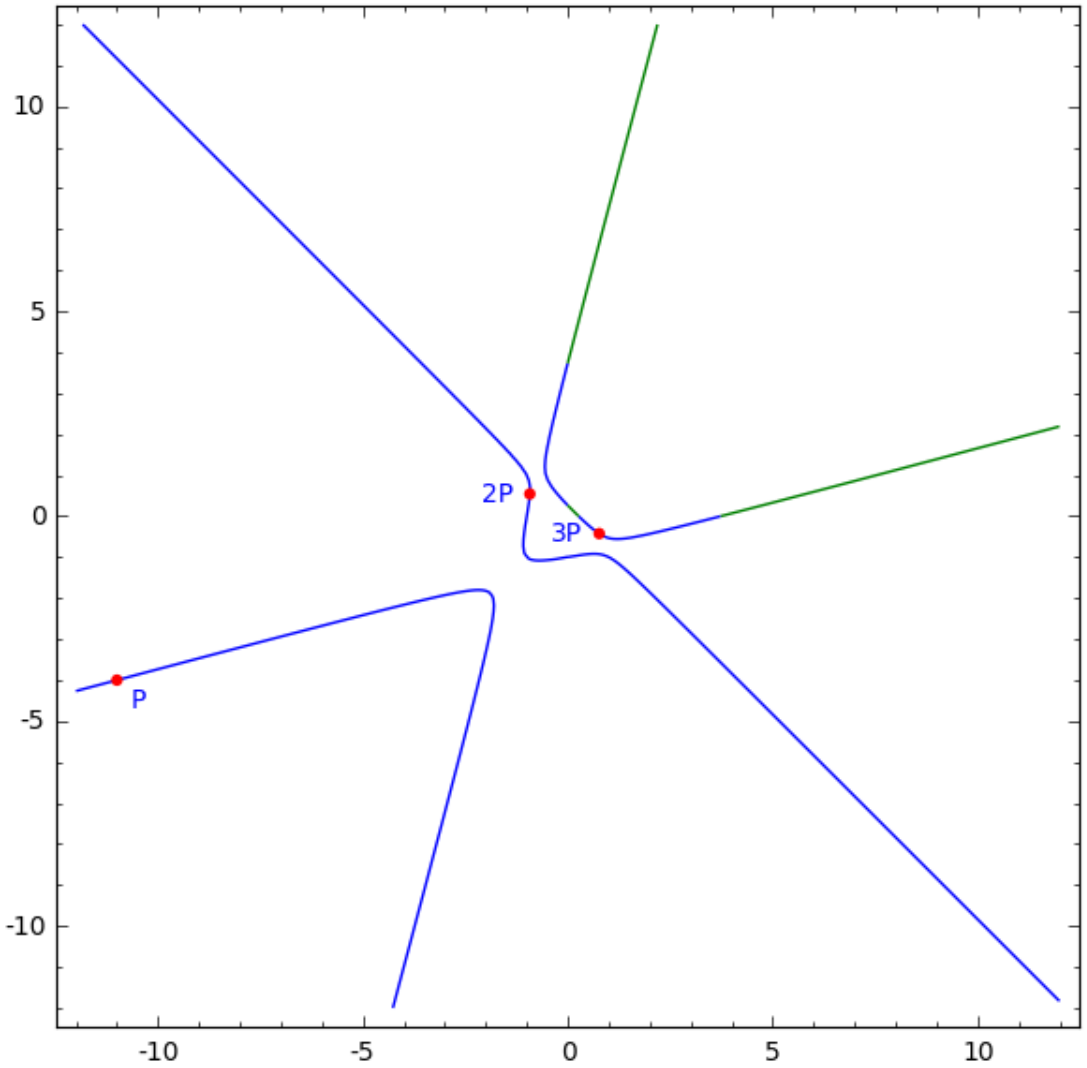
Beaucoup de solutions

$$2P : x = -\frac{8784}{9499},\ y = \frac{5165}{9499}$$



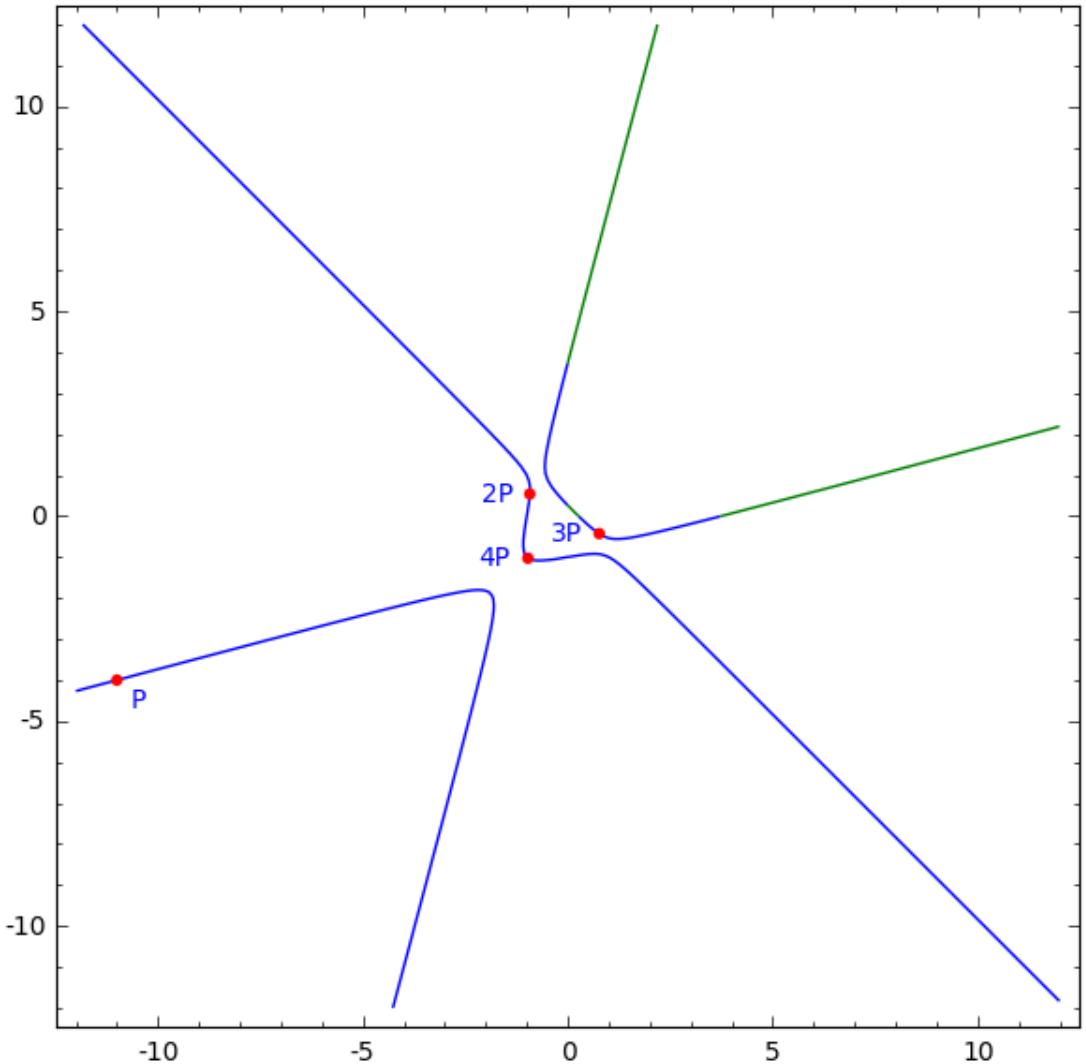
Beaucoup de solutions

$$3P : x = \frac{679733219}{883659076},\ y = -\frac{375326521}{883659076}$$



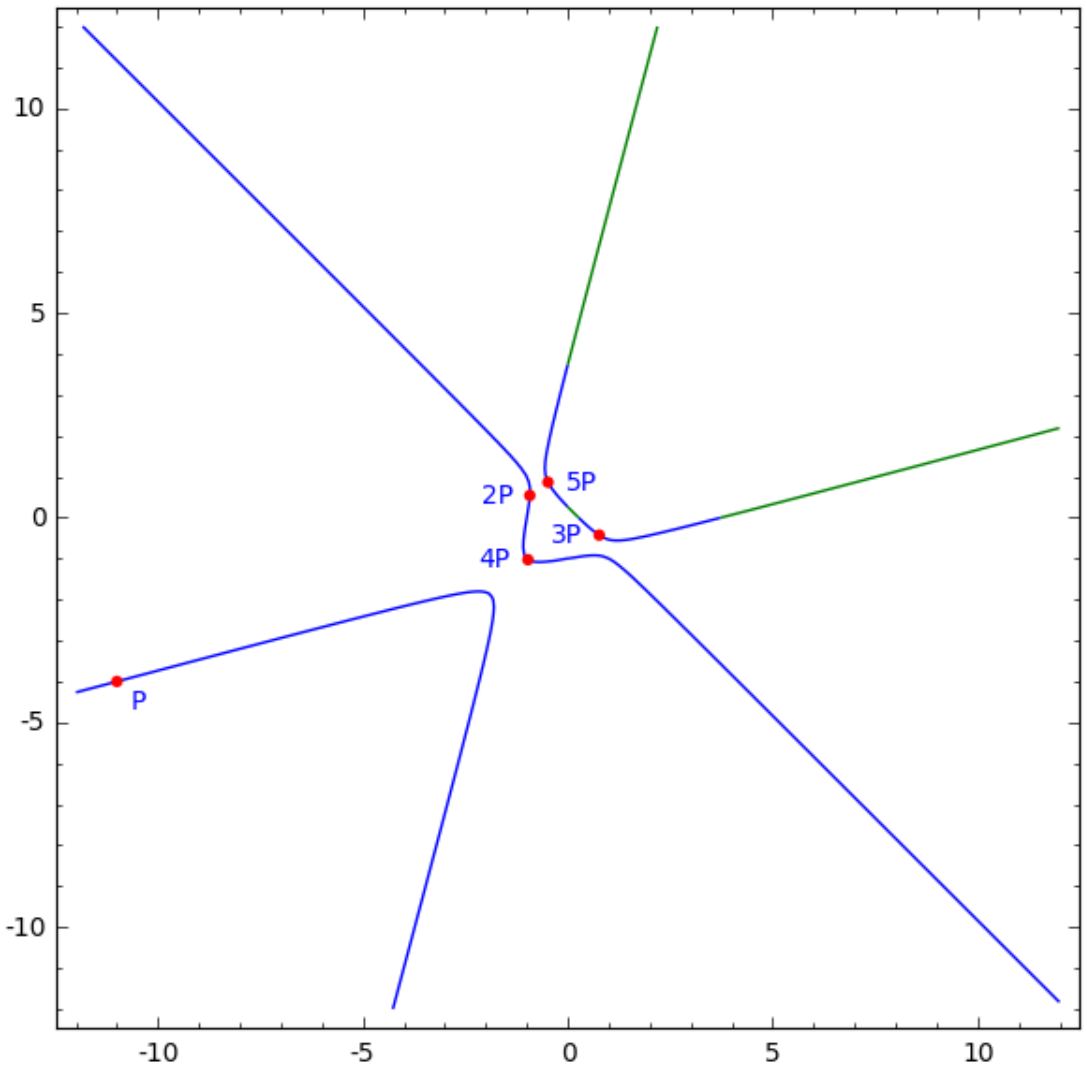
Beaucoup de solutions

$$4P : x = -\frac{6334630576523495}{6531563383962071},\ y = -\frac{6696085890501216}{6531563383962071}$$



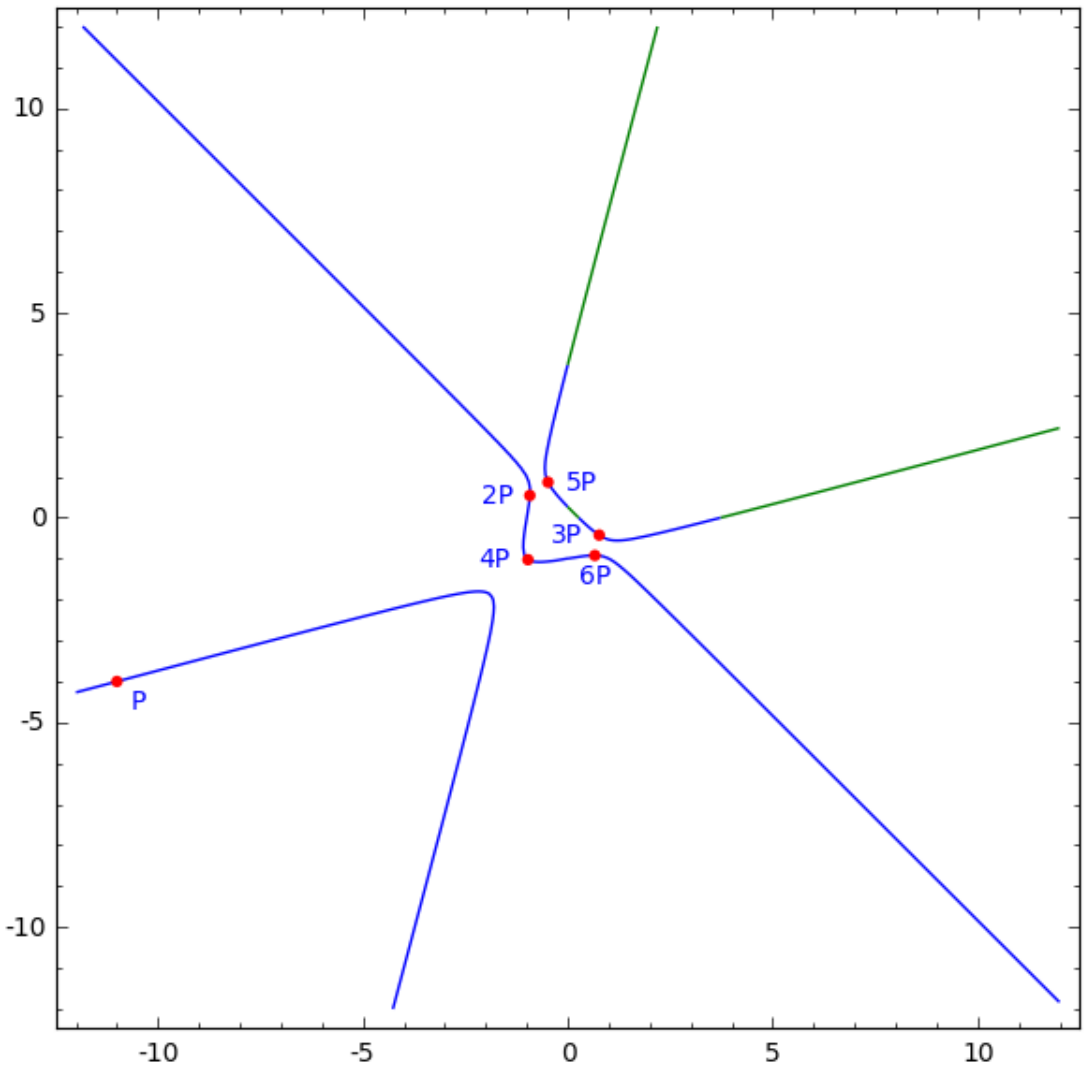
Beaucoup de solutions

$5P$: x, y ont des numérateurs et dénominateurs à 25 chiffres.



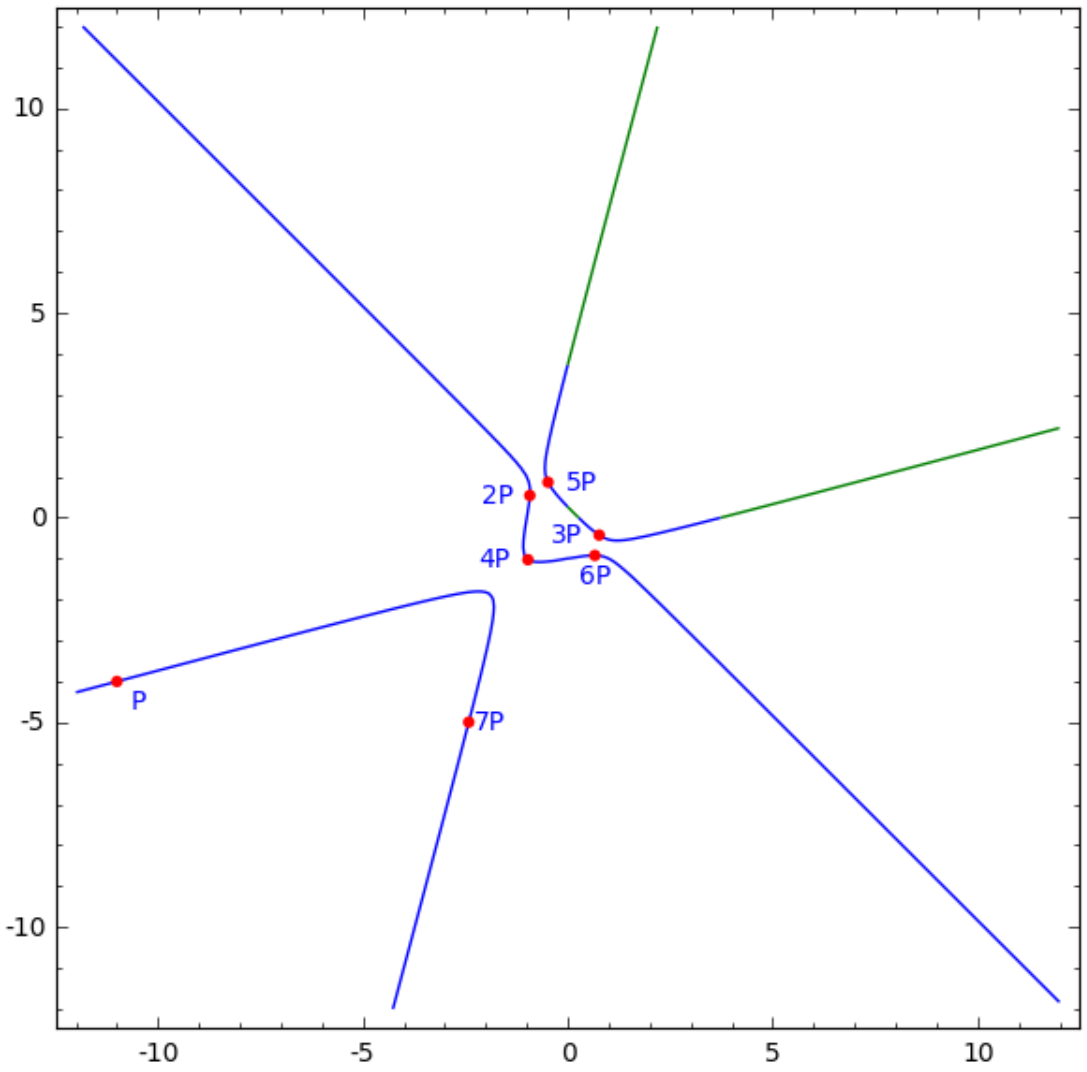
Beaucoup de solutions

$6P$: x, y ont des numérateurs et dénominateurs à 35 chiffres.



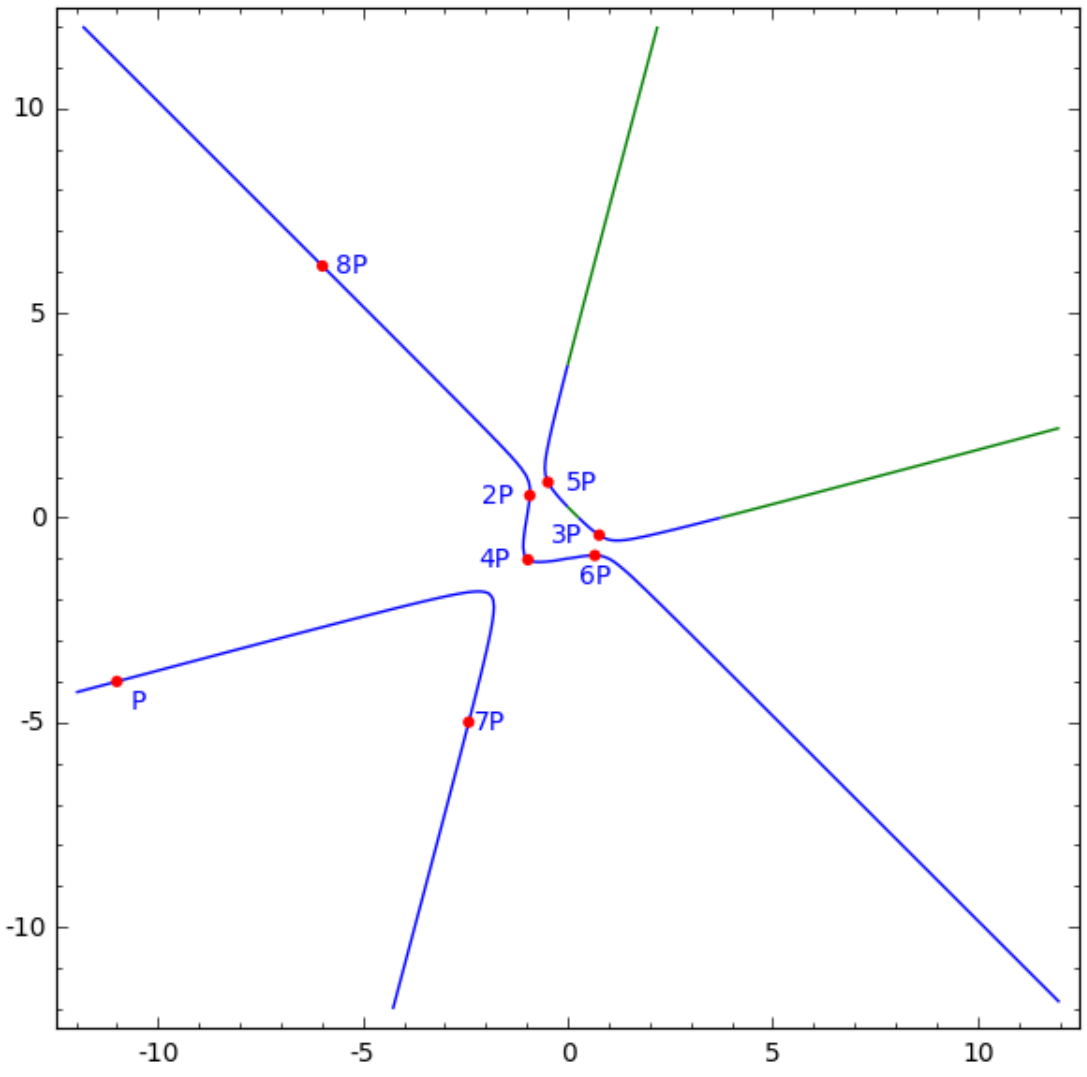
Beaucoup de solutions

$7P$: x, y ont des numérateurs et dénominateurs à 48 chiffres.

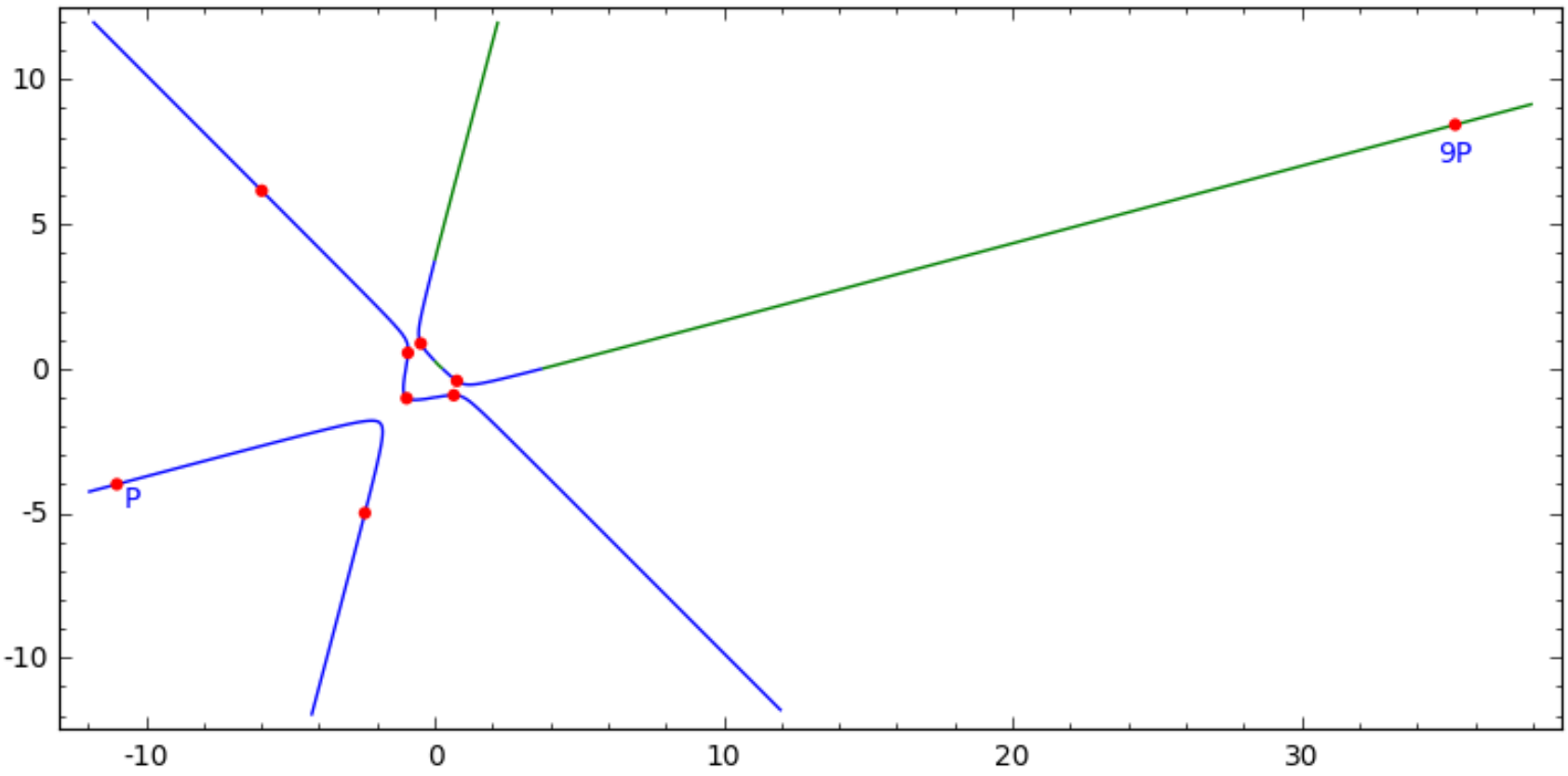


Beaucoup de solutions

$8P$: x, y ont des numérateurs et dénominateurs à 64 chiffres.



Et voilà une solution positive !



Et voilà une solution positive !

$$
\begin{aligned}
x &= 154476802108746166441951315019919837485664325669565431700026634898253202035277999 \\
y &= 368751317941299998271978115652254748254929799689719709962831374716372246340555 79 \\
z &= 437361267792869725786125260237139015281653755816161361862143799337842346777 2036
\end{aligned}
$$

Et voilà une solution positive !

$$x = 154476802108746166441951315019919837485664325669565431700026634898253202035277999$$

$$y = 368751317941299998271978115652254748254929799689719709962831374716372246340555 79$$

$$z = 437361267792869725786125260237139015281653755816161361862143799337842346777 2036$$

Ils ont respectivement 81, 80, 79 chiffres (de l'ordre du nombre d'atomes dans l'Univers).

Et voilà une solution positive !

$$x = 154476802108746166441951315019919837485664325669565431700026634898253202035277999$$
$$y = 368751317941299998271978115652254748254929799689719709962831374716372246340555 79$$
$$z = 437361267792869725786125260237139015281653755816161361862143799337842346777 2036$$

Ils ont respectivement 81, 80, 79 chiffres (de l'ordre du nombre d'atomes dans l'Univers).
Il faudrait au moins 10^{200}s à l'ordinateur pour tester toutes les possibilités jusqu'à les trouver (bien plus que le temps écoulé depuis le *big bang*).

Et voilà une solution positive !

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{y+z} & \simeq & 3,745006... \\ \frac{y}{x+z} & \simeq & 0,232137... \\ \frac{z}{x+y} & \simeq & 0,022856... \end{array}$$

Et voilà une solution positive !

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{y+z} & \simeq & 3,745006... \\ \frac{y}{x+z} & \simeq & 0,232137... \\ \frac{z}{x+y} & \simeq & 0,022856... \\ \hline \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} & = & 4 \end{array}$$

Problèmes et applications des courbes elliptiques

- Liées au calcul des longueurs d'arcs d'ellipses
- Développement de la *géométrie arithmétique* (à partir du XXème siècle)
- Grand Théorème de Fermat (Wiles, 1994)
- Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer ($1,000,000)
- Cryptographie (sécurité des communications et transactions)