Questions proches du cours. Soit E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie, $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\{f_1, \dots, f_m\}$ une base de F. On note $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ et $\{f_1^*, \dots, f_m^*\}$ les bases duales correspondantes.

1. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\ell \in \{1, \dots, m\}$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire

$$\varphi_{k,\ell} : E \otimes F \to K$$

telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$\varphi_{k,\ell}(x \otimes y) = e_k^*(x) f_\ell^*(y)$$

2. Montrer que $\{e_i \otimes f_j,\ (i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}\}$ est une base de $E \otimes F$.

Exercice 1.

1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Rappeler la base de $\bigwedge^k E$ donnée par le cours en fonction des $e_1, \dots, e_n$.
2. Soit $L \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$. Déterminer la matrice de $\bigwedge^2 L$ dans la base $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ de $\bigwedge^2(\mathbf{R}^3)$.

Exercice 2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \colon \bigwedge^2 E \to E \otimes E$ telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = x \otimes y - y \otimes x$
2. Montrer que f est injective.
3. On note $g \colon E \otimes E \to \bigwedge^2 E$ la projection canonique. Montrer que $g \circ f = 2\,\mathrm{id}_{\bigwedge^2 E}$.
4. Retrouver le résultat de la question 2 lorsque K est de caractéristique différente de 2.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel, et soit N et I deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = I \oplus N$. On note

$$A := \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ telles que } N \subseteq \ker(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \subseteq I\}$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E stable par composition.
2. Si l'on note $\pi \colon E \to E/N$ la projection naturelle, montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E/N, I) & \to & A \\ g & \mapsto & g \circ \pi \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Pour un $f \in A$, on note $\overline{f} \in \mathcal{L}(E/N, I)$ l'élément qui lui correspond via l'isomorphisme ci-dessus.

3. Soit $f \in A$. Montrer que $\overline{f}$ est un isomorphisme si et seulement si $\ker(f) = N$ et $\mathrm{Im}(f) = I$. On note

$$G := \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ telles que } N = \ker(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) = I\}$$

4. Soit p le projecteur sur I parallèlement à N. Montrer que $p \in G$ et que $\overline{p}^{-1} = \pi_{|I}$.

Bonus :

---

5. (a) Fixons un $f_0 \in G$. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{GL}(E/N) \\ g & \mapsto & \overline{f_0}^{-1} \circ \overline{g} \end{array}$$

est une bijection.

(b) On choisit $f_0 = p$ dans la question 5.(a) et on note Φ l'isomorphisme obtenu. Montrer que pour tout $g, h \in G$, la composée $g \circ h$ appartient à G et

$$\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ \Phi(h)$$

Indication : on pourra utiliser la question 4.

6. En déduire que $(G, \circ)$ est un groupe, d'élément neutre p.