Agrégation Externe de Mathématiques 2026
Mathématiques Générales : proposition de corrigé

J. Le Borgne

I. Préliminaire

1. Notons $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_j = \begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$ et $v_{j^2} = \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$. En utilisant le fait que $j^3 = 1$, on obtient : $\boxed{J_3 v_1 = v_1,\ J_3 v_j = j v_j \text{ et } J_3 v_{j^2} = j^2 v_{j^2}}$. Comme la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & j & j^2\\1 & j^2 & j\end{pmatrix}$ dont les colonnes sont (v_1, v_j, v_{j^2}) est la matrice de Vandermonde associée à $(1, j, j^2)$ qui sont distincts, elle est inversible, donc (v_1, v_j, v_{j^2}) est une base de $\mathbf{C}^3$ formée de vecteurs propres de J_3 : cette matrice est diagonalisable. Explicitement, on a $P^{-1} J_3 P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & j & 0\\0 & 0 & j^2\end{pmatrix}$.

II. Premiers exemples

2. La matrice K_n est symétrique à coefficients réels. D'après le théorème spectral, K_n est diagonalisable en base orthonormée : il existe D diagonale et P orthogonale telles que $\boxed{K_n = PDP^T}$.

3. Par définition, $\chi_{K_n} = \det(XI_n - K_n) = \det(XI_n - nI_n + U_{n,n}) = \chi_{-U_{n,n}}(X - n)$. Or la matrice $-U_{n,n}$, dont tous les coefficients sont égaux à -1, est manifestement de rang 1, donc $\dim\ker(-U_{n,n}) = n - 1$ d'après le théorème du rang. De plus, le vecteur $U_{n,1}$ est vecteur propre de $-U_{n,n}$ associé à la valeur propre $-n$. Comme $(n-1)+1 = n$ on en déduit que les valeurs propres de $-U_{n,n}$ sont 0 avec multiplicité $n-1$ et $-n$ avec multiplicité 1, de sorte que $\chi_{-U_{n,n}} = X^{n-1}(X+n)$ et donc $\boxed{\chi_{K_n} = X(X-n)^{n-1}}$.

4. Comme la multiplicité de 0 comme racine de χ_{K_n} est 1, $\dim\ker K_n = 1$. On a donc $\ker K_n = \mathrm{Vect}(U_{n,1})$. Comme K_n est symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux (conséquence du théorème spectral) et donc

$$\boxed{\ker(K_n - nI_n) = \{U_{n,1}\}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \text{ t.q. } \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.}$$

Ce sous-espace propre (que l'on notera E_n) est de dimension $n-1$, qui est le cardinal de la famille b, il suffit donc de démontrer que b est une famille libre d'éléments de E_n. Déjà, $b_i = e_i - e_1 \in E_n$ car la somme de ses coordonnées en base canonique est nulle. Supposons $0 = \sum_{i=2}^n \lambda_i(e_i - e_1) = -(\lambda_2 + \cdots + \lambda_n)e_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i$. Par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$, on a $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille b est bien une base de E_n.

5. Soit $(x_1, \ldots, x_k)$ une famille libre d'éléments d'un espace euclidien E. Alors il existe une unique famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$ telle que :

— $\forall 1 \leq i \leq k$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_i)$;
— $\forall 1 \leq i \leq k$, $\langle e_i, x_i \rangle > 0$.

Explicitement, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est construite par récurrence en définissant pour $i \geq 1$: $\boxed{v_i = x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle x_i, e_j \rangle e_j, \text{ puis } e_i = v_i / \|v_i\|}$.

6. La méthode proposée aboutit à la formule suivante :

$$\boxed{\forall 2 \leq i \leq n,\ e'_i = \sqrt{\frac{i-1}{i}} \left(e_i - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} e_j \right) = \frac{1}{\sqrt{i}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{i-1}} \\ \vdots \\ -\frac{1}{\sqrt{i-1}} \\ \sqrt{i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

Ainsi, en prenant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & nI_{n-1} \end{pmatrix}$, et P la matrice dont les colonnes sont $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} U_{n,1}$ et $(e'_2, \ldots, e'_n)$, on a par construction $P \in O_n(\mathbf{R})$ et $P^T K_n P = D$, c'est-à-dire $\boxed{K_n = PDP^T}$.

7. On retranche la première ligne à chacune des lignes suivantes de la matrice dont on cherche à calculer le déterminant. On obtient $\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & & U_{1,n-1} & & \\ 0 & X-2 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & X-2 & \cdots & -1 \\ \vdots & -1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & X-2 \end{vmatrix}$. On reconnaît dans le bloc en bas à droite la matrice $(X-n)I_{n-1} + K_{n-1}$. Le calcul par blocs donne alors $\delta_n = (-1)^{n-1} \chi_{K_{n-1}}(-X+n) = (-1)^{n-1}(-X+n)(-X+n-n+1)^{n-2} = \boxed{(X-n)(X-1)^{n-2}}$.

8. Par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne, on a $\det(XI_n - S_n) = \begin{vmatrix} X-n & U_{1,n-1} \\ 0 & (X-1)I_{n-1} \end{vmatrix} + \delta_n = (X-n)(X-1)^{n-1} + (X-n)(X-1)^{n-2} = \boxed{(X-n)(X-1)^{n-2}}$.

Ainsi, les valeurs propres de S_n sont 0 et n (avec multiplicité 1) et 1 (avec multiplicité $n-2$).

III. Graphes

9. La relation $\leftrightarrow$ est :
— réflexive : soit $x \in S$, alors (x) est un chemin de x à x par définition (avec $p = 0$) ;
— symétrique : si $(z_0, z_1, \ldots, z_p)$ est un chemin de x à y, alors $(z_p, \ldots, z_0$ est une chemin y à x par symétrie de la relation $\sim$;
— transitive : soient $x, y, z \in S$ tels que $x \leftrightarrow y$ et $y \leftrightarrow z$. On dispose d'un chemin x à y : $(x_0, \ldots, x_p)$ avec $x_0 = x$ et $x_p = y$; et d'un chemin y à z : $(y_0, \ldots, y_q)$ avec $y_0 = y$ et $y_q = z$. Alors la suite $(x_0, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ est un chemin x à z.

10. L'application d est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

Soit $x \in S$. Alors (x) est un chemin de x à x donc $d(x,x) = 0$. De plus, si $d(x,y) = 0$ alors (x) est un chemin de x à y, donc $x = y$: on a bien $\boxed{d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y}$.

Enfin, on a vu à la question précédente que si $(x_0, \ldots, x_p)$ et $(y_0, \ldots, y_q)$ sont des chemins respectifs de x à y et y à z de longueur minimale, alors $(x_0, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ est un

chemin de x à z de longueur $p+q$. On a donc bien l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leq p+q = d(x,y)+d(y,z)$.

11. Soit $x \in S$, alors le singleton $\{x\} = B(x,1/2)$ est une boule ouverte. En particulier, toute union de singletons est un ouvert, et donc les ouverts de S sont les parties de S (c'est-à-dire que la topologie est discrète). En particulier, toute fonction définie sur S à valeurs dans un espace topologique est continue (l'image réciproque d'un ouvert est une partie de S, donc un ouvert de S).

IV. Laplacien

12. Comme tout sommet a un nombre fini de voisins, la somme $\sum_{\substack{y\in S\\ y\sim x}} f(y)$ est bien définie pour tout $x \in S$, donc $\Delta f(x)$ est bien défini pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in S$. Par définition, $\Delta f \in E$ pour tout $f \in E$. Enfin, la formule définissant Δf dépend linéairement de la variable f, donc Δ est bien un endomorphisme de E.
Soit $f \in E$ constante égale à $a \neq 0$, et soit $x \in S$; alors $\Delta f(x) = \deg(x)a - \sum_{y\in S, y\sim x} a = 0$. On a $\Delta(f) = 0$, donc f est harmonique : le noyau de Δ contient les fonction constantes, donc l'endomorphisme Δ est non injectif.

13. a) Soit $u \in E$ harmonique. On a $u(0) - u(1) = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u(n+1) - u(n) = u(n) - u(n-1)$. Une récurrence sur n montre alors immédiatement que la fonction u est constante. Ainsi, $\ker \Delta$ est la droite vectorielle des fonctions constantes.
Soit $v \in E$, définissons u par la relation de récurrence (double) suivante : $u(0) = 0$, $u(1) = -v(0)$ et pour tout $n \geq 1$, $\boxed{u(n+1) = -v(n) + 2u(n) - u(n-1)}$. Alors $\Delta u(0) = u(0) - u(1) = v(0)$, et pour tout $n \geq 1$, $\Delta u(n) = 2u(n) - u(n+1) - u(n-1) = v(n)$. Ainsi, $\boxed{\Delta u = v}$, et Δ est surjectif.

b) La fonction $u \in E$ est harmonique si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $u(n) - u(n+1) = u(n-1) - u(n)$. Ainsi, u est harmonique si et seulement si c'est une suite arithmétique : les fonctions harmoniques sont les applications de la forme $n \mapsto an + b$, $a, b \in \mathbf{R}$.
Soit $v \in E$, on peut définir par récurrence $u_+ : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ par $u_+(0) = 0$, $u_+(1) = -v(0)$ et $u_+(n+1) = -v(n) + 2u_+(n) - u_+(n-1)$. De même, on peut définir par récurrence u_- par $u_-(0) = 0$, $u_-(1) = -v(-1)$ et $u_-(n+1) = -v(-n) + 2u_-(n) - u_-(n-1)$.
Pour $n \in \mathbf{Z}$, on pose alors $u(n) = \begin{cases} u_+(n) & \text{si } n \geq 0 \\ u_-(-n) & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbf{Z}$ car $u_+(0) = u_-(0)$ (et car $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup (-\mathbf{N})$ et $\mathbf{N} \cap (-\mathbf{N}) = \{0\}$). Par construction, elle vérifie $\boxed{\Delta u = v}$, donc Δ est surjectif.

14. Si S est fini, alors pour tout $f \in E$, $\sum_{x\in S} f(x)^2$ est la somme d'un nombre fini de termes, donc finie. Réciproquement, si S est infini, alors la fonction $f \in E$ constante égale à 1 n'est pas dans H car $\sum_{x\in S} 1 = +\infty$. Donc $H = E$ si et seulement si S est infini.

15. Soit $f \in H$. Posons $\boxed{r(x) = \sum_{y\sim x} f(y)}$, de sorte que $\Delta f(x) = \deg(x) f(x) - r(x)$, pour tout $f \in E$ et $x \in S$. Par hypothèse, pour tout $x \in S$ et $f \in E$, on a $|\deg(x) f(x)| \leq K|f(x)|$ de sorte que, si $f \in H$, H étant un sous-espace vectoriel, $\Delta f \in H$ si et seulement si $r \in H$.
Supposons donc $f \in H$ et démontrons que $r \in H$. Soit $x \in S$, alors

$$|r(x)|^2 = \left| \sum_{\substack{y\in S\\ y\sim x}} f(y) \right|^2 \leq \sum_{\substack{y\in S\\ y\sim x}} |f(y)|^2 \sum_{\substack{y\in S\\ y\sim x}} 1^2$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée dans l'espace des fonctions sur l'ensemble des voisins de x, muni de sa structure euclidienne canonique). On en déduit que pour tout

$x \in S$, $\boxed{|r(x)|^2 \leq K \sum_{y\sim x} |f(y)|^2}$.

On majore alors $\sum_{x\in S} |r(x)|^2 \leq K \sum_{x\in S} \sum_{y\sim x} |f(y)^2|$. Comme la somme est à termes positifs, on peut réécrire :

$$\sum_{x\in S} |r(x)|^2 \leq K \sum_{y\in S} \sum_{x\in S, y\sim x} |f(y)|^2 \leq K^2 \|f\|_2 < +\infty.$$

Cela montre que $r \in H$ (avec $\|r\|_2 \leq K\|f\|_2$) et donc que $\Delta f \in H$ (avec $\boxed{\|\Delta f\|_2 \leq 2K\|f\|_2}$.

16. La dernière inégalité de la question précédente montre que Δ_H est continu et $\boxed{\|\Delta_H\| \leq 2K}$.

17. Soient $f, g \in H$. Soit $a \in A$: on peut écrire $a = \{x, y\}$ avec $x, y \in S$. Pour $a = \{x, y\} \in A$, la valeur de $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$ est indépendante de l'ordre dans lequel on considère les extrémités x et y de a : $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) = (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))$. On peut donc considérer l'application $A \to \mathbf{R}$ définie par $a = \{x, y\} \mapsto (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.
Nous allons montrer la sommabilité de cette famille.
En vertu de l'identité $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\left[(a + b)^2 + (a - b)^2\right]$, on a pour tout $(x, y) \in A$,

$$\boxed{|f(x) - f(y)|^2 \leq 2(|f(x)|^2 + |f(y)|^2)}.$$

Or, pour tout $x \in S$, il y a au plus K arêtes de la forme (x, y) (qui sont les mêmes que les arêtes de la forme (y, x)). On a donc $\sum_{(x,y)\in A} |f(x)|^2 \leq K \sum_{x\in S} |f(x)|^2 = K\|f\|_2^2$. Par suite, $\boxed{\sum_{(x,y)\in A} |f(x) - f(y)|^2 \leq 2K\|f\|_2^2}$. L'application $(x, y) \mapsto |f(x)-f(y)|$ est donc bien définie sur A et de carré sommable ; il en est de même pour $(x, y) \mapsto |g(x) - g(y)|$, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\boxed{\sum_{(x,y)\in A} |f(x) - f(y)||g(x) - g(y)| \leq K\|f\|_2\|g\|_2}$. En particulier, la sommabilité voulue est démontrée, et la somme $\sum_{(x,y)\in A}(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))$ est bien définie.
Il nous reste à démontrer la formule $\langle f, \Delta_H g\rangle = \sum_{(x,y)\in A}(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$. On a par définition $\langle f, \Delta_H g\rangle = \sum_{x\in S} \sum_{y\in S, y\sim x} f(x)(g(x) - g(y))$. On permute les sommes (la deuxième est finie avec au plus K termes) : $\langle f, \Delta_H g\rangle = \sum_{y\in S} \sum_{x\in S, x\sim y} f(x)(g(x) - g(y))$. Avec le changement de variable $x \leftrightarrow y$, on obtient $\langle f, \Delta_H g\rangle = \sum_{x\in S} \sum_{y\in S, y\sim x} f(y)(g(y) - g(x))$. On en déduit par sommation que :

$$\boxed{\langle f, \Delta_H g\rangle = \frac{1}{2} \sum_{x\in S} \sum_{y\in S, y\sim x} (f(x) - f(y))(g(y) - g(x)) = \sum_{(x,y)\in A} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))}.$$

L'expression du membre de droite est manifestement symétrique en f et g, ce qui démontre que $\boxed{\langle f, \Delta_H g\rangle = \langle \Delta_H f, g\rangle}$: Δ_H est autoadjoint.

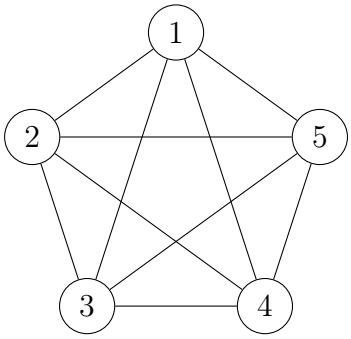
V. Cas fini

18. L'espace E est de dimension finie et Δ est un endomorphisme de E. On sait d'après (12.) que Δ est non injectif, il est donc non surjectif d'après le théorème du rang.
Comme S est fini, $E = H$ d'après (14.) et $\Delta = \Delta_H$ est donc autoadjoint d'après (17.). Donc Δ est diagonalisable d'après le théorème spectal.

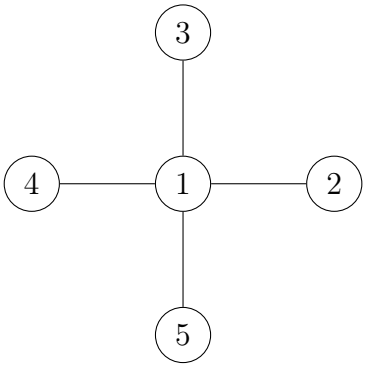
19. Soit $f \in H$. Comme S est fini, on dispose de $x \in S$ tel que $\boxed{f(x) = \max_{y \in S} f(y)}$. Par harmonicité de f, on a $\deg(x) f(x) = \sum_{y \sim x} f(y) \leq \deg(x) f(x)$, et cette inégalité est stricte s'il existe $y \sim x$ tel que $f(y) < f(x)$. Donc pour tout y voisin de x, $f(y) = f(x)$. Ceci étant valable pour tout z tel que $f(z) = f(x)$, la fonction f est constante le long de tous les chemins partant de x. Comme Γ est connexe, f est constante. Donc $\ker \Delta$ est la droite vectorielle des fonctions constantes.

20. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(\Delta)$ est un hyperplan de E. De plus, si $g \in E$, $\langle \Delta g, 1 \rangle = \langle g, \Delta 1 \rangle = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta) \subset 1^\perp = \left\{ f \in E \text{ t.q. } \sum_{x \in S} f(x) = 0 \right\}}$. Comme $1^\perp$ est un hyperplan, on a l'égalité par égalité des dimensions.

21. Le graphe suivant a pour matrice laplacienne K_5 :



Le graphe suivant a pour matrice laplacienne S_5 :



22. La matrice laplacienne de ce graphe est $C_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $J_n^{-1} = J_n^T$ car J_n est une matrice de permutation. Vu la forme de C_n, on a $\boxed{C_n = 2I_n - J_n - J_n^{-1}}$.

23. Il suffit de démontrer que pour toute racine n-ème de l'unité ω, le vecteur $v_\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$

est un vecteur propre de C_n. Or $\underline{C_n v_\omega} = \begin{pmatrix} 2-\omega-\omega^{-1} \\ 2\omega-\omega^2-1 \\ \vdots \\ 2\omega^{n-1}-\omega^{-n-2}-1 \end{pmatrix} = \underline{(2-\omega-\omega^{-1})v_\omega}$. Donc v_ω est bien un vecteur propre de C_n associé à la valeur propre $2-\omega-\omega^{-1}$.

24. La famille des $(v_{\omega_n^p})_{0\leq p\leq n-1}$ est une famille de n vecteurs propres de C_n, et cette famille est libre car le déterminant de Vandermonde $V(1,\omega_n,\ldots,\omega_n^{n-1})$ est le déterminant de la matrice de cette famille de vecteurs dans la base canonique, et est non nul car les $(\omega_n^p)_{0\leq p\leq n-1}$ sont deux à deux distincts. C'est donc une base de vecteurs propres de C_n dans $\mathbf{C}^n$.
Les valeurs propres de C_n sont donc -1 avec multiplicité 1 (associée au vecteur propre v_1) et les $2-\omega_n^p-\omega_n^{-p} = \boxed{2\left(1-\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)\right)}$ pour $0\leq p\leq (n-1)/2$, avec multiplicité 2 (associés aux vecteurs propres $v_{\omega_n^{\pm p}}$). De plus, si n est pair, 4 est valeur propre de multiplicité 1 (associée au vecteur propre v_{-1}).

25. On a $L_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit x un vecteur propre de C_{2n} associé à la valeur propre α. On suppose que $x_{n+1}=x_n$ et $x_1=x_{2n}$. alors $L_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ -x_1+2x_2-x_3 \\ \vdots \\ -x_{n-2}+2x_{n-1}-x_n \\ -x_{n-1}+x_n \end{pmatrix}$.
Par définition de x, pour tout $2\leq i\leq n-1$, $\boxed{-x_{i-1}+2x_i-x_{i+1}=\alpha x_i}$. De plus, $\underline{x_1-x_2} = x_1-x_2+(x_1-x_{2n}) = -x_{2n}+2x_1-x_2 = \underline{\alpha x_1}$. de même, $\underline{-x_{n-1}+x_n} = -x_{n-1}+2x_n-x_{n+1} = \underline{\alpha x_n}$. On obtient donc $\boxed{L_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$.
Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de L_n associé à la valeur propre 0. Démontrons maintenant que pour chaque valeur propre $\alpha = 2-\omega-\omega^{-1}$ de C_{2n} (où ω est une racine $2n$-ème de l'unité différente de 1 et -1), on peut trouver dans $\mathrm{Vect}\{v_\omega, v_{\omega^{-1}}\}$ un vecteur vérifiant les conditions $x_1=x_{2n}$ et $x_n=x_{n+1}$. Pour $x=\lambda v_\omega+\mu v_{\omega^{-1}}$, on a $x_1=\lambda+\mu$, $x_{2n}=\lambda\omega^{-1}+\mu\omega$, $x_n=\lambda\omega^{n-1}+\mu\omega^{-n+1}$ et $x_{n+1}=\lambda\omega^n+\mu\omega^{-n}$. Ainsi, les conditions voulues sont remplies dès lors que $\boxed{\lambda+\mu=\lambda\omega+\mu\omega^{-1}}$. Ce système admet une solution non nulle, donc il existe $x\in\mathrm{Vect}\{v_\omega,v_{\omega^{-1}}\}$ non nul tel que $L_nx'=\alpha x'$. En particulier, les valeurs propres $2(1-\cos(\frac{p\pi}{n}))$ de C_{2n} (pour $1\leq p\leq n-1$) sont valeurs propres de L_n, outre la valeur propre 0. Comme cela fait n valeurs propres distinctes, ce sont exactement les valeurs propres de L_n. Notons que la diagonalisabilité de L_n était déjà assurée par le théorème spectral.

V. Graphe de Cayley et croissance

26. Dans un graphe de Cayley, tous les sommets sont de même degré (il y a pour chaque

élément de Z exactement une arête qui part de chaque sommet). En particulier, le graphe de 13.a) ne peut pas être un graphe de Cayley puisque le sommet $\{0\}$ a un seul voisin et les autres sommets en ont 2. Par le même argument, le graphe dont la matrice laplacienne est S_5 (question 21.) et le graphe de la question 25. ne sont pas des graphes de Cayley. Les autres graphes considérés sont des graphes de Cayley :

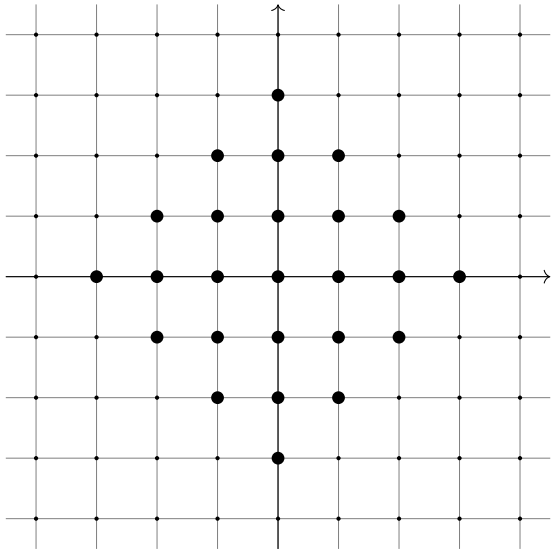
— en 13.b), $\Gamma = \boxed{\Gamma(\mathbf{Z}, \{\pm 1\})}$;

— en 21., le graphe complet à 5 sommets de matrice laplacienne K_5 est $\boxed{\Gamma(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}, \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\})}$;

— en 22., $\Gamma = \boxed{\Gamma(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}, \{\pm 1\})}$.

27. Par définition, $\beta(0) = 1$ et $\beta(1) = C$, donc $\beta(1) - \beta(0) = C - 1$. Démontrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\beta(k+1) - \beta(k) \leq C^k(C-1)$. Supposons que ce résultat soit vrai pour un entier $k \geq 0$. Soit $x \in G$ tel que $d(x, 1_G) = k$, alors on dispose de $y \in G$ tel que $d(y, 1_G) = k - 1$ et $z \in Z$ tels que $x = yz$. Ainsi, si on note $S_k = B(1_G, k) \setminus B(1_G, k-1) = \{x \in G, d(x, 1_G) = k\}$, l'application $S_k \times Z \to B_{k+1}$ définie par $(y, z) \mapsto yz$ est bien définie et son image contient S_{k+1}. On a donc $\boxed{|S_k||Z| \geq |S_{k+1}|}$, c'est-à-dire $\boxed{C(\beta(k) - \beta(k-1)) \geq \beta(k+1) - \beta(k)}$. Par hypothèse de récurrence, $C \times C^{k-1}(C-1) \geq \beta(k+1) - \beta(k)$, ce qui prouve le résultat voulu.
Cette inégalité démontre que $\beta(k) = \beta(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta(j) \leq 1 + (C-1)\sum_{j=0}^{k-1} C^j = C^k$. Ainsi, $\boxed{\beta(k) = O(C^k)}$.
La croissance de G est toujours majorée par une suite géométrique ; elle est dite exponentielle si elle est encadrée par des fonctions de la forme $k \mapsto \exp(\alpha k)$, et intermédiaire si elle n'est pas minorée par une fonction de cette forme, mais pas majorée par une fonction polynomiale (son comportement asymptotique est donc intermédiaire entre celui d'une fonction polynomiale et celui d'une fonction exponentielle, puisqu'elle est par ailleurs minorée par la fonction constante égale à 1, qui est polynomiale, et majorée par une fonction exponentielle)

28. Le dessin suivant représente $B((0,0), 3)$:



On a $B((0,0), k) = \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2, |a| + |b| \leq k\}$. Pour chaque entier $1 \leq p \leq k$, il y a $4p$ couples (a, b) tels que $|a| + |b| = p$ (4 choix de signes pour les $p - 1$ couples sans zéro, et 2 choix de signes pour les 2 couples ayant un zéro). On en déduit que $\beta(k) = 1 + \sum_{p=1}^{k} 4p = 1 + 2p(p+1) = 2p^2 + 2p + 1$

29. (a) Soient Z, Z' deux systèmes de générateurs de G. Notons β, β' les fonctions de croissances associées respectivement à Z et Z'. On note aussi B_k (resp. B'_k) la boule de

centre 1_G et de rayon k dans $\Gamma(G,Z)$ (resp. $\Gamma(G,Z')$). Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $Z' \subset B_p$ (un tel p existe car Z' est fini). Alors pour tout $k \geq 0$, $B'_k \subset B_{pk}$ (tout mot à k lettres dans Z' s'écrit comme un mot ayant au plus pk lettres dans Z). On a donc $\boxed{\beta'(k) \leq \beta(pk)}$. En particulier, si β est polynomiale, β' l'est aussi ; et si β' est exponentielle, β l'est aussi. Par symétrie, β est polynomiale si et seulement si β' l'est ; et β est exponentielle si et seulement si β' l'est. Par conséquent, β est intermédiaire si et seulement si β' l'est.

(b) Soit G abélien de type fini. D'après le théorème de classification des groupes abéliens de type fini, il existe une unique famille d'entiers $n_1, \ldots, n_d$ et $r \geq 0$ tels que $n_1 | \ldots | n_d$, telle que $G \simeq \mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z} \times \cdots \mathbf{Z}/n_d\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^r$. Comme la croissance d'un groupe ne dépend que de sa classe d'isomorphisme, on se ramène au cas où $G = \mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z} \times \cdots \mathbf{Z}/n_k\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^r$. On peut sans perte de généralité considérer la partie génératrice symétrique $\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)\}$. En outre, $B(1_G, k) \subset \mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/n_r\mathbf{Z} \times \tilde{B}(0,k)$ où $\tilde{B}(0,k)$ désigne la boule de centre 0 et rayon k dans Z^r. Ainsi, $\beta(k) \leq n_1 \cdots n_d \tilde{\beta}(k)$ où $\tilde{\beta}$ est la fonction de croissance de $\Gamma(\mathbf{Z}^r, \{(\pm 1, \ldots, \pm 1)\})$.
On est donc ramené à traiter le cas $G = \mathbf{Z}^r$, $Z = \{(\pm 1, \ldots, \pm 1)\}$. On a alors $B(0,k) \subset [-k,k]^r$ donc $\beta(k) \leq (2k)^r$. Cela assure que G est à croissance polynomiale.

VII. Groupe de Heisenberg discret

30. (a) Une récurrence immédiate sur k démontre que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $S^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a de plus $S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$, et donc $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On démontre à nouveau par récurrence sur $-k$ que la formule pour S^k est valable pour tout entier $k < 0$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $S^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On démontre de manière analogue que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$ et $U^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Enfin, un calcul matriciel direct montre que pour tout $(k,\ell,m) \in \mathbf{Z}^3$,

$$\boxed{S^k T^\ell U^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & \ell & 1 \end{pmatrix}}.$$

L'application f est bien définie. De plus, comme les matrices S, T, U sont dans le sous-groupes de $GL_3(\mathbf{R})$ dont les éléments sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & \ell & 1 \end{pmatrix}$, le sous-groupe H_3 est aussi un sous-groupe de ce groupe. Comme on a démontré par le calcul précédent que tout élément de ce groupe est en fait dans H_3, on en déduit que $\boxed{H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & \ell & 1 \end{pmatrix},\ (k,\ell,m) \in \mathbf{Z}^3 \right\} = f(\mathbf{Z}^3)}$. Donc f est surjective. Elle est

bien sûr injective, car les entiers (k,ℓ,m) se lisent sur la matrice $f(k,\ell,m)$. Donc f est bijective.

(b) Un calcul direct donne $\boxed{S^kT^\ell U^m S^{k'}T^{\ell'}U^{m'} = S^{k+k'}T^{\ell+\ell'}U^{m+m'+\ell k'}}$. En particulier, $f(k,\ell,m)f(k',\ell',m') = f(k+k',\ell+\ell',m+m'+\ell k') \neq f(k'+k,\ell'+\ell,m'+m+\ell' k) = f(k',\ell',m')f(k,\ell,m)$ dès que $\ell k' \neq \ell' k$, par injectivité de f. Cela prouve que H_3 n'est pas commu
Le sous-groupe engendré par $\{S,T\}$ est le sous-groupe des matrices de la forme $f(k,\ell,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & \ell & 1 \end{pmatrix}$. Les calculs précédents montrent que la restriction de f à $\mathbf{Z}^2\times\{0\}$ induit un isomorphisme de groupes vers le sous-groupe engendré par $\{S,T\}$ (qui est en particulier abélien).

31. Démontrons d'abord le résultat pour $k=\ell=0$. Soit $m\in\mathbf{N}$, en posant $a=\lfloor\sqrt{m}\rfloor$, on a $0\leq m-a^2\leq 2a$ (car $m<(a+1)^2 \Rightarrow m-a^2<2a+1$). Considérons maintenant $S^{-a}T^aS^aT^{-a}U^{m-a^2} = S^{-a+a}T^{a-a}U^{m-a^2+a^2} = U^m$. Ainsi, $|U^m|\leq 4a+(m-a^2)\leq 6a\leq 6\sqrt{m}$. On en déduit directement que l'on a aussi $|U^{-m}|\leq 6\sqrt{m}$, et donc que $\boxed{|U^m|\leq 6\sqrt{|m|}}$ pour tout $m\in\mathbf{Z}$.
On conclut en notant que pour tout $(k,\ell,m)\in\mathbf{Z}^3$, $|S^kT^\ell U^m| \leq |k|+|\ell|+|U^m| \leq |k|+|\ell|+6\sqrt{|m|}$.

32. Démontrons par récurrence sur p que pour tout $(k_i,\ell_i,m_i)_{1\leq i\leq p}\in(\mathbf{Z}^3)^p$, on a

$$f(k_1,\ell_1,m_1)\cdots f(k_p,\ell_p,m_p) = f(k_1+\cdots k_p,\ell_1+\cdots+\ell_p,m),$$

où $\boxed{m = m_1+\cdots+m_p+\ell_1(k_2+\cdots+k_p)+\ell_2(k_3+\cdots+k_p)+\ell_{p-1}k_p}$.
La formule est triviale pour $p=0$. Supposons-la vraie pour un entier $p\geq 0$. Soit $(k_i,\ell_i,m_i)_{1\leq i\leq p+1}\in(\mathbf{Z}^3)^{p+1}$, alors $f(k_1,\ell_1,m_1)\cdots f(k_{p+1},\ell_{p+1},m_{p+1}) = f(k_1+\cdots+k_p,\ell_1+\cdots+\ell_p,m_1+\cdots+m_p+\sum_{j=1}^{p-1}\ell_j(k_{j+1}+\cdots+k_p))f(k_{p+1},\ell_{p+1},m_{p+1})$. En utilisant la formule de 30.(b), on voit que ce produit est égal à $f(k,\ell,m)$ avec $k=k_1+\cdots+k_{p+1}$, $\ell=\ell_1+\cdots+\ell_{p+1}$ et $m=m_1+\cdots m_p+m_{p+1}+\sum_{j=1}^{p-1}\ell_j(k_{j+1}+\cdots+k_p)+(\ell_1+\cdots+\ell_p)k_{p+1} = m_1+\cdots m_p+m_{p+1}+\sum_{j=1}^{p}\ell_j(k_{j+1}+\cdots+k_{p+1})$, ce qui est bien la formule attendue au rang $p+1$.
En particulier, $S^kT^\ell U^m = f(k,\ell,m)$ s'écrit comme produit d'au moins $lk|+|\ell|$ éléments de $\{S^{\pm1},T^{\pm1},U^{\pm1}\}$, c'est-à-dire que $|S^kT^\ell U^m|\geq|k|+|\ell|$.
Supposons que $S^kT^\ell U^m$ s'écrive comme produit de $p\geq 1$ éléments de $\{S^{\pm1},T^{\pm1},\ell^{\pm1}\}$, et montrons que $|m|\leq p^2$. D'après la formule précédente, on a $m=\sum_{j=1}^p\ell_j(k_{j+1}+\cdots+k_p)$, avec tous les ℓ_j et k_j dans $\{-1,0,1\}$. Ainsi, $|k_{j+1}+\cdots+k_p|\leq p-j+1$ donc $|m|\leq \sum_{j=1}^p(p-j+1) = p(p+1)-\frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}\leq p^2$ car $p+1\leq 2p$. Cela montre que $|S^kT^\ell U^m|^2\geq|m|$.
En conclusion, $\boxed{|S^kT^\ell U^m|\geq\max\{|k|+|\ell|,\sqrt{|m|}\}\geq\frac{1}{2}(|k|+|\ell|+\sqrt{|m|})}$.

33. Soit (k,ℓ,m) tel que $S^kT^\ell U^m\in B(1,n)$. Alors $\frac{1}{2}(|k|+|\ell|+\sqrt{|m|})\leq n$. Estimons le nombre de triplets positifs vérifiant cette inégalité : l'entier m peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et $4n^2$. Pour $0\leq m\leq 4n^2$, il y a $4n^2-m$ valeurs possibles pour l'entier $k+\ell$, donc le nombre de triplets positifs possibles est $\sum_{m=0}^{4n^2}\sum_{k=0}^{\lfloor 2n-\sqrt{m}\rfloor}(\lfloor 2n-\sqrt{m}\rfloor-k) = \sum_{m=0}^{4n^2}\frac{1}{2}\lfloor 2n-\sqrt{m}\rfloor(\lfloor 2n-\sqrt{m}\rfloor+1)\leq 2n^2(2n+1)^2$. Le nombre total de triplets vérifiant l'inégalité est donc $\leq 16n^2(2n+1)^2$, ce qui montre que $\boxed{\beta(n)=O(n^4)}$.
Par ailleurs, on a vu que tous les triplets (k,ℓ,m) tels que $|k|+|\ell|+6|\sqrt{m}|\leq n$ définissent un élément de $B(1,n)$. Un calcul analogue au précédent permet de minorer le nombre de

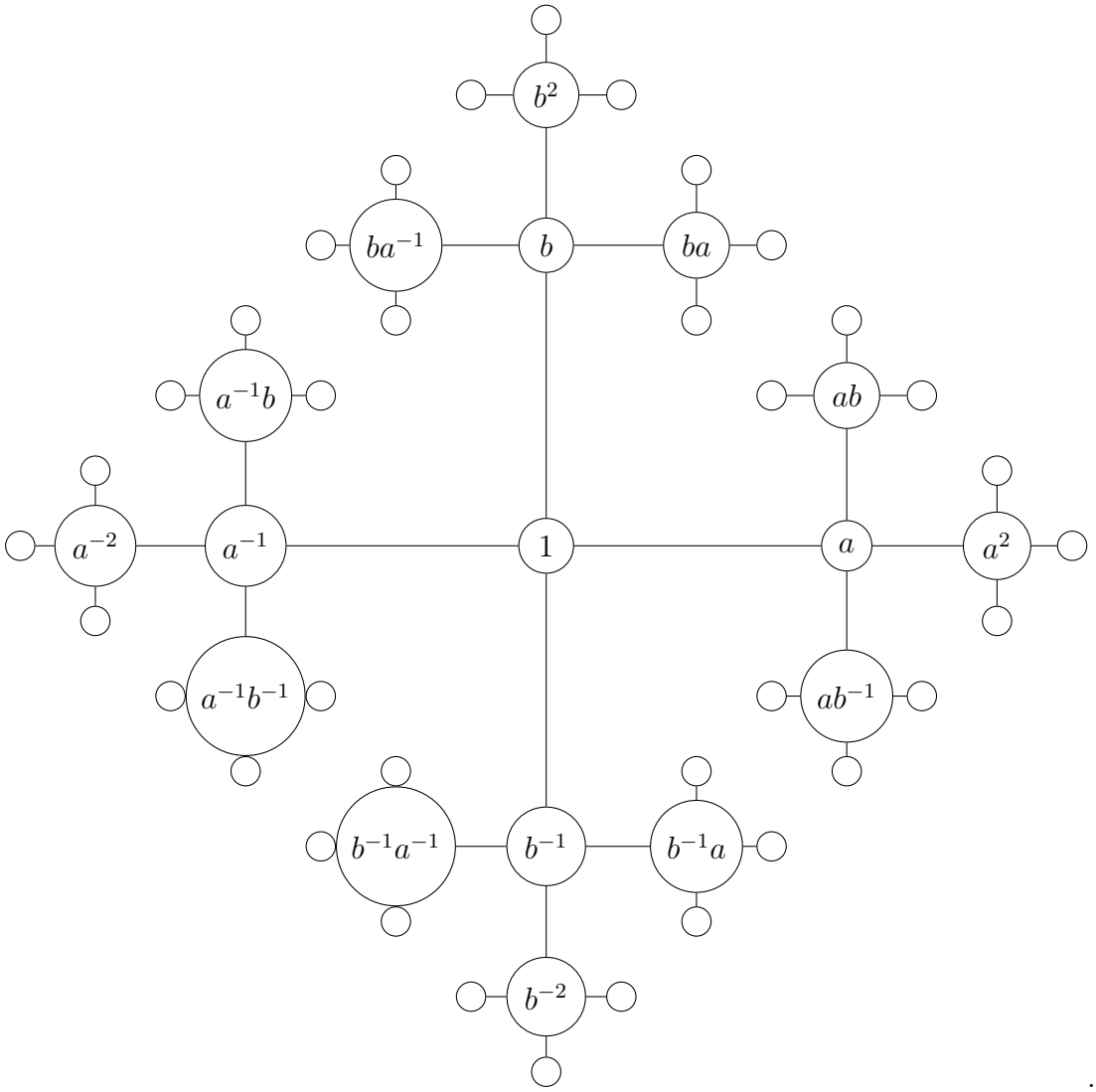
tels triplets par $8\sum_{m=0}^{\lfloor n^2/6\rfloor}(\lfloor n-\sqrt{m}/6\rfloor)(\lfloor n-\sqrt{m}/6\rfloor+1)$, ce qui montre que $\boxed{n^4 = O(\beta(n))}$.
En conclusion, la croissance de H_3 est polynomiale de degré 4.

VIII. Groupe libre

34. (a) Pour tout voisin z de y, $|d(x,z)-1| \leq p$ par inégalité triangulaire. Comme il existe un chemin de longueur minimale $(x, x_1, \ldots, x_{p-1}, y)$, on a $d(x, x_{p-1}) = p-1$ avec x_{p-1} voisin de y, d'où l'existence d'un tel sommet. S'il en existe deux distincts (disons x_{p-1} et x'_{p-1}, ce dernier étant relié à x par le chemin $(x, x'_1, \ldots, x'_{p-1})$), alors, en notant a l'arête $\{x_{p-1}, y\}$, les sommets x_{p-1} et y sont reliés dans $(S, A \setminus \{a\})$ par le chemin $(x_{p-1}, x_{p-2}, \ldots, x, x'_1, \ldots, x'_{p-1}, y)$. Ceci contredit le fait que T est un arbre, et démontre donc l'unicité d'un voisin de y à distance $p-1$ de x.
Les autres voisins de y sont sont à une distance p ou $p+1$ de x. Si un voisin z de y est à distance p de x, alors en considérant comme précédemment un chemin $(x, \ldots, z_{p-1}, z)$ de longueur p reliant x à z, aucun des z_i ne peut être égal à y et les sommets y et z sont reliés par $(y, x_{p-1}, \ldots, x, z_1, \ldots, z_{p-1}, z)$ dans $(S, A \setminus \{y, z\})$ ce qui contredit à nouveau l'hypothèse sur T. Donc les autres voisins de y sont tous à distance $p+1$ de x.
Soit $(x, x_1, \ldots, x_n = x)$ un lacet de longueur $n \geq 1$. L'ensemble $R = \{1 \leq j \leq n \text{ t.q. } d(x, x_j) = j\}$ est non vide (par hypothèse, $x_1 \in R$ car $x \neq x_1$). Soit $\boxed{r = \max R}$. Par hypothèse, $d(x, x_r) = r \geq 1$ donc $r < n$. Ainsi, $(x, x_1, \ldots, x_r)$ est un chemin de longueur r de x à x_r. Par hypothèse, $d(x, x_{r+1}) \neq r+1$ donc la première partie de la question montre que $\boxed{d(x, x_{r+1}) = r-1 = d(x, x_{r-1})}$. Par unicité du voisin de x_r situé à distance $r-1$ de x, on a $x_{r+1} = x_{r-1}$, donc ce lacet comporte un aller-retour.

(b) Si un chemin de x à y comporte l'aller-retour (z_i, z_{i+1}, z_i), alors on peut supprimer l'étape (z_i, z_{i+1}) de ce chemin pour obtenir un autre chemin de x à y. Une récurrence sur le nombre d'allers-retours du chemin montre alors qu'il existe un chemin sans aller-retour de x à y.
Soit $r = d(x, y)$ et soit $(x, z_1, \ldots, z_{r-1}, y)$ un chemin de longueur r reliant x et y. C'est un chemin sans aller-retour car la présence d'un aller-retour contredirait la minimalité de r. Montrons par récurrence sur r que c'est l'unique chemin sans aller-retour entre x et y. Initialisation : si $r = 0$ alors $x = y$ et tout chemin de x à y est un lacet ; le seul qui ne comporte pas d'aller-retour est (x) d'après 34.(a). Hérédité : supposons le résultat vrai lorsque $d(x,y) = r$, et considérons (x,y) tel que $d(x,y) = r+1$ et $(x, x_1, \ldots, x_r, y)$ un chemin de longueur $r+1$ (donc sans aller-retour) entre x et y. Soit $(x, z'_1, \ldots, z'_m, y)$ un chemin sans aller-retour de x à y. Alors $(x, z_1, \ldots, z_r, y, z'_m, \ldots, z'_1, x)$ est un lacet non trivial. Par 34.(a), il comporte un aller-retour. Par hypothèses sur les deux chemins, l'aller-retour ne peut être que (z_r, y, z'_m). Donc $z_r = z'_m$. Ainsi, $(x, \ldots, z'_m)$ est un chemin sans aller-retour de x à z_r. Par hypothèse de récurrence, $(x, \ldots, z_r) = (x, \ldots, z'_m)$. Cela démontre le résultat au rang $r+1$, et on conclut par principe de récurrence.

35. On propose ci-dessous une représentation de $B(1,3)$, les arêtes horizontales représentent la multiplication par $a^{\pm 1}$ et les arêtes verticales la multiplication par $b^{\pm 1}$.



36. On a admis que $T = \Gamma(F_2, Z)$ est un arbre. L'application $F_2 \to \bigcup_{r\in\mathbf{N}} Z^r$ définie par $x \mapsto (z_1, \cdots, z_r)$ où $(1, z_1, z_1z_2, \ldots, z_1\cdots z_{r-1}, x)$ est l'unique chemin sans aller-retour reliant 1 à x est donc bien définie d'après la question 34.
Comme ce chemin est sans aller-retour, l'écriture $x = z_1\cdots z_r$ est sans simplification, c'est-à-dire réduite. Réciproquement, si $x = z'_1\cdots z'_m$ est une écriture réduite, alors $(1, z'_1, \cdots, z'_1\cdots z'_{m-1}, x)$ est un chemin sans aller-retour de 1 à x dans T. Par unicité d'un tel chemin (toujours d'après la question 34.), l'écriture réduite de x est unique.

37. Soit $n \geq 1$. D'après la question précédente, $B(1,n) \setminus B(1,n-1)$ est en bijection avec l'ensemble des écritures réduites de longueur n. Si $x = s_1\cdots s_n$ est une écriture réduite de longueur n, alors il y a exactement 3 éléments z de Z tels que $xz = s_1\cdots s_nz$ soit une écriture réduite de xz (précisément, c'est le cas si et seulement si $z \neq s_n^{-1}$). Ainsi, $\boxed{\beta(n) - \beta(n-1) = 3(\beta(n-1) - \beta(n-2))}$ pour tout $n \geq 2$. On a donc $\beta(n) - \beta(n-1) = 3^{n-1}(\beta(1) - \beta(0)) = 4 \times 3^{n-1}$. On en déduit par téléscopage que $\beta(n) - \beta(1) = 4\frac{3^n-1}{3-1}$, d'où $\boxed{\beta(n) = 2 \times 3^n - 1}$. La croissance de F_2 est donc exponentielle. On observe aussi que cette fonction de croissance réalise l'égalité dans l'inégalité de la question 27. : $\beta(n) - \beta(n-1) = C \times (C-1)^{n-1}$ (ici $C = |Z| = 4$), c'est en ce sens qu'elle est maximale.

38. Démontrons que Δ est surjectif. Soit $g \in E$, nous allons construire $f \in E$ tel que $\Delta f = g$, en définissant par récurrence sur n la fonction f sur $B(1,n)$.

On pose $f(1) = 1$, et $\boxed{f(a) = f(b) = f(a^{-1}) = f(b^{-1}) = -\frac{1}{4}g(1)}$. On a donc $\Delta f(1) = g(1)$.
Supposons maintenant que pour un certain $n \geq 1$, on a défini f sur $B(1,n)$ de sorte que pour tout $x \in B(1,n-1)$, $\Delta f(x) = g(x)$. Soit $w \in B(1,n)$. On écrit $w = z_1 \cdots z_n$ avec $z_i \in Z$ pour tout $1 \leq i \leq n$ (écriture réduite). Pour tout $h \in Z$ tel que $h \neq z_n^{-1}$, on a $d(1, z_1 \cdots z_n h) = n+1$ et on définit $\boxed{f(wh) = \frac{1}{3}(4f(w) - f(wz_n^{-1}) - g(w))}$. Cette formule définit bien les $f(wh)$ pour $h \neq z_n^{-1}$ car $w, wz_n^{-1} \in B(1,n)$, et définit donc f sur $B(1,n+1)$ (chaque élément de $B(1,n+1)$ s'écrit de manière unique sous la forme wh avec w, h comme précédemment). De plus, par construction, si $w \in B(1,n)$, on a $\boxed{\Delta f(w) = g(w)}$.
Ainsi, par principe de récurrence, f est bien définie sur F_2 et vérifie $\boxed{\Delta f = g}$, d'où la surjectivité de Δ.

39. Pour $x \in F_2$, on pose $\boxed{f(x) = 3^{-b_\varphi(x)}}$; on a $f(1) = 1$.
D'après le fait admis sur la fonction b_φ, on a alors pour tout $x \in F_2$: $\Delta f(x) = 4 \times 3^{-b_\varphi(x)} - 3^{-(b_\varphi(x)-1)} - 3 \times 3^{-(b_\varphi(x)+1)} = 3^{-b_\varphi(x)}(4 - 3 - 1) = 0$, donc la fonction f est harmonique. En outre, si $\psi \in F_2 \setminus \{\varphi\}$, alors on dispose de $p_0 \geq 1$ minimal tel que $\varphi_{\to p_0} \neq \psi_{\to p_0}$. Soit $n \geq 0$, alors $b_\varphi(\psi_{\to p_0+n}) = p_0 + n - 2(p_0 - 1) = n + 2 - p_0$, de sorte que $f(\psi_{\to p_0+n}) = 3^{-n+2-p_0} \to_{n\to+\infty} 0$. Enfin, on a $f(\varphi_{\to p}) = 3^p$ qui a bien pour limite $+\infty$ lorsque $p \to +\infty$.

40. Soit $x_0 \in F_2$ tel que $m(x_0, \varphi) \leq q$. Supposons que $h(x_0) \neq 0$; quitte à changer h en $-h$, on peut supposer que $h(x_0) > 0$. Soit x_1 un voisin de x_0 tel que $h(x_1)$ soit maximal. On construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de F_2 où x_{n+1} est choisi de sorte que $h(x_{n+1})$ soit maximal parmi les $h(y)$ où y est voisin de x_n, et que $x_{n+1} \neq x_{n-1}$ (comme chaque sommet a 4 voisins indexés par les éléments de Z, cela peut se faire sans recourir à l'axiome du choix). Il est possible de satisfaire la condition $x_{n+1} \neq x_{n-1}$, sans quoi tous les voisins y de x_n tels que $y \neq x_{n-1}$ vérifieraient $h(y) < h(x_{n-1})$, mais alors $\Delta h(x_n) > 4h(x_n) - 4h(x_{n-1}) > 0$. Ainsi, le chemin de x_0 à x_n ne comporte pas d'aller-retour, et on peut considérer $\psi \in \partial F_2$ défini par la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Notons que la suite x_n ne prend jamais la valeur $\varphi_{\to q}$ car $h(\varphi_{\to q}) = 0$.
Ainsi, l'hypothèse $m(x_0, \varphi) \leq q$ assure que $\boxed{\varphi_{\to q+1} \neq \psi_{\to q+1}}$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty} h(x_n) = \lim_{k\to+\infty} h(\psi_{\to k}) = 0$, ce qui contredit la croissance de $(h(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$. On en conclut que h s'annule sur l'ensemble des $x \in F_2$ tels que $m(x, \varphi) \leq q$.
Il reste à en déduire l'unicité de f. Soit $h \in H$ telle que $h(0) = 0$ et $h(\psi_{\to p}) \to_{p\to+\infty} 0$ pour tout $\psi \in \partial F_2 \setminus \{\varphi\}$. Il suffit de démontrer que $h = 0$ (car deux solutions f de ce problème diffèrent d'une telle fonction h). Montrons d'abord que pour tout $q \in \mathbf{N}$, $h(\varphi_{\to q}) = 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas : comme $h(0) = 0$, on dispose de $q \geq 0$ minimal tel que $h(\varphi_{\to q+1}) = 0$. On a donc $h(\varphi_{\to q}) = 0$, ce qui (par hypothèse sur h) montre que $h(x) = 0$ pour tout $x \in F_2$ tel que $m(x, \varphi) \leq q$. En particulier, les 3 voisins y de $\varphi_{\to q}$ différents de $\varphi_{\to q+1}$ vérifient $h(y) = 0$, donc par harmonicité $h(\varphi_{q+1}) = 0$: ceci contredit l'hypothèse sur q et démontre que $h(\varphi_{\to q+1}) = 0$. Finalement, h vérifie les hypothèses de la première partie de la question pour tout $q \in \mathbf{N}$, et donc $h(x) = 0$ pour tout $x \in F_2$.

41. Montrons que la famille $(p_\varphi)_{\varphi\in\partial F_2}$ est libre. Supposons $\sum_{i=1}^k a_i p_{\varphi_i} = 0$, alors en évaluant en $(\varphi_i)_{\to p}$ et en passant à la limite lorsque $p \to +\infty$, il vient $a_i = 0$. Comme ces fonctions sont harmoniques, $\ker \Delta$ contient une famille libre infinie : il est de dimension infinie.

IX. Marche au hasard et vitesse de fuite

42. Notons $T_n = \frac{b_\varphi(X_n)+n}{2}$. Démontrons que pour tout $n \geq 0$, T_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 3/4)$; on observe déjà que cette variable aléatoire a pour image $\{0, \ldots, n\}$ et que

$\mathbf{P}(T_n = 0) = \mathbf{P}(m(X_n, \varphi) = n) = \mathbf{P}(Y_1 = \varphi_1, \cdots, Y_n = \varphi_n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ par indépendance des variables $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$.
Nous allons maintenant démontrer le résultat par récurrence sur $n \geq 0$. Par définition, $T_0 = 0$ avec probabilité 1. Supposons maintenant que pour tout $0 \leq k \leq n$, $\mathbf{P}(T_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$, et démontrons le résultat pour $n+1$.
Le cas $k = 0$ a déjà été traité indépendamment de n. Traitons maintenant le cas $1 \leq k \leq n+1$. On observe que $T_{n+1} = k$ si et seulement si $X_n = \varphi_{\to n-k}$ et $Y_{n+1} = \varphi_{n+1-k}$, ou bien $X_n = \varphi_{\to n+1-k}$ et $Y_{n+1} \neq \varphi_{n+2-k}$. On en déduit par indépendance des (Y_i)) que :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_{n+1} = k) &= \tfrac{1}{4}\mathbf{P}(T_n = k) + \tfrac{3}{4}\mathbf{P}(T_n = k-1)\\ &= \tfrac{1}{4}\tbinom{n}{k}\left(\tfrac{3}{4}\right)^k\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-k} + \tfrac{3}{4}\tbinom{n}{k-1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{n+1-k}\\ &= \boxed{\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-k}}.\end{aligned}$$

Par principe de récurrence, on en déduit que T_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 3/4)$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbf{P}\left(\left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\left(\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2}\right) - \frac{3}{4}\right| \geq \varepsilon/2\right)$. Comme $T_n = \frac{b_\varphi(X_n)+n}{2}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 3/4)$, d'après l'inégalité de Hoeffding admise en préambule, on a $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\left(\frac{b_\varphi(X_n)+n}{2}\right) - \frac{3}{4}\right| \geq \varepsilon/2\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2/4}}$. Combinée avec l'égalité précédente, c'est précisément l'inégalité attendue.

43. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbf{P}\left(\left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}$. Or le membre de droite est le terme général d'une série convergente ; on a donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) < +\infty$. Par le lemme de Borel-Cantelli, $\frac{b_\varphi(X_n)}{n}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{2}$.
D'autre part, $b_\varphi(X_n) = d(1, X_n) - 2m(X_n, \varphi)$ et on a grossièrement, pour tout $r \in \mathbf{N}$, $\boxed{\mathbf{P}(m(X_n, \varphi) \geq r) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^r}$ (pour qu'un mot ait au moins ses r premières lettres communes avec φ, il faut qu'il ait au moins r lettres ; on veut donc que pour au moins r valeurs de $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, l'un des 3 voisins de X_k les plus éloignés de 1 ait été choisi pour X_{k+1}). En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(m(X_n, \varphi) \geq n\varepsilon) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor \varepsilon n \rfloor} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\varepsilon n}$ pour n assez grand. Ce majorant est le terme général d'une série convergente, donc par le même argument que précédemment (Borel-Cantelli), $\frac{m(X_n,\varphi)}{n} \to_{n\to+\infty} 0$ presque sûrement. On en conclut que $d(1, X_n) \to_{n\to+\infty} \frac{1}{2}$ presque sûrement.

44. Soit $E \subset F_2$ finie et soit $\boxed{r = \max\{d(x, 1), x \in E\}}$. On sait que $d(X_n, 1)/n$ converge presque sûrement vers $1/2$. Or on a $\{\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, |X_n|/n > 1/4\} \subset \{\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, |X_n| > r\} \subset \{\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, X_n \notin E\}$. On sait que la probabilité du membre de gauche vaut 1, donc $\boxed{\mathbf{P}(\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, X_n \notin E) = 1}$. Autrement dit, la marche aléatoire X_n sort presque sûrement de toute partie finie.

X. Compactification

45. On note que $d'(x, y)$ est bien définie si $x \neq y$ (car alors l'ensemble considéré admet bien un maximum), et on convient que $d'(x, x) = 0$.
Soient $x, y, z \in \overline{F_2}$. On peut sans perte de généralité supposer que x, y, z sont deux à deux distincts et que $\max(d'(x, z), d'(y, z)) = d'(x, z)$. Notons $r = -\ln(d'(x, z))$. Alors par hypothèse, $x_{\to r} = z_{\to r}$ et comme $d'(y, z) \geq d'(x, z)$, on a aussi $y_{\to r} = z_{\to r}$. Ainsi, $x_{\to r} = y_{\to r}$ et $\boxed{d'(x, y) \leq e^{-r} = \max(d'(x, z), d'(y, z))}$.

Par définition, d' est à valeurs positives. On a déjà convenu que $d'(x,x)=0$, et par définition $d(x,y)\neq 0$ si $x\neq y$. Il est clair aussi que $d'(x,y)=d'(y,x)$ pour tous $x,y\in\overline{F_2}$. Enfin, l'inégalité triangulaire découle de l'inégalité précédent car $\max(d(x,z),d(y,z))\leq d(x,z)+d(y,z)$. Donc d' est bien une distance.
Soit $x\in F_2$, et soit $n=|x|$. On a $B(x,e^{-n})\cap F_2=\{y\in F_2, y_{\to n+1}=x_{\to n+1}\}=\{x\}$ car $y\in F_2$ a un 1 en position $n+1$ dans son écriture réduite si et seulement si $|y|\leq n$. En particulier, les singletons sont des ouverts de F_2 : comme pour la topologie associée à d, la topologie associée à d' sur F_2 est discrète.
Soit $r\leq 1$ et soient $k=\lfloor -\ln r\rfloor$ et $k'=\lceil -\ln r\rceil$. Exploitons le fait que $\{p\in\mathbf{N}, p>-\ln r\}=[\![k+1,+\infty[\![$ et $\{p\in\mathbf{N}, p\geq -\ln r\}=[\![k',+\infty[\![$. On en déduit que dans $\overline{F_2}$, la boule ouverte de rayon r et de centre $y\in\overline{F_2}$ est $B(y,r)=\{z\in\overline{F_2}, y_{\to k+1}=z_{\to k+1}\}=C(y,k+1)$ et la boule fermée de mêmes centre et rayon est $\{z\in\overline{F_2}, y_{\to k'}=z_{\to k'}\}=C(y,k')$. Notons enfin que pour tout $x\in\overline{F_2}$, et pour tout $r>1$, $B(x,r)=\overline{F_2}=C(x,0)$ par définition de d'. Ainsi, les boules ouvertes comme les boules fermées de $\overline{F_2}$ sont les $C(y,p)$ pour $y\in\overline{F_2}$ et $p\in\mathbf{N}$. En particulier ces ensembles sont à la fois ouverts et fermés.

46. Démontrons que $\overline{F_2}$ est complet et précompact.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy. Soit $k\geq 0$ un entier, alors il existe n_k tel que pour tout $p\geq q\geq n_k$, $(x_p)_{\to k}=(x_q)_{\to k}$; on peut donc définir $\boxed{y_1\cdots y_k=\lim_{n\to+\infty}(x_n)_{\to k}}$. Considérons alors l'élément y de $\overline{F_2}$ défini par la suite $(y_1,y_2,\cdots)$. Par hypothèse, $d'(x_n,y)\to_{n\to+\infty}0$, donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers y dans $\overline{F_2}$: $\overline{F_2}$ est complet.
Soit $\varepsilon>0$ (on peut supposer $\varepsilon\leq 1$) et $k=\lfloor -\ln\varepsilon\rfloor$. Par définition, pour tout $x\in\overline{F_2}$, $x\in C(x_{\to k+1},k+1)$. En particulier, $\boxed{\overline{F_2}=\bigcup_{|w|\leq k+1}C(w,k+1)}$. Comme $C(w,k+1)=B(w,\varepsilon)$ est une boule ouverte de rayon ε, on en déduit que $\overline{F_2}$ est précompact.
Cela démontre la compacité de $\overline{F_2}$.
Enfin, si $x\in F_2$, alors par définition la suite $(x_{\to n}))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x dans $\overline{F_2}$, et $x_{\to n}\in F_2$ pour tout $n\in\mathbf{N}$, donc F_2 est dense dans $\overline{F_2}$.

47. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\partial F_2^{\mathbf{N}}$. Par compacité de $\overline{F_2}$, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $x_n\to_{n\to+\infty}x\in\overline{F_2}$. Supposons que $x\notin\partial F_2$ et notons $k=|x|$. Par définition, $(x_n)_{\to k+1}=x_{\to k+1}$ pour tout n suffisamment grand ; or $x_{\to k+1}=x$ est de longueur k, et donc $x_n\in F_2$ pour n suffisamment grand : c'est absurde, donc $x\in\partial F_2$. Cela montre que ∂F_2 est compact.
Soit $x\in\partial F_2$, et soit $k\geq 0$. Alors $C(x,k)=C(x_{\to k},k)$ contient tous les éléments de ∂F_2 de la forme $x_{\to k}\cdot w$, où $x_kw_1\neq 1$. Il existe une infinité de tels $w\in\partial F_2$ (c'est le complémentaire de $C(x_k^{-1},1)$ dans ∂F_2) donc x n'est pas un point isolé.
Soit $x\in\partial F_2$, et soit $X\subset\partial F_2$ contenant x. On suppose $X\neq\{x\}$. On dispose de $y\in\partial F_2$ tel que $y\neq x$. Soit $k\in\mathbf{N}$ tel que $x_{\to k}\neq y_{\to k}$. Soit $U=C(x,k)\cap X$ et $V=X\setminus C(x,k)$: comme $C(x,k)$ est ouvert et fermé dans X, U et V sont ouverts dans X, et non vides par construction. On a évidemment $X=U\cup V$ et $\emptyset=U\cap V$. Cela démontre que X n'est pas connexe. En particulier, la composante connexe de x est $\{x\}$. Cela démontre que ∂F_2 est totalement discontinu.

XI. Sortie de la marche au hasard

48. Comme $\overline{F_2}$ est compact, $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une valeur d'adhérence dans F_2. D'après la question 44., pour tout $x\in F_2$, la probabilité que la valeur x soit prise une infinité de fois par X_n est nulle ; comme la topologie induite par d' sur F_2 est discrète, les valeurs d'adhérence de X_n sont presque sûrement dans ∂F_2.

Supposons que X_n ait deux valeurs d'adhérence $\varphi \neq \psi$. Soit $k = -\ln(d'(\varphi,\psi))$, et soit $x = \varphi_{\to k} = \psi_{\to k}$. Comme la suite X_n prend des valeurs arbitrairement proches de φ et de ψ, elle doit prendre la valeur x une infinité de fois. D'après la question 44., la probabilité de cet événement est nulle. Donc presque sûrement, X_n a une unique valeur d'adhérence, qui est dans ∂F_2. Ceci démontre le résultat attendu.

49. Par définition, $\mu_x(x\cdot I(\varphi,p)) = \mathbf{P}(\lim_{n\to+\infty} x\cdot X_n \in x\cdot I(\varphi,p)) = \mathbf{P}(\lim_{n\to+\infty} X_n \in I(\varphi,p))$ ne dépend pas de x.

Soit $p \geq 1$, on note $S_p = \{x \in F_2 \text{ t.q. } |x| = p\}$. Alors $\overline{F_2} = \big(\sqcup_{x\in S_p} C(x,p)\big) \sqcup B(1,p-1)$. En effet, si $y \in F_2$ est de longueur au moins p, alors $y \in C(y_{\to p},p)$, et ces parties sont disjointes par définition. On a donc $\partial F_2 = \sqcup_{x\in S_p} I(x,p)$, de sorte que (par indépendance à φ) : $\boxed{\mu_1(I(\varphi,p)) = \mu_1(I(\varphi_{\to p},p)) = \dfrac{1}{|S_p|} = \dfrac{1}{4\cdot 3^{p-1}}}$. On en conclut que pour tout $x \in F_2$, et pour tout $p \geq 1$, $\boxed{\mu_x(x\cdot I(\varphi,p)) = \dfrac{1}{4\cdot 3^{p-1}}}$.

Soient $x, y \in F_2$ et $p \in \mathbf{N}$. On cherche d'abord à calculer $\mu_x(I(y,p)) = \mu_1(x^{-1}I(y,p))$. Notons $k = |x|$ et $\ell = \max\{0 \leq i \leq k \text{ t.q. } x_{\to k} = y_{\to k}\}$.

On a alors $\boxed{x^{-1}y = x_k^{-1}\cdots x_{\ell+1}^{-1} y_{\ell+1}\cdots y_p}$, et cette écriture ne comporte pas de simplifications. Considérons $x\cdot\varphi = x_{\to\ell}x_{\ell+1}\cdots x_k\cdot\varphi$ et $y = x_{\to\ell}y_{\ell+1}\cdots y_p\cdots$. On a donc $(x\cdot\varphi)_{\to p} = y_{\to p}$ si et seulement si $x_{\ell+1}\cdots x_k\varphi_{\to k-\ell} = 1$ (car $x_{\ell+1} \neq y_{\ell+1}$) et pour tout $1 \leq j \leq p-\ell$, $\varphi_{k-\ell+j} = y_{\ell+j}$. Cette condition équivaut à ce que les $p+k-2\ell$ premières lettres de φ soient $x_k^{-1}\cdots x_{\ell+1}^{-1}y_{\ell+1}\cdots y_p$, c'est-à-dire que $\varphi \in I(x^{-1}y, p+k-2\ell)$. On en déduit que $\boxed{x^{-1}I(y,p) = I(x^{-1}y, p+k-2\ell)}$ donc $\boxed{\mu_x(I(y,p)) = \dfrac{1}{4\cdot 3^{p+k-2\ell-1}} = 3^{2\ell-k}\mu_1(C(y,p))}$.

Par ailleurs, pour $\psi \in I(y,p)$, on a $m(x,\psi) = \ell$: en effet, on a alors par hypothèse $y_{\to\ell} = x_{\to\ell} = \varphi_{\to\ell}$ (nécessairement $\ell \leq p$ sans quoi $p < \ell \leq k$ et $y_{p+1} = x_{p+1} = 1$, ce qui est absurde), et $x_{\ell+1} \neq y_{\ell+1} = \psi_{\ell+1}$ (y compris si $\ell = p$).

Finalement, pour $\psi \in I(y,p)$, $\boxed{b_\psi(x) = k-2\ell}$ ne dépend pas de ψ, et on a :

$$\mu_x(I(y,p)) = 3^{2\ell-k}\mu_1(I(y,p)) = \int_{\varphi\in I(y,p)} 3^{-b_\varphi(x)} d\mu_1(\varphi) = \int_{I(y,p)} p_\varphi(x) d\mu_1(\varphi).$$

Il reste à étendre le résultat aux boréliens. Soient $I(y,p), I(z,q) \subset \partial F_2$. Supposons $I(y,p)\cap I(z,q) \neq \emptyset$. On peut supposer que $p = \min(p,q)$. On a alors $y_{\to p} = x_{\to p}$ donc $I(y,q) \subset I(x,q)$. Ainsi, la famille $\{I(y,p), y \in F_2, p \in \mathbf{N}\} \cup \{\emptyset\}$ est stable par intersection. Par le théorème d'unicité des mesures, deux mesures de probabilité qui coïncident sur une telle famille coïncident sur la tribu qu'elle engendre, qui est la tribu borélienne de ∂F_2 (les $I(y,p)$ forment une base d'ouverts de ∂F_2). En particulier, les mesures de probabilité μ_x et $\int_\cdot p_\varphi(x)d\mu_1(\varphi)$ sont égales.

XII. Problème de Dirichlet

50. Remarquons tout d'abord que d'après le résultat de la question 49., on a pour toute fonction mesurable bornée f sur ∂F_2 et pour tout $x \in F_2$, $\boxed{\displaystyle\int_{\partial F_2} f(\varphi)d\mu_x(\varphi) = \int_{\partial F_2} f(\varphi)p_\varphi(x)d\mu_1(x)}$.

Considérons maintenant la fonction h définie dans l'énoncé. Comme g est continue sur ∂F_2, elle y est mesurable et comme ∂F_2 est compact, g est bornée, donc $g \in L^1(\partial F_2, \mu_x)$. La fonction h est donc bien définie. En vertu de la formule précédente, pour tout $x \in F_2$,

$\boxed{h(x) = \int_{\partial F_2} p_x(\varphi) g(\varphi) d\mu_1(\varphi)}$. Par linéarité du laplacien, on a pour tout $x \in F_2$, $\Delta h(x) = \int_{\partial F_2} g(\varphi) \Delta p_\varphi(x) d\mu_1(\varphi) = 0$ car p_φ est harmonique d'après la question 39. On a démontré que h est harmonique.

Comme F_2 est discret, h est continue sur F_2. Par densité de F_2, il existe une unique fonction f définie sur $\overline{F}_2$, continue et qui prolonge h. Soit $\varphi \in \partial F_2$, montrons que $f(\varphi) = g(\varphi)$. Soit $\varepsilon > 0$, comme g est continue sur ∂F_2, on dispose de $\delta > 0$ tel que $d'(\varphi, \psi) < \delta \Rightarrow |g(\varphi) - g(\psi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et comme g est continue et ∂F_2 est compact, on dispose de $\gamma > 0$ tel que pour tout $\psi \in \partial F_2$, $|g(\psi)| \leq \gamma$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq -\ln(\delta)$ et $\frac{1}{4 \cdot 3^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{4\gamma}$. Alors $f(\varphi_{\to 2n}) = \int_{\partial F_2} g(\varphi) d\mu_1(\varphi^{-1}_{\to 2n} \cdot \psi) = \int_{\partial F_2} g(\varphi_{\to 2n} \cdot \psi) d\mu_1(\psi)$ par le changement de variable $\psi \mapsto \varphi_{\to 2n} \cdot \psi$ (qui est bien bijectif car c'est une action de F_2 sur ∂F_2). On a donc :

$$|f(\varphi_{\to 2n}) - g(\varphi)| = \left| \int_{\partial F_2} g(\varphi_{\to 2n} \cdot \psi) - g(\varphi) d\mu_1(\psi) \right| \leq \int_{\partial F_2} |g(\varphi_{\to 2n} \cdot \psi) - g(\varphi)| d\mu_1(\psi).$$

Notons $\varphi^{-1}_{n+1 \to 2n} = y_{2n}^{-1} \cdots y_{n+1}^{-1}$ où $\varphi = \varphi_{\to n} y_{n+1} \cdots y_{2n}$. Pour $\psi \notin I(\varphi^{-1}_{n+1 \to 2n}, n)$, on a $d'(\varphi_{\to 2n} \cdot \psi, \varphi) < \delta$ donc $\boxed{|g(\varphi_{\to 2n} \cdot \psi) - g(\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2}}$. On en déduit que :

$$|f(\varphi_{\to 2n}) - g(\varphi)| \leq \int_{I(\varphi^{-1}_{n+1 \to 2n}, n)^c} \frac{\varepsilon}{2} d\mu_1(\psi) + \int_{I(\varphi^{-1}_{n+1 \to n}, n)} 2\gamma d\mu_1(\psi) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\gamma \frac{1}{4 \cdot 3^{n-1}} < \varepsilon.$$

On a donc bien $\lim_{n \to +\infty} f(\varphi_{\to n}) = g(\varphi)$ donc par continuité de f, $\boxed{f_{|\partial F_2} = g}$.
L'existence d'une fonction f satisfaisant les hypothèses voulues est acquise, il reste à démontrer son unicité. Supposons que $\tilde{f}$ soit une autre solution du même problème. Alors $\tilde{h} = f - \tilde{f}$ est harmonique et s'annule sur ∂F_2. Par continuité de $\tilde{h}$ on a $\lim_{p \to +\infty} h(\psi_{\to p}) = 0$. Ainsi, $\tilde{h} \in \cap_{\varphi \in \partial F_2} \mathbf{R} p_\varphi = \{0\}$ d'après la question 40. Donc f est unique.