Agrégation Externe 2018
Mathématiques Générales

Jérémy Le Borgne *
ENS Rennes

I Exercices préliminaires

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-1)(X-a)$. Ainsi, si $a \neq 1$, χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable et sa décomposition de Dunford est $A = A + 0$ (puisque A et 0 commutent).
   Si $a = 1$, alors A s'écrit :
   $$A = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Comme I_2 est diagonalisable, que $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente (on a $N^2 = 0$), et que ces deux matrices commutent clairement (I_2 commute avec tout élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$), cette écriture est la décomposition de Dunford de A.

2. Il est immédiat que la conjugaison par P (définie par $c_P : M \mapsto PMP^{-1}$) est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En particulier, si $f \in \mathbb{C}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $c_P(f(A)) = f(c_P(A))$.
   De plus, l'automorphisme c_P est continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car polynomial en les coefficients de M. Ainsi, si on pose $f_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k \in \mathbb{C}[X]$, alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(A) = \exp(A)$, et par continuité de c_P, on a $\lim_{n\to+\infty} c_P(f_n(A)) = c_P(\exp(A))$.
   D'après la première remarque, on a aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_P(f_n(A)) = f_n(c_P(A))$, et donc $\exp(c_P(A)) = \lim_{n\to+\infty} c_P(f_n(A)) = c_P(\exp(A))$, c'est-à-dire que $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$.

3. Il est clair que l'application $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ est linéaire sur $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Son noyau est $\{P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \mid \forall 1 \leq i \leq n,\ P(a_i) = 0\}$. Comme les a_i sont distincts, un élément du noyau est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ qui s'annule en n points de $\mathbb{C}$: c'est nécessairement le polynôme nul car $\mathbb{C}$ est un corps.
   Ainsi, l'application considérée est injective. Comme $\dim \mathbb{C}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbb{C}^n$, elle est également surjective d'après le théorème du rang, c'est donc un isomorphisme. En particulier, pour $(b_1, \dots, b_n)$, il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $P(a_i) = b_i$.

4. Soit $\rho : \mathbb{Z} \to GL_n(\mathbb{C})$ une représentation de $\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $\rho(k) = \rho(1)^k$; en particulier, ρ est entièrement déterminée par $M = \rho(1)$, et vérifie $\rho(k) = M^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
   Les représentations ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$

*Pour toute question ou remarque, jeremy.leborgne@ens-rennes.fr

tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\rho_1(k) = P\rho_2(k)P^{-1}$. Une condition nécessaire pour l'existence d'un tel P est évidemment que $M_1 = \rho_1(1)$ et $M_2 = \rho_2(1)$ soient semblables (c'est la condition précédente pour $k = 1$) ; c'est aussi une condition suffisante car la conjugaison par un élément de $GL_n(\mathbb{C})$ est un automorphisme de $GL_n(\mathbb{C})$.

5. Notons que l'application $\mathbf{1}$, constante égale à 1, est un élément de $\hat{G}$, et que si $f \in \hat{G}$, on a $\mathbf{1}f = f\mathbf{1} = f$.
Par ailleurs, si $f \in \hat{G}$, alors l'application $G \to \mathbb{C}^\times$ définie par $g \mapsto f(g)^{-1}$ est bien définie et c'est un élément de $\hat{G}$: en effet, on a pour $g, h \in G$, $f(gh)^{-1} = [f(g)f(h)]^{-1} = f(g)^{-1}f(h)^{-1}$. Enfin, un calcul analogue montre que si $f_1, f_2 \in \hat{G}$, on a bien $f_1 f_2 \in \hat{G}$. Ainsi, la loi proposée munit bien $\hat{G}$ d'une structure de groupe de neutre $\mathbf{1}$, pour lequel l'inverse de f est $g \mapsto f(g)^{-1}$. Comme $\mathbb{C}^\times$ est abélien, c'est aussi le cas de $\hat{G}$.

II La décomposition de Dunford

1. $\Rightarrow$: par bilinéarité, on a $[A_1, A_2] = [S_1 + N_1, S_2 + N_2] = [S_1, S_2] + [S_1, N_2] + [N_1, S_2] + [N_1, N_2] = 0$.
$\Leftarrow$: Comme $[A_1, A_2] = 0$, une récurrence immédiate montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[A_1^k, A_2] = 0$. Par symétrie et par bilinéarité, on a donc pour tous $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $[f(A_1), g(A_2)] = 0$. Or on sait que pour $i \in \{1, 2\}$, $S_i, N_i \in \mathbb{C}[A_i]$, d'où le résultat.

2. (a) Par construction, S est diagonalisable car diagonale, et N est nilpotente car triangulaire supérieure stricte. En particulier, l'écriture $A = S + N$ est une décomposition de Dunford de A si et seulement si $[S, N] = 0$.

   (b) Écrivons N comme une matrice par blocs : $N = \begin{pmatrix} N_{1,1} & \cdots & N_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{k,1} & \cdots & N_{k,k} \end{pmatrix}$, avec $N_{i,j}$ de taille $r_i \times r_j$. Calculons le commutateur :

$$SN = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_k I_{r_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{1,1} & \cdots & N_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{k,1} & \cdots & N_{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 N_{1,1} & \cdots & \alpha_1 N_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k N_{k,1} & \cdots & \alpha_k N_{k,k} \end{pmatrix}.$$

$$NS = \begin{pmatrix} N_{1,1} & \cdots & N_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{k,1} & \cdots & N_{k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_k I_{r_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 N_{1,1} & \cdots & \alpha_k N_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 N_{k,1} & \cdots & \alpha_k N_{k,k} \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, $[S, N]$ est la matrice par blocs dont les blocs sont $(\alpha_i - \alpha_j)N_{i,j}$. La condition $[S, N] = 0$ se récrit donc :

$$\forall 1 \leq i, j \leq k,\ i \neq j \Rightarrow N_{ij} = 0,$$

   c'est-à-dire que N est diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de tailles successives $r_1, \ldots, r_k$. Notons au passage que cette condition est suffisante pour que $[S, N] = 0$ et donc que $M = S + N$ soit une décomposition de Dunford de M.

3. (a) Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$. Supposons que $B = TU$ comme dans l'énoncé, alors $B = T + T(U - I_n)$. Comme U est unipotente, $U - I_n$ est nilpotente, et comme $[T, U] = 0$, on a $[T, U - I_n] = 0$ et $T(U - I_n)$ nilpotente. Donc l'écriture $B = T + T(U - I_n)$ est la décomposition de Dunford de B, donc nécessairement, si $B = S + N$ est

la décomposition de Dunford de B, alors $T = S$, S est inversible car B l'est, et $U = S^{-1}N + I_n$. Cela montre l'unicité.
Réciproquement, soit $B = S + N$ la décomposition de Dunford de B, alors $S \in GL_n(\mathbb{C})$ et $S^{-1}N$ est nilpotente. Donc $U = S^{-1}N + I_n$ est unipotente. On a aussi $B = SU$ avec S diagonalisable, U unipotente, et $[S, U] = [S, S^{-1}N + I_n] = 0$. Cela montre l'existence.

(b) D'après la question précédente, T est la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford de B, donc $\chi_B = \chi_T$, $Sp(B) = Sp(T)$ et $T \in \mathbb{C}[B]$. Comme T est inversible, $T^{-1} \in \mathbb{C}[T] \subset \mathbb{C}[B]$ (on peut écrire T^{-1} comme polynôme en T grâce à la relation $\chi_T(T) = 0$ et au fait que le coefficient constant de χ_T est $\det T \neq 0$). Ainsi, $U = T^{-1}B \in \mathbb{C}[B]$.

(c) $\Rightarrow$: découle directement de $T_i, U_i \in \mathbb{C}[B_i]$ et $[B_1, B_2] = 0$.
$\Leftarrow$: on a

$$B_1B_2 = T_1U_1T_2U_2 = T_2U_2T_1U_1 = B_2B_1$$

par hypothèse. En particulier, $[B_1, B_2] = 0$.

4. (a) D'après la question 4 de la partie 1, il existe $F \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $F(\alpha_i) = f(\alpha_i)$. Comme la conjugaison est un automorphisme, on a

$$F(S) = P\mathrm{Diag}(F(\alpha_1), \ldots, F(\alpha_n))P^{-1} = P'\mathrm{Diag}(F(\alpha'_1), \ldots, F(\alpha'_n))P'^{-1},$$

d'où le résultat puisque $F(\alpha_i) = f(\alpha_i)$ pour tout i.

(b) Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La convergence d'une série ne dépend donc pas du choix d'une norme, et on peut donc choisir une norme d'algèbre (par exemple, la norme $\|\cdot\|$ subordonnée à une norme sur $\mathbb{C}^n$).
Pour un tel choix de norme, la série $\sum_{k\geq 0} a_k S^k$ converge normalement car la série $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ a un rayon de convergence infini et $\|S^k\| \leq \|S\|^k$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est complet, la convergence normale de la série $\sum_{k\geq 0} a_k S^k$ implique sa convergence ; sa somme est $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n a_k S^k$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n a_k S^k = P(\sum_{k=0}^n a_k \mathrm{Diag}(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k))P^{-1}$. Par continuité de la conjugaison par P, on a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k S^k = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{Diag}(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n))\right)P^{-1}.$$

III L'exponentielle exp : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

1. (a) D'après l'exercice préliminaire 2. (et le calcul immédiat de l'exponentielle d'une matrice diagonale), on a :

$$\exp(S) = P\mathrm{Diag}(\exp(\alpha_1), \ldots, \exp(\alpha_n))P^{-1} = T.$$

(b) Soit F le polynôme d'interpolation défini par $F(\beta_i) = \alpha_i$ (ceci est possible car, par hypothèse, si $\beta_i = \beta_j$, alors $\alpha_i = \alpha_j$, on choisit donc un polynôme d'interpolation en les éléments de l'ensemble $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$).
On a alors $F(T) = P\mathrm{Diag}(F(\beta_1), \ldots, F(\beta_n))P^{-1} = S$, d'où $S \in \mathbb{C}[T]$.

(c) Munissons $\{1,\dots,n\}$ de la relation $i \sim j$ si $\beta_i = \beta_j$. C'est clairement une relation d'équivalence. Soit J une classe d'équivalence et $i_J = \min J$, alors pour $j \in J$, on pose $\alpha'_j = \alpha_{i_J}$. Par construction, on a $\beta_i = \beta_j \Rightarrow \alpha'_i = \alpha'_j$; par ailleurs, les α'_j vérifient bien $\exp(\alpha'_j) = \beta_j$. On peut donc, quitte à changer les α_i, se ramener au cas où l'hypothèse de la question (b) est vérifiée.
Notons au passage (cela sera utile par la suite) que de tels α_i existent toujours ; en effet, la fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ est surjective. Montrons-le rapidement. Soit $z \in \mathbb{C}^\times$, et soit $r = |z| > 0$. Alors, comme la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}+^*$ est strictement croissante, continue et de limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $r = \exp(a)$. Par ailleurs, z/r est de module 1, il s'écrit donc $z/r = \cos t + i \sin t$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. On a alors $\exp(a + it) = re^{it} = z$.

(d) Si $T = P = I_2$, alors $\mathbb{C}[T]$ est l'ensemble des homothéties. Mais $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i\pi \end{pmatrix}$ vérifie $\exp(S) = T$ et pourtant $S \notin \mathbb{C}[T]$.

2. (a) Soit v_n la plus grande puissance de X divisant $L_n \circ E_n(X) - X$. Si $v > v_n$, alors la fonction $x \mapsto \frac{L_n \circ E_n(x) - x}{x^v}$ est non bornée au voisinage de 0. Il suffit donc de montrer que $L_n \circ E_n(x) - x = \mathcal{O}(x^n)$ au voisinage de 0.
Pour cela, remarquons que, par développement de Taylor, $E_n(x) = \exp(x) + \mathcal{O}(x^n)$ au voisinage de 0, et que $L_n(y) = \ln(y) + \mathcal{O}((y-1)^n)$ au voisinage de 1. Ainsi,

$$x = \ln(\exp(x)) = L_n(E_n(x) + \mathcal{O}(x^n)) + \mathcal{O}((E_n(x) - 1)^n) = L_n(E_n(x)) + \mathcal{O}(x^n)$$

au voisinage de 0, car $L_n(E_n(x) + \mathcal{O}(x^n)) = L_n(E_n(x)) + \mathcal{O}(x^n)$ et $E_n(x) - 1 = \mathcal{O}(x)$ au voisinage de 0. On a donc bien $L_n \circ E_n(x) - x = \mathcal{O}(x^n)$ au voisinage de 0, donc $v_n \geq n$ et $L_n \circ E_n - X \equiv 0 \pmod{X^n}$.
De même, si on note w_n la plus grande puissance de $X - 1$ divisant $E_n \circ L_n - X$, il suffit de montrer que $E_n \circ L_n(x) - x = \mathcal{O}((x-1)^n)$ au voisinage de 1 pour montrer que $w_n \geq n$ et donc que $E_n \circ L_n - X \equiv 0 \pmod{(X-1)^n}$. Là encore, un développement de Taylor montre que, pour y au voisinage de 0 :

$$1+y = \exp(\ln(1+y)) = E_n(L_n(1+y)+\mathcal{O}(y^n))+\mathcal{O}(L_n(1+y)^n) = E_n(L_n(1+y))+\mathcal{O}(y^n).$$

On a donc bien $\exp(\ln(x)) - x = \mathcal{O}((x-1)^n)$ pour x au voisinage de 1 (en posant $1 + y = x$), d'où le résultat.

(b) Soit N nilpotente et soit $n \geq 1$ tel que $N^n = 0$. On a $\exp(N) = E_n(N)$ et $\exp(N) - I \in N\mathbb{C}[N]$. Comme N commute avec les polynômes en N, $\exp(N) - I$ est nilpotente, *i.e.* $E_n(N)$ est unipotente.
De même, soit U unipotente, et soit $n \geq 1$ tel que $(U - I_n)^n = 0$, alors $\ln(U)$ est bien défini, et on a $\ln(U) = L_n(U) \in (U - I_n)\mathbb{C}[U - I_n]$. Donc $L_n(U)$ est nilpotente.
Enfin, on a $\ln(\exp(N)) = L_n(E_n(N))$ car $E_n(N)$ est unipotente d'indice n, et donc $L_n(E_n(N)) = N$ d'après la question précédente. De même, on a pour U unipotente d'indice n, $E_n(L_n(U)) = U$. Il en résulte bien que E_n et L_n sont des bijections réciproques entre l'ensembles des matrices nilpotentes et l'ensemble des matrices unipotentes.

3. Soit $B \in GL_n(\mathbb{C})$, écrivons comme en II.3. $B = TU$ avec T diagonalisable et U unipotente telles que $[T, U] = 0$. On a alors $T, U \in \mathbb{C}[B]$.

D'après la question 1., il existe $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $T = \exp(S)$ et $S \in \mathbb{C}[T]$.
D'après la question 2., il existe N nilpotente telle que $U = \exp(N)$, et $N = L_n(U) \in \mathbb{C}[U]$. Comme $T, U \in \mathbb{C}[B]$, on a $S, N \in \mathbb{C}[B]$ et donc $[S, N] = 0$.
Ainsi, $\exp(S+N) = \exp(S)\exp(N) = B$, donc B est dans l'image de exp, ce qui montre que exp est surjective.

IV La fonction matricielle z^A et sa monodromie

1. On sait que $\log_{|\mathbb{R}_+^*} = \ln$, et $\delta(\ln)(x) = 1$ pour $x > 0$. On a donc $\delta(\log)(z) = 1$ pour $z \in \mathbb{R}_+^*$, et donc, d'après le principe du prolongement analytique ($\mathbb{R}_+^*$ possède des points d'accumulation dans l'ouvert connexe Ω) on a $\delta(\log) = 1$.
   De même, si $z \in \mathbb{R}_+^*$, $z^\alpha = \exp(\alpha \ln z)$ donc $\delta(z^\alpha) = \alpha z^\alpha$, donc cette formule est aussi valable pour $z \in \Omega$ par prolongement analytique.
2. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue telle que $\exp \circ f = Id_\Omega$. Alors, pour $z \in \Omega$, $\exp(f - \log)(z) = \exp(f)\exp(-\log)(z) = z \cdot \frac{1}{z} = 1$.
   Ainsi, la fonction $z \mapsto f(z) - \log z$ est continue et à valeurs dans le noyau de l'exponentielle. Ce noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$ qui est discret, donc $f - \log$ est constante : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = \log(z) + 2ik\pi = Log^{(k)}(z)$.
3. (a) Par définition, et d'après II.4.,

$$z^S = \exp(P\mathrm{Diag}(\log(z)\alpha_1, \dots, \log(z)\alpha_n)P^{-1}) = P\mathrm{Diag}(z_1^\alpha, \dots, z^{\alpha_n})P^{-1}$$

   D'autre part,

$$z^N = \exp(\log(z)N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(\log z)^k N^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\log z)^k N^k$$

   car $N^k = 0$ pour $k \geq n$.
   Enfin, comme $[S, N] = 0$, on a pour tout $z \in \Omega$, $[(\log z)S, (\log z)N] = 0$ et :

$$\exp((\log z)(S+N)) = \exp((\log z)S)\exp(\log z)N) = \exp((\log z)N)\exp(\log z)S),$$

   c'est-à-dire $z^A = z^S z^N = z^N z^S$.

   (b) Comme z^N est unipotente, on a $\det(z^N) = 1$, donc $\det(z^A) = \det(z^S) = z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$.
4. Par linéarité des coefficients d'un produit matriciel par rapport aux coefficients des matrices, les coefficients de z^S sont des combinaisons linéaires des z^α pour $\alpha \in Sp(A)$. Pour la même raison, les coefficients de $z^A = z^S z^N$ sont des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $z^\alpha \log(z)^k$ avec $0 \leq k \leq n-1$ et $\alpha \in Sp(A)$. Plus précisément, puisque $z^N = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{1}{k!}(\log z)^k N^k$ avec d l'indice de nilpotence de N, les coefficients de z^A sont des combinaisons linéaires des $z^\alpha(\log z)^k$ avec $0 \leq k \leq d-1$ et $\alpha \in Sp(A)$.
5. Soit $f \in \mathcal{O}$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $\delta((f(z)A)^n) = nzf'(z)f(z)^{n-1}A^n = n\delta(f)A(f(z)A)^{n-1}$. Ainsi, $\delta((f(z)A)^n/n!) = \delta(f)A(f(z)A)^{n-1}/(n-1)!$. Par convergence normale de la série définissant $\exp(f(z)A)$, on a :

$$\delta[\exp(f(z)A)] = \delta(f)A\exp(f(z)A).$$

   Pour $f(z) = \log(z)$, cela donne $\delta(z^A) = Az^A = z^A A$ car A commute avec z^A qui est un polynôme en A pour tout $z \in \Omega$.

6. Soit $\mathcal{X} \in \mathcal{O}$ tel que $\delta(\mathcal{X}) = A\mathcal{X}$. On a alors :

$$\delta(z^{-A}\mathcal{X}) = -Az^{-A}\mathcal{X} + z^{-A}A\mathcal{X} = 0.$$

Ainsi, $z^{-A}\mathcal{X}$ est constante égale à $C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$. Il reste à remarquer que $z^A z^{-A} = z^0 = I_n$, d'où on tire que $\mathcal{X} = z^A C$.

7. (a) On a $[z^A]_k = \exp(f(z)A)$ avec $f(z) = Log^{(k)}(z)$. Or $\delta(Log^{(k)}) = \delta(\log) = 1$, donc la formule en 5. montre que $\delta([z^A]_k) = A[z^A]_k$. D'après la question 6., il existe $M_k \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $[z^A]_k = z^A M_k$.
Pour calculer M_k, il suffit de prendre $z = 1$, qui fournit $z^A = I_n$ et $[z^A]_k = \exp(2ik\pi A)$, d'où $M_k = \exp(2ik\pi A)$.

   (b) Il suffit de vérifier que $M_0 = I_n$ (ce qui est immédiat) et que pour $k, \ell \in \mathbb{Z}$, $M_{k+\ell} = M_k M_\ell$, ce qui est immédiat aussi car $[2ik\pi A, 2i\ell\pi A] = 0$ donc $\exp(2ik\pi A)\exp(2i\ell\pi A) = \exp(2i(k+\ell)\pi A)$.

8. On a $\rho_A(1) = \exp(2i\pi A)$, et donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\rho_A(k) = \exp(2i\pi A)^k$. De plus, la question préliminaire 4. montre aussi que ρ_A et ρ_B sont équivalentes si et seulement si $\exp(2i\pi A)$ et $\exp(2i\pi B)$ sont semblables. En vertu de la question préliminaire 2., c'est le cas si et seulement si A et B sont semblables.

V Algèbres différentielles et automorphismes différentiels

1. (a) D'une part, pour tout $l = \sum m_i\alpha_i \in$, on a $z^l = z^{m_1\alpha_1+\cdots+m_l\alpha_l} = \prod_{i=1}^n (z^{\alpha_i})^{m_i} \in \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A} \supset \sum_{l\in L} \mathbb{C}z^l$. D'autre part, il est clair que tous les α_i sont dans L, il suffit donc de montrer que $\sum_{l\in L} \mathbb{C}z^l$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$. Par linéarité du produit, cela découle de la formule $z^{l+l'} = z^l z^{l'}$ pour $l, l' \in L$ et $z \in \Omega$, et du fait que $1 = z^0$ avec $0 \in L$.

   (b) Par $\mathbb{C}$-linéarité de δ, il suffit de vérifier que si $l \in L$, $\delta(z^l) \in \mathcal{A}$. Or $\delta(z^l) = lz^l \in \mathcal{A}$, d'où le résultat.

   (c) La famille considérée est génératrice d'après (a), il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Supposons qu'elle ne le soit pas : soit k minimal tel qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i z^{l_i} = 0$ avec les l_i deux à deux distincts. En appliquant δ, on obtient $0 = \sum_{i=1}^k l_i\lambda_i z^{l_i} - l_1 \sum_{i=1}^k \lambda_i z^{l_i}$, une relation de dépendance linéaire strictement plus courte. En particulier, les $\lambda_i(l_i - l_1)$ pour $i \geq 2$ sont tous nuls, et comme les l_i sont distincts, on a $\lambda_i = 0$ pour $i \geq 2$. Il en résulte que $0 = \lambda_1$, une contradiction. Donc la famille est libre : c'est une base de $\mathcal{A}$.

   (d) Soient $l \in L$ et $u, v \in A$ tels que $\delta v = lv$ et $\delta u = v + lu$. Décomposons u, v sur la base précédente : $u = \sum \lambda_i z^{r_i}$, $v = \sum \mu_j z^{s_j}$. On a alors $\delta v = \sum s_j\mu_j z^{s_j} = lv$, et par liberté de la famille z^{s_j}, on a pour tout j tel que $s_j \neq l$, $s_j\mu_j = l\mu_j$. Ainsi, $v = \mu z^l$.
On a alors $\delta u - lu = \sum_i (r_i - l)\lambda_i z^{r_i} = \mu z^l$. Ainsi, pour tout i tel que $r_i \neq l$, on a $r_i = 0$, et $\mu = l - l = 0$. Finalement, $v = 0$ et $\delta u = lu$ donc $u \in \mathbb{C}z^l$ d'après le cas précédent.

2. (a) Il est clair que si $f \in \mathcal{A}$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $f(\log)^k \in \mathcal{A}'$, d'où l'inclusion dans le sens réciproque par linéarité. Pour le sens direct, il suffit de vérifier que le membre de gauche de l'égalité est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$, puisqu'elle contient clairement les z^{α_i} et log.

Toujours par linéarité, il suffit de voir que si $f, g \in \mathcal{A}$, alors $f(\log)^k \cdot g(\log)^{k'} \in \mathcal{A}'$, ce qui est immédiat car $\mathcal{A}$ est une algèbre et $(\log)^k(\log)^{k'} = (\log)^{k+k'}$.

(b) Soit $f \in \mathcal{A}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a $\delta(f(\log)^k) = \delta(f)(\log)^k + kf(\log)^{k-1} \in \mathcal{A}'$, d'où la stabilité par dérivation par linéarité de δ.

3. (a) Choisissons u, v tels que $u + v\log = 0$ tels que v soit combinaison linéaire d'un nombre minimal (non nul) de z^{l_i} : $v = \sum_{i\geq 1} \lambda_i z^{l_i}$. On a alors $\delta(u + v\log) = \delta(u) + v + \delta(v)\log$. Ainsi, $0 = \delta(u) - l_1 u + v + (\delta(v) - l_1 v)\log$. Par minimalité la longueur de v, on a $\delta(v) = l_1 v$. Mais alors $\delta(u) - l_1 u = -v$ avec $\delta(-v) = -l_1 v$, donc d'après 1.(d), $v = 0$ (et $u \in \mathbb{C}z^{l_1}$), et donc $u = 0$.

(b) Soit $\sum_{0\leq k\leq p} f_k \log^k = 0$ une relation de longueur minimale. Par dérivation, on obtient $0 = \sum_{0\leq k\leq p} \delta(f_k)\log^k + \sum_{0\leq k\leq p} kf_k \log^{k-1} = \delta(f_p)\log^p + \sum_{0\leq k<p} g_k \log^k$. On en déduit que $-\delta(f_p)\sum_{0\leq k\leq p} f_k \log^k + f_p\delta(f_p)\log^p + \sum_{0\leq k<p} f_p g_k \log^k = 0$, et donc la relation de dépendance de longueur $< p$, $\sum_{0\leq k<p}(f_p g_k - \delta(f_p)f_k)\log^k = 0$ est triviale.
Pour $k = p-1$, on a $g_{p-1} = f_{p-1} + pf_p$, et donc $-\delta(f_p)f_{p-1} + pf_p^2 + \delta(f_{p-1})f_p = 0$. Comme $f_p \neq 0$, on a sur l'ouvert non vide $\{z \in \Omega \mid f_p(z) \neq 0\}$, la relation

$$\delta(f_{p-1}/f_p) = \frac{\delta(f_{p-1})f_p - f_{p-1}\delta(f_p)}{f_p^2} = -p.$$

Mais alors, on a $f_{p-1}/f_p + p\log$ est constante sur cet ouvert, égale à un $c \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, $f_{p-1} - cf_p + pf_p\log = 0$ sur cet ouvert, donc sur Ω par prolongement analytique. Ceci contredit le résultat de (a). Donc $f_p = 0$ et l'écriture $\sum_{0\leq k\leq p} f_k \log^k$ d'un élément de $\mathcal{A}'$ est unique.

4. Soit $\mathcal{B}$ stable par δ. On a $Id_\Omega \in \mathcal{B}$, et si $\sigma_1, \sigma_2 \in Aut_{PV}(\mathcal{B})$ alors $\sigma_1\sigma_2$ commute avec δ et est bijectif, donc $\sigma_1\sigma_2 \in Aut_{PV}(\mathcal{B})$. Enfin, en composant à gauche et à droite par l'inverse de σ la relation $\sigma\delta = \delta\sigma$, on vérifie que $Aut_{PV}(\mathcal{B})$ est stable par passage à l'inverse.

5. (a) C'est une conséquence immédiate de la question IV.4. et de la définition de $\mathcal{A}'$.

(b) On a $\delta\sigma(z^A) = \sigma\delta(z^A) = \sigma(Az^A) = \sigma(A)\sigma(z^A)$. Comme A est à coefficients constants, on a nécessairement $\sigma(A) = A$ donc $\delta\mathcal{X} = A\mathcal{X}$. En particulier, il existe d'après IV.6 une unique matrice $M_\sigma \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathcal{X} = z^A M_\sigma$.

(c) On a clairement $M_{Id_\Omega} = I_n$. De plus, si $\sigma_1, \sigma_2 \in Aut_{PV}(\mathcal{B})$, alors $\sigma_1\sigma_2(z^A) = z^A M_{\sigma_1\sigma_2}$, d'une part, et d'autre part $\sigma_1\sigma_2(z^A) = \sigma_1(z^A M_{\sigma_2}) = z^A M_{\sigma_1}\sigma_1(M_{\sigma_2})$. Comme M_{σ_2} est constante, on a donc $M_{\sigma_1\sigma_2} = M_{\sigma_1}M_{\sigma_2}$, et donc $\sigma \mapsto M_\sigma$ est une représentation de $Aut_{PV}(\mathcal{A}')$.

VI Groupes et représentations de Picard-Vessiot

1. (a) Soit $\sigma \in Aut_{PV}(\mathcal{A}')$. On a $\delta(\sigma(\log) - \log) = \sigma(\delta(\log)) - \delta(\log) = \sigma(1) - 1 = 0$. Ainsi, il existe $\lambda_\sigma \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma(\log) - \log = \lambda_\sigma$. Un tel λ_σ est évidemment unique.

(b) Soit $l \in L$. Comme z^l ne s'annule pas sur Ω, on a :

$$\delta\left(\frac{\sigma(z^l)}{z^l}\right) = \frac{\sigma(lz^l)z^l - \sigma(z^l)lz^l}{z^{2l}} = 0.$$

Ainsi, $\sigma(z^l)/z^l$ est constante (non nulle car σ est injectif et $z^l \neq 0$), donc il existe $c_l \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\sigma(z^l) = c_l z^l$, et un tel c_l est évidemment unique.
De plus, soit $l' \in \mathbb{C}$, alors $\sigma(z^l z^{l'}) = c_l c_{l'} z^l z^{l'}$, donc $c_{l+l'} = c_l c_{l'}$.

(c) D'après V.1.(a) et par $\mathbb{C}$-linéarité de σ, pour montrer que $\mathcal{A}$ est stable par σ il suffit de vérifier que tous les $\sigma(z^l)$ sont dans $\mathcal{A}$. C'est bien le cas d'après (b). En outre, la restriction de σ à $\mathcal{A}$ définit bien un endomorphisme de $\mathcal{A}$, qui commute avec δ. Il suffit donc de montrer que c'est un automorphisme. Or $\sigma_{|\mathcal{A}}$ est injectif car σ l'est, et surjectif car, si pour tout $1 \leq i \leq m$, $l_i \in L$ et $\lambda_i \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{i=1}^m \lambda_i z^{l_i} = \sigma(\sum_{i=1}^m (\lambda_i/c_{l_i}) z^{l_i})$. C'est donc bien un automorphisme de $\mathcal{A}$ compatible avec la dérivation.

2. (a) Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in Aut_{PV}(\mathcal{A}')$, on a :

$$\lambda_{\sigma_1\sigma_2} = \sigma_1\sigma_2(\log) - \log = \sigma_1(\log) - \log + \sigma_1(\sigma_2(\log) - \log) = \lambda_{\sigma_1} + \sigma_1(\lambda_{\sigma_2}) = \lambda_{\sigma_1} + \lambda_{\sigma_2}.$$

Comme $\Psi(id_{\mathcal{A}'}) = (id_{\mathcal{A}}, 0)$, cela montre que Ψ est un morphisme de groupes.
De plus, si $\sigma \in \ker \Psi$, alors $\sigma_{|\mathcal{A}} = id_{\mathcal{A}}$, et $\sigma(\log) = \log$. Par définition de $\mathcal{A}' = \mathcal{A}[\log]$, on a alors $\sigma = id_{\mathcal{A}'}$. Donc Ψ est injectif.

(b) Soient $\sigma_0 \in Aut_{PV}(\mathcal{A})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $f = \sum_k f_k \log^k \in \mathcal{A}'$. Si σ est comme dans l'énoncé, alors nécessairement, par linéarité et compatibilité au produit, on a :

$$\sigma(f) = \sum_k \sigma_0(f_k)(\log + \lambda)^k.$$

Définissons donc σ par cette formule. Par unicité de l'écriture de f obtenue en V.3., cela définit bien une application $\sigma : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}'$ (et cela montre l'unicité d'un tel σ. Cette application est clairement $\mathbb{C}$-linéaire et compatible avec le produit, et on a $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(id_{\mathcal{A}'}) = id_{\mathcal{A}'}$. De plus, si pour $g = \sum g_k \log^k \in \mathcal{A}'$ on pose $\tau(g) = \sum_k \sigma_0^{-1}(g_k)(\log - \lambda)^k$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \tau\sigma(f) & = & \tau\left(\sum_{i\geq 0}\left[\sum_{k\geq i}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}\sigma_0(f_k)\right]\log^i\right) \\ & = & \sum_{i\geq 0}\left[\sum_{k\geq i}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}f_k\right](\log-\lambda)^i \\ & = & \sum_{k\geq 0} f_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}\lambda^{k-i}(\log-\lambda)^i \\ & = & \sum_{k\geq 0} f_k \log^k \\ & = & f. \end{array}$$

De même, on vérifie que $\tau \circ \sigma(f) = f$. Ainsi, on a bien $\sigma \in Aut(\mathcal{A}')$, d'inverse τ.

(c) Il reste à vérifier que σ, défini en (b), est compatible avec δ, ce qui montrera la surjectivité de Ψ et donc le fait que c'est un automorphisme. Or, pour $k \geq 0$, on a $\delta(\sigma(\log^k)) = \delta((\log+\lambda)^k) = k(\log+\lambda)^{k-1} = \sigma(\delta(\log^k))$; d'autre part, on a pour $f \in \mathcal{A}$, $\sigma(\delta(f)) = \delta(\sigma(f))$ car $\sigma_{|\mathcal{A}} = \sigma_0 \in Aut_{PV}(\mathcal{A})$.
Ainsi,

$$\delta(\sigma(f\log^k)) = \delta(\sigma(f)\sigma(\log^k)) = \delta(\sigma(f))\sigma(\log^k) + \sigma(f)\delta(\sigma(\log^k)) = \sigma(\delta(f\log^k)).$$

Par $\mathbb{C}$-linéarité, σ est compatible avec δ et donc $\sigma \in Aut_{PV}(\mathcal{A}')$, et Ψ est un isomorphisme.

3. Le groupe G est abélien de type fini, non nul et engendré par la famille $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ possédant au plus n éléments. Comme G est un sous-groupe de $\mathbb{C}$, il est sans torsion. D'après le théorème de classification des groupes abéliens de type fini, G est isomorphe à $\mathbb{Z}^m$ pour un certain $1 \leq m \leq n$.
On note $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ la base canonique du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^m$. L'application $\varphi : \hat{\mathbb{Z}}^m \to (\mathbb{C}^\times)^m$ définie par $f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_m))$ est clairement un morphisme de groupe. On a $f \in \ker\varphi$ si et seulement si $f(e_i) = 1$ pour tout $1 \leq i \leq m$, donc φ est injectif. De plus, soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in (\mathbb{C}^\times)^m$, alors la formule $f(\sum_{i=1}^m a_i e_i) = \lambda_1^{a_1} \cdots \lambda_m^{a_m}$ définit un élément de $\hat{\mathbb{Z}}^m$ dont l'image par φ est $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, d'où la surjectivité de φ. Ainsi, φ est un isomorphisme, et donc $\hat{G} \simeq (\mathbb{C}^\times)^m$.

4. (a) Soit $f \in \hat{G}$. Comme la famille $\{z^l \mid l \in L\}$ est une base de $\mathcal{A}$, il existe une unique application σ_f, $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathcal{A}$, telle que $\sigma_f(z^l) = f(l)z^l$. C'est un automorphisme car $\sigma_{f^{-1}}$, défini de manière analogue, en est clairement un inverse.
On a de plus $\sigma_f(1) = \sigma_f(z^0) = f(0) = 1$, et $\sigma_f(z^l z^{l'}) = \sigma_f(z^{l+l'}) = f(l+l')z^{l+l'}$. Comme f est un morphisme de groupes, on a donc $\sigma_f(z^l z^{l'}) = f(l)f(l')z^{l+l'} = \sigma_f(z^l)\sigma_f(z^{l'})$. Par linéarité de σ_f, σ_f est compatible avec la multiplication, c'est donc un automorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre.
Enfin, pour $l \in L$, $\sigma_f(\delta(z^l)) = \sigma_f(lz^l) = f(l)lz^l = \delta(\sigma_f(z^l))$. Ainsi, σ_f est compatible avec δ, c'est donc un élément de $Aut_{PV}(\mathcal{A})$.

   (b) Pour $f_1, f_2 \in \hat{G}$, et $l \in L$, on a $\sigma_{f_1 f_2}(z^l) = f_1(l)f_2(l)z^l$, donc $\sigma_{f_1 f_2} = \sigma_{f_1}\sigma_{f_2}$. Comme $\sigma_{1_{\hat{G}}} = 1$, $f \mapsto \sigma_f$ est un morphisme de groupes.
Si f est dans le noyau de ce morphisme, alors pour tout $l \in L$, $f(l) = 1$ puisque $\{z^l\}$ est une base (donc une famille libre) de $\mathcal{A}$. Mais alors, $f = 1_{\hat{G}}$, donc $f \mapsto \sigma_f$ est injectif.
Par ailleurs, si $\tau \in Aut_{PV}(\mathcal{A})$, on peut définir $f \in \hat{G}$ par $f(l_1 - l_2) = c_{l_1}(\tau)c_{l_2}(\tau)^{-1}$ si $l_1, l_2 \in L$ (où $c_l(\tau)$ est défini comme en VI.1. par $\tau(z^l) = c_l(\tau)z^l$) En effet, si $l_1 - l_2 = l_1' - l_2' \in G$, alors $l_1 + l_2' = l_1' + l_2 \in L$, et $\tau(z^{l_1})\tau(z^{l_2'}) = \tau(z^{l_1+l_2'}) = \tau(z^{l_1'+l_2}) = \tau(z^{l_1'})\tau(z^{l_2})$, d'où $c_{l_1}(\tau)c_{l_2}(\tau)^{-1} = c_{l_1'}(\tau)c_{l_2'}(\tau)^{-1}$. Donc la valeur de l'expression donnée pour $f(g)$ ne dépend pas du choix de $l_1, l_2 \in L$ tels que $g = l_1 - l_2$. On vérifie alors immédiatement que $f \in \hat{G}$. Cela montre la surjectivité de $f \mapsto \sigma_f$.

5. Soit $f \in \hat{G}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a, pour $l \in L$, $\sigma_{f,\lambda}(z^l) = f(l)z^l$, et pour $k \geq 0$, $\sigma_{f,\lambda}(\log^k) = (\log + \lambda)^k$.
Soit $A = S + N$ la décomposition de Dunford de A et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $S = P\mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)P^{-1}$. D'après IV.3., on a :

$$\sigma_{f,\lambda}(z^S) = P\mathrm{Diag}(f(\alpha_1)z_1^\alpha, \dots, f(\alpha_n)z^{\alpha_n})P^{-1} = f(S)z^S$$

et

$$\sigma_{f,\lambda}(z^N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\log z + \lambda)^k N^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\log e^\lambda z)^k N^k = (e^\lambda z)^N = e^{\lambda N} z^N$$

Ainsi, comme z^N et z^S commutent, on a $\sigma_{f,\lambda}(z^A) = f(S)z^S \exp(\lambda N)z^N = f(S)\exp(\lambda N)z^A$. Par suite, on a $\rho''_A(f, \lambda) = f(S)\exp(\lambda N)$.

6. D'après la partie IV., on a $\rho_A(k) = \exp(2ik\pi A)$. S'il existe un tel morphisme $\varphi : \mathbb{Z} \to \hat{G} \times \mathbb{C}$, alors φ vérifie $\varphi(k) = (f_k, \lambda_k)$ avec, pour $A = S+N$ décomposition de Dunford de A, $f_k(S)\exp(\lambda N) = \exp(2ik\pi A)$. Comme $f_k(S)$ est diagonalisable et $\exp(\lambda_N)$

est unipotente, il suffit d'écrire la décomposition correspondante pour $\exp(2ik\pi A) = \exp(2ik\pi S)\exp(2ik\pi N)$. On a donc nécessairement $f_k(S) = \exp(2ik\pi S) = S^{2i\pi k}$ et $\exp(\lambda_k N) = \exp(2i\pi kN)$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$, posons alors

$$\begin{cases} f_k(\alpha) &= \exp(2i\pi\alpha)^k \quad \text{pour } \alpha \in G\ ; \\ \lambda_k &= 2ik\pi. \end{cases}$$

Il est alors clair que $k \mapsto f_k$ est un morphisme de groupes $f : \mathbb{Z} \to \hat{G}$ et $k \mapsto \lambda_k$ est un morphisme de groupes $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Donc $(f, \lambda) : \mathbb{Z} \to \hat{G} \times \mathbb{C}$ défini par $k \mapsto (f_k, \lambda_k)$ est un morphisme de groupes, et $\rho''_A \circ \varphi(k) = f_k(S)\exp(\lambda_k N) = S^{2ik\pi}N^{2ik\pi} = \rho_A(k)$.