Algèbre linéaire 3

Examen (première session) : durée 2 heures

Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. ***Toutes les réponses devront être dûment justifiées****.*

Problème 1

Soit K un corps, soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1 Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que $F = \ker v$ est un sous-espace stable par u.

But du problème. Le but du problème est de démontrer la réciproque du résultat établi à la question précédente, à savoir que si $F \subset E$ est stable par u, alors il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $uv = vu$ et $F = \ker v$. On fixe donc F un sous-espace stable par u. On rappelle de résultat suivant :

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(K)$, il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $PMP^{-1} = {}^tM$.

2 Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de F, que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Justifier que la matrice de u dans cette base est de la forme $U = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_k(K)$, $B \in \mathscr{M}_{k,n-k}(K)$ et $C \in \mathscr{M}_{n-k}(K)$.

3 Démontrer qu'il existe des matrices $P_3 \in \mathscr{M}_{k,n-k}(K)$ et $P_4 \in \mathscr{M}_{n-k,n-k}(K)$ telles que $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = n-k$, ${P_3}^t C = AP_3 + BP_4$, et ${P_4}^t C = CP_4$.

4 Soit $P \in GL_{n-k}(K)$ telle que $PCP^{-1} = {}^tC$. On pose $V = \begin{pmatrix} 0 & P_3P \\ 0 & P_4P \end{pmatrix}$. Vérifier que $UV = VU$.

5 Démontrer que $\ker V = F$ et conclure.

Problème 2

But du problème. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel non nul et $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme unitaire non constant de $\mathbf{C}[X]$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de P dans $\mathbf{C}$ (comptées avec multiplicités) de sorte que $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Si $k \in \mathbb{N}$ est un entier naturel non nul, on pose

$$s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

On note $I_n \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice identité. Le but de ce problème est de montrer les identités

de Newton

$$s_k + s_{k-1}a_{n-1} + \cdots + s_{k-n}a_0 = 0 \qquad \text{si } k > n \tag{1}$$

$$s_k + s_{k-1}a_{n-1} + \cdots + s_1 a_{n-k+1} = -k a_{n-k} \qquad \text{si } k \in [\![1, n]\!] \tag{2}$$

en utilisant la trace et la matrice compagnon du polynôme P :

$$C := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(questions **1** à **6**). À la question **7** on donne une application aux matrices nilpotentes. On pourra utiliser sans le démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable.

1 Justifier que le polynôme caractéristique de C est égal à P puis montrer que $\operatorname{tr}(C^k) = s_k$.

2 On suppose $k > n$. Montrer l'égalité $C^k + a_{n-1}C^{k-1} + \cdots + a_0 C^{k-n} = 0$ puis en déduire la relation de Newton (1).

3 On pose $Q_n = 1$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$Q_{n-k} = X^k + a_{n-1}X^{k-1} + \cdots + a_{n-k} \in \mathbf{C}[X]$$

de sorte que $Q_0 = P$. Montrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$Q_{n-k}(C) = C\,Q_{n-k+1}(C) + a_{n-k} I_n$$

4 Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Justifier que $P(\lambda)I_n = P(\lambda I_n)$ puis prouver l'égalité dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$

$$P(\lambda)I_n = (\lambda I_n - C)\left(\sum_{k=1}^{n} Q_k(C)\lambda^{k-1}\right).$$

5 On suppose que λ n'est pas une racine de P. Justifier que $\lambda I_n - C$ est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et montrer que

$$\operatorname{tr}\left[(\lambda I_n - C)^{-1}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \lambda_i}.$$

6 En déduire l'égalité dans $\mathbf{C}[X]$

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tr}(Q_k(C))X^{k-1} = P'$$

où P' est le polynôme dérivé de P puis l'identité de Newton (2).

7 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$.