UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre linéaire 3

Examen (première session) : durée 2 heures

Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. ***Toutes les réponses devront être dûment justifiées****.*

Problème 1

But du problème. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel non nul et $\mathbf{K}$ un corps. Le but de ce problème est de prouver le résultat suivant : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est cyclique, alors toute matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $PAP^{-1} = {}^tA$ est symétrique.

Notations, rappels. Si $M \in \mathscr{M}_N(\mathbf{K})$, on note μ_M le polynôme minimal de M et χ_M son polynôme caractéristique. Soit $Q \in \mathbf{K}[T]$ un polynôme unitaire. On note C_Q la matrice compagnon du polynôme Q. On rappelle que les polynômes minimal et caractéristique de C_Q sont égaux à Q. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est dite cyclique lorsque $\mu_A = \chi_A$ (ce qui revient à dire que tout endomorphisme représenté par A est cyclique ou que A est semblable à une matrice compagnon).

On note $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n et on rappelle que

$$\dim(\mathscr{S}_n(\mathbf{K})) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si V est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(V)$, on pose $\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(V) : v \circ u = u \circ v\}$. De même si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on pose $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) : BA = AB\}$.

Questions préliminaires.

1 Soit $u \in \mathscr{L}(V)$ et W un sous-espace vectoriel de V. On note $\pi : V \to V/W$ l'application canonique.

a Justifiez que $u^{-1}(W) = \mathrm{Ker}(\pi \circ u)$.

b En déduire que $\dim(u^{-1}(W)) \geqslant \dim(W)$.

2 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

a Montrer que le polynôme minimal de ${}^tM$ est égal au polynôme minimal de M.

b Soit $Q \in \mathbf{K}[T]$. En déduire que les matrices C_Q et ${}^tC_Q$ sont semblables.

c Montrer que M et ${}^tM$ sont semblables (on pourra utiliser la réduction de Frobenius).

3 Soit V un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(V)$ un endomorphisme cyclique. On fixe un vecteur $x_0 \in V$ cyclique pour u c'est-à-dire tel que $\mathscr{B} := (x_0, u(x_0) \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de V.

a Si $v \in \mathscr{C}(u)$, montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{K}[T]$ tel que $v(x_0) = Q(u)(x_0)$.

b En déduire que $v = Q(u)$.

c Justifiez que $\mathscr{C}(u) = \mathbf{K}[u]$.

d Montrer que $\dim(\mathbf{K}[u]) = n$. (On pourra admettre que si $Q \in \mathbf{K}[T]$ est un polynôme de degré d alors $\dim(\mathbf{K}[T]/Q\mathbf{K}[T]) = d$).

Preuve du résultat.

4 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ formé des matrices $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $PA = {}^tAP$. On note

$$F = E \cap \mathscr{S}_n(\mathbf{K}).$$

a Montrer que $P \in F$ si et seulement si les matrices P et PA sont symétriques.

b On note G l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que PA soit symétrique. Justifier que

$$\dim(G) \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

puis en déduire que $\dim(F) \geqslant n$.

5 On suppose que A est une matrice cyclique.

a Dans la question **2 c** on a vu que A et ${}^tA$ sont semblables. On fixe donc une matrice $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $P_0AP_0^{-1} = {}^tA$. Montrer qu'une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ appartient à E si et seulement si $P_0^{-1}P$ appartient à $\mathscr{C}(A)$.

b En déduire que $\dim(E) = n$ puis que $\dim(F) \leqslant n$.

c Conclure que toute matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $PAP^{-1} = {}^tA$ est symétrique.

Problème 2

But du problème. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Le but du problème est de montrer que u est normal si et seulement s'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $u^* = P(u)$, et d'étudier quelques cas particuliers.

Notations, rappels. Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\,|\,\rangle$. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, et pour $v \in \mathscr{L}(E)$ on note v^* l'adjoint de v, dont on rappelle que c'est l'unique endomorphisme de E vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x, y \in E,\ \big\langle x \big| v(y) \big\rangle = \big\langle v^*(x) \big| y \big\rangle$$

On rappelle que v est dit normal s'il commute avec v^*. Pour $M \in M_n(\mathbf{C})$, on note $\bar{M}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M.

1 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $u^* = P(u)$. Démontrer que u est normal.

2 Énoncer le théorème de réduction des endomorphismes normaux de E.

3 Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $b \neq 0$. On note $\lambda = a + ib \in \mathbf{C}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

a Vérifier que ${}^t\bar{P}P = I_2$ et que ${}^t\bar{P}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$.

c Soit $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $Q(\lambda) = \bar{\lambda}$. Démontrer que $Q(A) = {}^tA$.

4 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal.

a On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes distinctes de u. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ de degré r tel que $Q(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

b Démontrer que pour toute valeur propre complexe λ de u, $\bar{Q}(\lambda) = \bar{\lambda}$.

c En déduire que $Q \in \mathbf{R}[X]$.

d Démontrer que $Q(u) = u^*$.

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On note $N_P(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E tels que $u^* = P(u)$.

5 Décrire l'ensemble des classes de similitude de $N_X(E)$ et montrer qu'il est infini.

6 Soit $k \geq 2$ un entier, et soit $u \in N_{X^k}(E)$.

a Démontrer que les valeurs propres complexes de u vérifient la relation $\bar{\lambda} = \lambda^k$.

b En déduire que les valeurs propres complexes de u sont de la forme $e^{\frac{2ip\pi}{k+1}}$ pour des entiers $p \in \mathbb{N}$.

7 Soit $k \geq 2$. Démontrer que l'ensemble des classes de similitude de $N_{X^k}(E)$ est fini.