Problème :

(1) La matrice $P(\sigma)$ est de rang n donc inversible dans $M_n(\mathbb{K})$.

En effet, en notant $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ on voit que les colonnes de $P(\sigma)$ sont $E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(n)}$ qui forment également une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

On peut aussi remarquer que $\det(P(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)$ où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ. En effet, par définition

$$\det(P(\sigma)) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\tau)\, P(\sigma)_{\tau(1),1} \cdots P(\sigma)_{\tau(n),n}$$

Les termes de la somme sont nuls lorsque $\tau \neq \sigma$ et l'on a donc

$$\det(P(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)\, P(\sigma)_{\sigma(1),1} \cdots P(\sigma)_{\sigma(n),n} = \varepsilon(\sigma)$$

qui est non nul.

Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Par définition du produit de matrices

$$(P(\sigma)\cdot P(\tau))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} P(\sigma)_{ik}\, P(\tau)_{kj} = P(\sigma)_{i,\tau(j)}\, P(\tau)_{\tau(j),j} = P(\sigma)_{i,\tau(j)}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma\circ\tau(j) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que $P(\sigma)\cdot P(\tau) = P(\sigma\circ\tau)$ et prouve que l'application

$$\begin{aligned} P : \mathfrak{S}_n &\longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ \sigma &\longmapsto P(\sigma) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

(2) On suppose qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\tau = \sigma^{-1}\sigma\sigma$. Comme P est un morphisme de groupes, on a $P(\tau) = P(\sigma)^{-1} P(\sigma) P(\sigma)$ et les matrices $P(\sigma)$ et $P(\tau)$ sont donc semblables.

(3) Par définition lorsque $\sigma = (1, 2, \dots, n)$ on a

$$P(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice compagnon du polynôme $X^n - 1$.

(4) Deux n-cycles sont conjugués et les matrices qui leur sont associées sont donc semblables. En particulier elles ont même polynôme caractéristique. Il suffit donc de calculer le polynôme caractéristique pour le n-cycle $\sigma=(1,2,\dots,n)$. Ce dernier est X^n-1 puisque $P(\sigma)$ est la matrice compagnon du polynôme X^n-1.

Considérons le cas général. Si $\sigma=\mathrm{Id}$ alors $P(\sigma)=I_n$ et l'on a donc

$$\chi_{P(\sigma)}=X^n-1$$

ce qui coincide avec l'expression donnée puisque dans ce cas $c_1(\sigma)=n$ et $c_k(n)=0$ pour $k\in[\![2,n]\!]$. Supposons donc $\sigma\neq\mathrm{Id}$ et considérons un $\mathbb{C}$-ev E de dimension n. Fixons une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et notons $u\in\mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme représentant $P(\sigma)$. En permutant les vecteurs de $\mathcal{B}$ on peut obtenir une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec un bloc de la forme $I_{c_1(\sigma)}$ et pour tout $k\in[\![2,n]\!]$ $c_k(\sigma)$ blocs égaux à la matrice compagnon du polynôme X^k-1. (On utilise pour cela une décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints).

On a donc

$$\boxed{\chi_{P(\sigma)}=\chi_u=\prod_{k=1}^{n}(X^k-1)^{c_k(\sigma)}}$$

(5) Soit ξ une racine de l'unité d'ordre $m\in[\![1,n]\!]$. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, ξ est racine de X^k-1 si et seulement si $m\mid k$ et dans ce cas c'est une racine simple.

La multiplicité de ξ comme racine de $\chi_{P(\sigma)}$ est donc égale à

$$\boxed{\sum_{m\mid k}c_k(\sigma)}$$

(6) On a $\chi_{P(\sigma)}=\chi_{P(\tau)}$ et en comparant les multiplicités d'une racine de l'unité ξ d'ordre m, on obtient

$$\boxed{\sum_{m\mid k}c_k(\sigma)=\sum_{m\mid k}c_k(\tau)}$$

pour tout $m\in[\![1,n]\!]$.

(7) On utilise les notations introduites dans l'énoncé, et on pose pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$

$$C(\sigma)\cdot A=(d_1,\dots,d_m)$$

Par définition du produit de matrices, on a pour $m \in [\![1,n]\!]$

$$d_m = \sum_{k=1}^{n} c_k(\sigma)\, A_{km} = \sum_{m|k} c_k(\sigma)$$

et l'on a donc $C(\sigma)\cdot A = C(\tau)\cdot A$. Pour conclure il suffit de montrer que A est inversible. Si $j > i$ alors $A_{ij} = 0$ puisque dans ce cas j ne divise pas i. La matrice A est donc triangulaire inférieure. Comme ses coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, on a $\det(A) = 1$ ce qui conclut.

(8) Ceci conclut la preuve du resultat de Brauer, le sens direct résulte de la question (2) tandis que la réciproque est vérifiée à la question (7).