Université de Rennes

Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle Continu n° 3 (1h30)

Barème indicatif : 4/9/5/2.

Exercice 1 [Coréduction de formes quadratiques]

On propose de donner un exemple de deux formes quadratiques réelles qui n'ont pas de bases orthogonales communes. On considère les formes quadratiques q_1 et q_2 définies sur $\mathbb{R}^2$ par leurs expressions en coordonnées :

$$q_2(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad q_2(x,y) = 2xy.$$

On note b_1 et b_2 les formes polaires associées respectivement à q_1 et q_2.

1. Déterminer les signatures de q_1 et q_2. Les formes quadratiques q_1 et q_2 sont-elles congruentes ?

2. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Exprimer, en fonction des coordonnées de X et X', des expressions de $b_1(X,X')$ et $b_2(X,X')$.

3. En déduire que le système d'équations $b_1(X,X') = b_2(X,X') = 0$ est équivalent au système linéaire $MX = 0$, où M est une matrice ne dépendant que de X' que l'on explicitera.

4. Démontrer que si $b_1(X,X') = b_2(X,X') = 0$, alors $X = 0$ ou $X' = 0$, et en déduire que q_1 et q_2 n'ont pas de bases orthogonales communes.

Exercice 2 [Matrices symétriques complexes]

Dans tout cet exercice, on note $S_n(\mathbb{C})$ (respectivement $S_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques complexes (respectivement réelles).

Questions préliminaires :

1. En considérant la matrice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

montrer qu'une matrice M de $S_n(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement diagonalisable. Que dire si $M \in S_n(\mathbb{R})$?

2. Soit $M \in S_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique. Justifier que M est congruente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(pour un certain entier $1 \leq r \leq n$) et en déduire qu'il existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $M = {}^tPP$. Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, peut-on toujours trouver $P \in M_n(\mathbb{R})$ comme ci-dessus ?

3. Soient A et $B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. En raisonnant par récurrence sur $n \geq 1$, montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale tel que ${}^tOAO$ et ${}^tOBO$ soient diagonales (et réelles).

Réduction des matrices symétriques complexes :

Dans le reste de l'exercice, on va montrer le résultat suivant : si $M \in S_n(\mathbb{C})$, alors il existe $U \in U_n$ une matrice unitaire et $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ des réels positifs tels que

$$M = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tU.$$

4. Si $M \in S_n(\mathbb{C})$, on considère $\overline{M}M$. Montrer que $\overline{M}M$ est une matrice hermitienne positive et qu'il existe $V \in U_n$ telle que ${}^t\overline{V}\overline{M}MV = D$ avec D une matrice diagonale avec des coefficients réels positifs.

5. On pose $N := {}^tVMV$. Vérifier que N est symétrique et calculer $\overline{N}N$. On écrit $N = A+iB$ avec A et $B \in M_n(\mathbb{R})$. En exprimant $\overline{N}N$ en fonction de A et B, montrer que A et B commutent : $AB = BA$. Vérifier également que A et B sont symétriques.

6. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tONO$ est diagonale et conclure.

7. En reprenant l'exemple de la matrice M_2 de la question **1**, donner une matrice U et des réels positifs λ_1, λ_2 tels que

$$M_2 = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} {}^tU.$$

Exercice 3 [Réduction de Jordan]

Soit $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

1. Déterminer la forme de Jordan de A. On explicitera une matrice de passage permettant de mettre A sous forme de Jordan.

Soit $n \geqslant 1$ et soit $B \in M_n(\mathbb{R})$. On note φ_B l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ de multiplication à gauche par B :

$$\varphi_B : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & BM. \end{array} \right.$$

2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(\varphi_B) = \varphi_{P(B)}$ (on pourra commencer par $P = X^k$).

3. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \mathrm{Ker}\,(P(\varphi_B)) = \mathrm{Ker}\,(P(B))^n .$$

Dans l'égalité ci-dessus, on a identifié une matrice au n-uplet formé par ses colonnes.

4. Déduire également de la question **2** que B et φ_B ont le même polynôme minimal.

5. Revenons au cas particulier de la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ du début de l'énoncé. Quelle est la forme de Jordan de l'endomorphisme $\varphi_A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$? (On ne demande pas nécessairement d'expliciter le changement de base.)

Exercice 4 [Frobenius vs Jordan]

Soient P_1, P_2 et P_3 des polynômes **irréductibles** unitaires de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux distincts.

1. Déterminer le nombre de classes de similitude de matrices ayant $P_1P_2^2P_3$ pour polynôme minimal et $P_1^2P_2^4P_3^3$ pour polynôme caractéristique. Pour chacune d'entre elles donner les invariants de similitude.

2. On suppose $P_1 = X - 1$, $P_2 = X - 2$ et $P_3 = X - 3$. Donner pour chacune des classes de similitude obtenue à la question précédente un représentant sous forme réduite de Jordan.