ALBI
L3, semestre 1 (2025-2026) - Groupe magistère
Université de Rennes - ENS Rennes

Contrôle continu 1

Exercice 1

Soient E, E' des K-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $f : E^* \otimes E' \to \mathcal{L}(E, E')$ telle que pour tout $(\varphi, x) \in E^* \times E'$, et pour tout $y \in E$, $f(\varphi \otimes x)(y) = \varphi(y)x$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$. On note $F = \ker u$ et π la projection canonique $\pi : E \to E/F$. On note $F^0 = \{\varphi \in E^* \text{ t. q. } \varphi_{|F} = 0\}$ l'orthogonal de F.

a) Démontrer que ${}^t\pi : (E/F)^* \to E^*$ induit un isomorphisme ${}^t\bar{\pi} : (E/F)^* \to F^0$.

b) Démontrer que $u : E \to E'$ induit un isomorphisme $\bar{u} : E/F \to \mathrm{Im}(u)$.

3. Soit $r = \dim(E/F)$. On fixe $(e_1, \dots, e_r)$ une base de E/F et $(e_1^*, \dots, e_r^*)$ sa base duale. Enfin, pour tout $1 \leq i \leq r$, on note $\varphi_i = {}^t\bar{\pi}(e_i^*)$ et $x_i = \bar{u}(e_i)$.

a) Justifier le fait que $r = \mathrm{rg}(u)$.

b) Soit $y \in E$. Décomposer $\pi(y)$ sur la base $(e_1, \dots, e_r)$ de E/F en faisant intervenir la base duale, et en déduire que $u(y) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(y)x_i$.

c) En déduire que $u = f\left(\sum_{i=1}^r \varphi_i \otimes x_i\right)$.

4. Démontrer que f est un isomorphisme.

5. Soit $t \in E^* \otimes E'$. On note :

$$\rho(t) = \inf \left\{ r \geq 0 \mid \exists (\varphi_1, \dots, \varphi_r) \in (E^*)^r, \exists (x_1, \dots, x_r) \in (E')^r \text{ t.q. } t = \sum_{i=1}^r \varphi_i \otimes x_i \right\}.$$

En utilisant la question 3., démontrer que pour tout $t \in E^* \otimes E'$, $\rho(t) \leq \mathrm{rg}(f(t))$.

6. Démontrer que pour tout $t \in E^* \otimes E'$, $\rho(t) = \mathrm{rg}(f(t))$.

Exercice 2

Soit V un K-espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V. On note π_1 la projection canonique de V sur V/W.

1. Montrer que si U est un sous-espace vectoriel de V, alors l'ensemble $\pi_1(U)$ est un sous-espace vectoriel de V/W et qu'on a l'inclusion $U \subseteq \pi_1^{-1}(\pi_1(U))$.

2. Montrer que si l'on suppose de plus que le sous-espace vectoriel U contient W, alors l'inclusion précédente est une égalité.

3. On note $\mathcal{S}_W$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V contenant W, et $\mathcal{S}_{V/W}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V/W. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathcal{S}_W & \to & \mathcal{S}_{V/W} \\ & & U & \mapsto & \pi_1(U) \end{array}$$

est une bijection et donner son inverse.

4. Soit $U \in \mathcal{S}_W$. Montrer que $\pi_1(U)$ s'identifie naturellement à U/W. *Indication : on pourra chercher à définir une application linéaire induisant un isomorphisme* $U/W \xrightarrow{\sim} \pi_1(U)$.

5. Via l'identification de la question précédente, on note π_2 la projection canonique de V/W sur $(V/W)/(U/W)$. Déterminer le noyau et l'image de $\pi_2 \circ \pi_1$.

6. En déduire que pour tout $U \in \mathcal{S}_W$, les espaces vectoriels V/U et $(V/W)/(U/W)$ sont isomorphes.